COURS DE SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

Terminale S

Valère BONNET
(postmaster@mathsaulycee.info)

15 mars 2007

Lycée PONTUS DE TYARD
13 rue des Gaillardons
71100 CHALON SUR SAÔNE
Tél. : (33) 03 85 46 85 40
Fax : (33) 03 85 46 85 59
FRANCE
Site web : http ://www.mathsaulycee.info

Table des matières

Chapitre I

Similitudes

I.1 Rappels et compléments

I.1.1 Orientation du plan

Orienter le plan, c'est choisir un sens positif, ou direct, de parcours des cercles du plan. Par convention on choisit le sens trigonométrique, c'est-à-dire le sens contraire des aiguilles d'une montre, comme sens positif.
Ainsi ABC est un triangle de *sens direct* alors que DEF est un triangle de *sens indirect*.

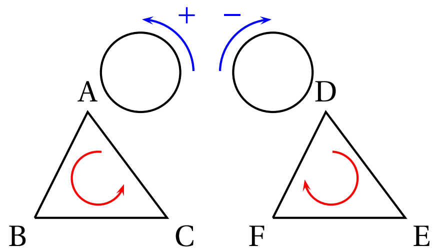


FIG. I.1 – Orientations du plan

I.1.2 Triangles isométriques

I.1.2.a Définition et propriétés

DÉFINITION I.1.1
Deux triangles *isométriques* sont deux triangles dont les côtés sont deux à deux de même longueur.

Remarques

1. Dire que les triangles ABC et A'B'C' sont isométriques signifie que : $\left\{\begin{array}{l} AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ CA = C'A' \end{array}\right.$.

2. Si les triangles ABC et A'B'C' d'une part et A'B'C' et A"B"C" d'autre part sont isométriques ; alors les triangles ABC et A"B"C" sont isométriques.

Exemples
1. ABC est un triangle isocèle en A, H le milieu de [BC]. Alors ABH et ACH sont isométriques (l'un est image de l'autre par la symétrie d'axe (AH)).

2. DEFG est un parallélogramme de centre I.
DIG et FIE sont isométriques.

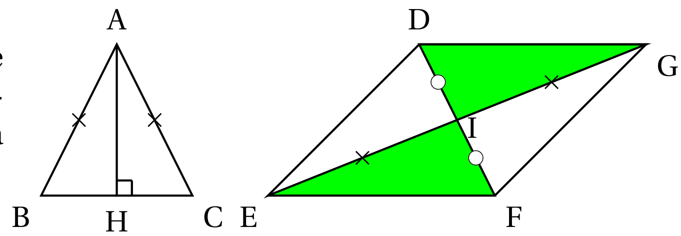


FIG. I.2 – Exemples de triangles isométriques

Exercice I.1.1. ***Citer deux autres triangles isométriques apparaissant sur le parallélogramme DEFG de la figure I.2.***

Remarques
1. Les triangles AHB et AHC sont isométriques et orientés en des sens contraires, on dit qu'ils sont *indirectement isométriques*.
2. Les triangles GID et EIF sont isométriques et orientés dans le même sens, on dit qu'ils sont

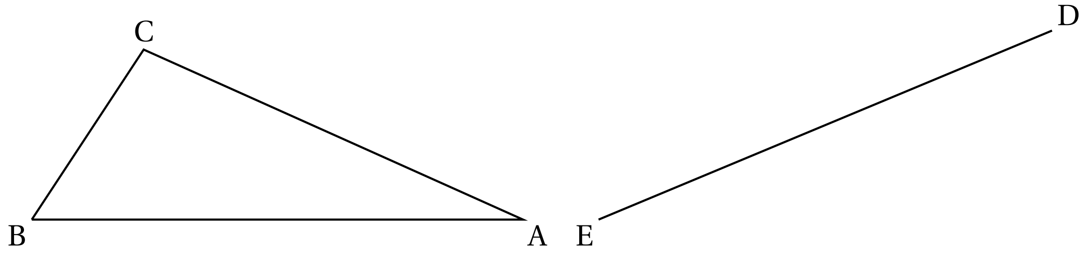


FIG. I.3 – Construction de triangles isométriques

directement isométriques.

Exercice I.1.2. ***Construire les points G et H tels que, sur la figure I.3, les triangles ABC et DEG soient directement isométriques ; les triangles ABC et DEH soient indirectement isométriques.***

THÉORÈME I.1.1

Si ABC et A'B'C' sont deux triangles isométriques, alors :

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \qquad \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'} \qquad \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$$

Démonstration

On a : $BC^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = AC^2 + AB^2 - 2AB \times AC \cos \widehat{BAC}$;

de même : $B'C'^2 = A'C'^2 + A'B'^2 - 2A'B' \times A'C' \cos \widehat{B'A'C'}$;

de plus : $AB = A'B' \quad AC = A'C' \quad BC = B'C'$; on en déduit que :

$$\cos \widehat{B'A'C'} = \frac{A'B'^2 + A'C'^2 - B'C'^2}{2A'B' \times A'C'} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC} = \cos \widehat{BAC}$$

et donc :

$$\widehat{B'A'C'} = \widehat{BAC}.$$

On démontre de même que : $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$.

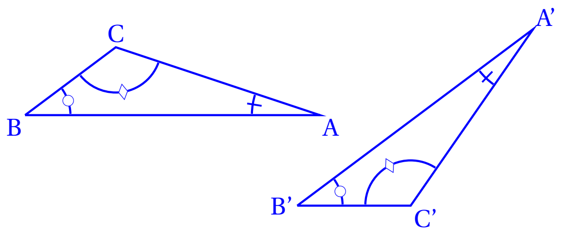


FIG. I.4 – Deux triangles isométriques ont les mêmes angles

□

THÉORÈME I.1.2

Si ABC et A'B'C' sont deux triangles isométriques, alors ils ont même aire.

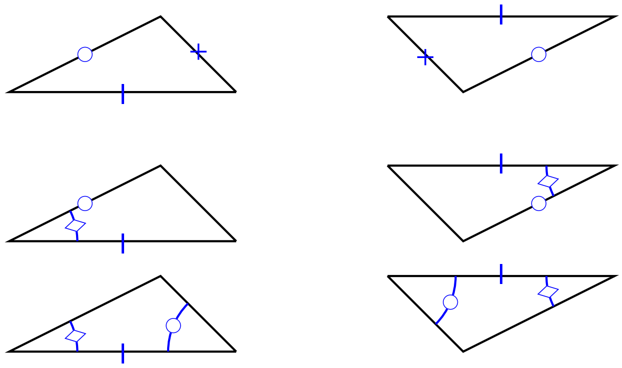
Démonstration

On a : $\text{aire}\,(A'B'C') = \frac{1}{2} A'B' \times A'C' \sin \widehat{B'A'C'} = \frac{1}{2} AB \times AC \sin \widehat{BAC} = \text{aire}\,(ABC)$. □

Remarque Les réciproques des théorèmes I.1.1 et I.1.2 sont fausses.

I.1.2.b Cas d'isométries de deux triangles

THÉORÈME I.1.3
Pour démontrer que deux triangles sont isométriques, il suffit d'établir l'une des propositions suivantes.
(1) Chaque côté est de même longueur que son homologue.
(2) L'un des angles est égal à son homologue et les côtés adjacents à cet angle sont chacun de même longueur que son homologue.
(3) Deux angles sont égaux à leur homologue et l'un des côtés est de même longueur que son homologue.



Démonstration (1) est une conséquence immédiate de la définition I.1.1.
(2) Soit ABC et A'B'C' deux triangles tels que :
$AB = A'B'$; $BC = B'C'$ et $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.
Pour montrer que ABC et A'B'C' sont isométriques, il suffit de démontrer que : $AC = A'C'$.
Appliquons le théorème d'AL KASHI (**??**) aux triangles ABC et A'B'C'.
Il vient :
$$\begin{aligned} AC^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos \widehat{ABC} \\ &= A'B'^2 + B'C'^2 - 2A'B' \times B'C' \cos \widehat{A'B'C'} \\ &= A'C'^2 \end{aligned}$$

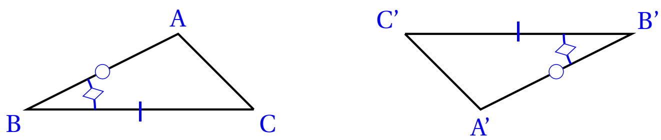


FIG. I.5 – Deuxième cas d'isométrie de deux triangles

(3) Soit ABC et A'B'C' deux triangles tels que :
$BC = B'C'$; $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$.
Pour montrer que ABC et A'B'C' sont isométriques, il suffit de démontrer que : $AB = A'B'$ et $AC = A'C'$.
On a : $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{CAB} = \pi = \widehat{A'B'C'} + \widehat{B'C'A'} + \widehat{C'A'B'}$;
donc : $\widehat{CAB} = \widehat{CAB}$. Appliquons le théorème des sinus (**??**) aux triangles ABC et A'B'C'. Il vient :

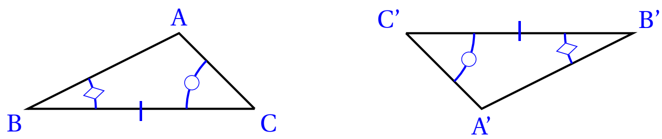


FIG. I.6 – Troisième cas d'isométrie de deux triangles

$$AB = \frac{\sin \widehat{BCA}}{\sin \widehat{CAB}} BC = \frac{\sin \widehat{B'C'A'}}{\sin \widehat{C'A'B'}} B'C' = A'B' \quad \text{et} \quad AC = \frac{\sin \widehat{ABC}}{\sin \widehat{CAB}} BC = \frac{\sin \widehat{A'B'C'}}{\sin \widehat{C'A'B'}} B'C' = A'C' \; \square$$

Remarque Le fait d'avoir deux côtés de même longueur que leur côté homologue et un angle égal

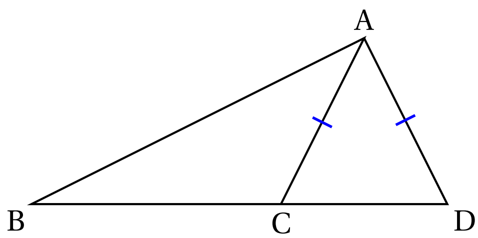


FIG. I.7 – ABC et ABD ne sont pas isométriques

à son homologue ne suffit pas pour conclure que les deux triangles sont isométriques. Sur la figure I.7, si on considère les triangles ABC et ABD, les côtés homologues [AB] et [AB] sont de même longueur, les côtés homologues [AC] et [AD] sont de même longueur et les angles homologues $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ABD}$ sont égaux. Pourtant les triangles ABC et ABD ne sont pas isométriques car les côtés homologues [BC] et [BD] ne sont pas de même longueur.

I.1.3 Exercices résolus

I.1.3.a Démontrer que deux triangles sont isométriques

Exercice I.1.3. ***ABC est un triangle isocèle en A. B' et C' sont les milieux respectifs des côtés [AC] et [AB]. Démontrer, par trois méthodes différentes, que les triangles ABB' et ACC' sont isométriques.***

Solution *On introduit le point A' milieu de [BC]. Le triangle ABC est isocèle en A, donc (AA') est la médiatrice du segment [BC] ; par conséquent la symétrie,* $\mathrm{S}_{\mathrm{AA'}}$*, d'axe (AA') transforme B en C.*

1re méthode

De plus $\mathrm{S}_{\mathrm{AA'}}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ *et les symétries conservent le milieu, donc* $\mathrm{S}_{\mathrm{AA'}}(\mathrm{B'}) = \mathrm{C'}$*. On a démontré que* $\mathrm{S}_{\mathrm{AA'}}$ *transforme A en A, B en C et B' en C' ; nous savons de plus que les réflexions conservent la distance entre deux points, donc :*
AB = AC, AB' = AC', BB' = CC'.
Par conséquent les triangles ABB' et ACC' sont isométriques.

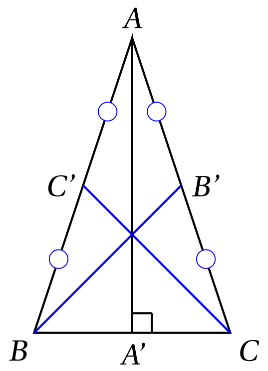


FIG. *I.8* –

2e méthode

Les angles homologues $\widehat{\mathrm{BAB'}}$ *et* $\widehat{\mathrm{CAC'}}$ *sont égaux et les côtés adjacents à* $\widehat{\mathrm{BAB'}}$*, [AB] et [AB'] sont de même longueur que leurs côtés homologues respectifs [AC] et [AC'] ; donc les triangles ABB' et ACC' sont isométriques.*

3e méthode

Les angles homologues $\widehat{\mathrm{BAB'}}$ *et* $\widehat{\mathrm{CAC'}}$ *sont égaux. Les angles homologues* $\widehat{\mathrm{ABB'}}$ *et* $\widehat{\mathrm{ACC'}}$ *sont égaux car les réflexions conservent les angles et* $S_{\mathrm{AA'}}$ *transforme A en A, B en C et B' en C'. Les côtés homologues AB et AC sont de même longueur. Les triangles ABB' et ACC' ont deux angles égaux a leur homologue et un côté de même longueur que son homologue, ils sont donc isométriques.* □

I.1.3.b Des triangles isométriques pour démontrer

Exercice I.1.4. ***On reprend les données de l'exercice précédent. Démontrer que :*** $\mathrm{BB'} = \mathrm{CC'}$.

Solution *On a démontrer que les triangles ABB' et ACC' sont isométriques ; donc les cotés homologues [BB'] et [CC'] sont de même longueur.* □

I.1.4 Triangles semblables

I.1.4.a Exemple fondamental

Sur la figure I.9, les triangles ABC et AB'C' sont en situation de THALÈS.
On a : $\widehat{AB'C'} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{AC'B'} = \widehat{ACB}$, comme angles correspondants. Dans les triangles ABC et AB'C' les angles homologues sont égaux. On dit que triangles ABC et AB'C' sont semblables (on dit aussi qu'ils ont la même forme). D'après le théorème de Thalès, il existe un nombre réel positif k tel que :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k.$$

Les côtés homologues des triangles ABC et A'B'C' sont proportionnels.

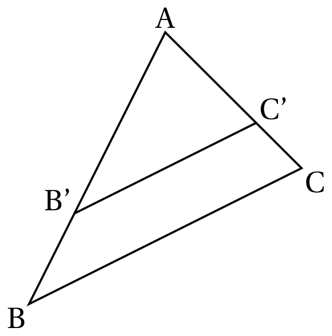


FIG. I.9 – Exemple fondamental

I.1.4.b Définition et propriétés

DÉFINITION I.1.2
Deux triangles semblables sont deux triangles tel que tout angle de l'un est égal à son homologue dans l'autre.

Remarques

1. Dire que les triangles ABC et A'B'C' sont semblables signifie que : $\begin{cases} \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \\ \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'} \\ \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'} \end{cases}$

2. Des triangles isométriques sont des triangles semblables puisque leurs angles sont égaux deux à deux. Mais des triangles semblables ne sont pas nécessairement isométriques.

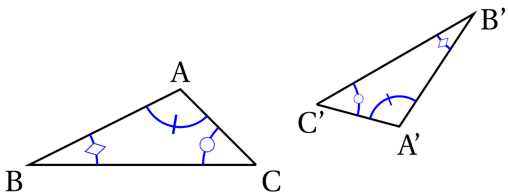


FIG. I.10 – Triangles semblables

3. Si les triangles ABC et A'B'C' d'une part et A'B'C' et A"B"C" d'autre part sont semblables ; alors les triangles ABC et A"B"C" sont semblables.

THÉORÈME I.1.4
Pour que deux triangles soient semblables il suffit qu'il y ait deux angles égaux à leur homologue.

Démonstration On sait que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° donc si deux triangles ont deux angles égaux à leur homologue, alors le troisième angle est lui aussi égal à son homologue □

Exemple Sur la figure I.11, dans le triangle ABC, rectangle en A,
H est le pied de la hauteur issue de A.
On a :$\widehat{ABH} = \widehat{CBA}$ et $\widehat{BHA} = \widehat{BAC}$.

Dans le triangle HBA les angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{BHA}$ sont égaux à leur homologue dans le triangle ABC ; les triangles HBA et ABC sont donc semblables.
On a : $\widehat{BCA} = \widehat{ACH}$ et $\widehat{BAC} = \widehat{AHC}$.

Dans le triangle ABC les angles $\widehat{BCA}$ et $\widehat{BAC}$ sont égaux à leur homologue dans le triangle HAC ; les triangles ABC et HAC sont donc semblables.
Les triangles HBA et HAC sont tous deux semblables aux triangles ABC, ils sont donc semblables.

Remarques

1. Les triangles HBA et ABC sont semblables et orientés en des sens contraires, on dit qu'ils sont *indirectement semblables.*

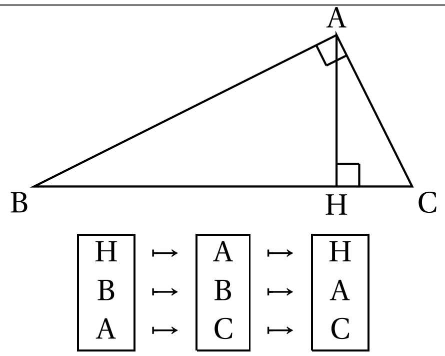


FIG. I.11 – Configuration clef

2. Les triangles HBA et HAC sont semblables et orientés dans le même sens, on dit qu'ils sont *directement semblables.*

Exercice I.1.5. ***Construire les points D et E tels que les triangles ABC et DAC soient directement semblables ; les triangles ABC et EAC soient indirectement semblables.***

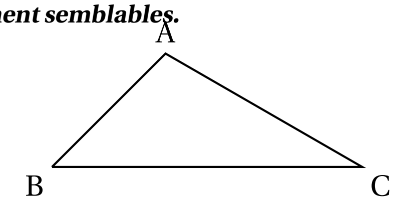


FIG. I.12 – Construction de triangles semblables

I.1.5 Proportionnalité

THÉORÈME I.1.5

Deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables si et seulement il existe un nombre réel strictement positif k tel que :
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k.$$

Démonstration Soit ABC et A'B'C' deux triangles.
On construit sur la demi-droite [A'B') le point B" tel que : $A'B''=AB$; et sur la demi-droite [A'C') le point C" tel que : $A'C''=AC$.

Théorème direct

Si ABC et A'B'C' sont semblables, alors : $\widehat{B''A'C''}=\widehat{BAC}$; $A'B''=AB$ et $A'C''=AC$; donc les triangles ABC et A'B"C" sont également semblables. On en déduit que les triangles A'B"C" et A'B'C' sont semblables. Ils sont de plus orientés dans le même sens (car $B''\in[A'B')$ et $C''\in[A'C')$), ils sont donc directement semblables. Par conséquent les droites (B'C') et (B"C") sont parallèles. Les triangles A'B'C' et A'B"C" sont en situation de Thalès donc d'après le théorème de Thalès, il existe un nombre réel positif k tel que : $\frac{A'B'}{A'B''}=\frac{A'C'}{A'C''}=\frac{B'C'}{B''C''}=k$. C'est-à-dire : $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$.

Théorème réciproque

S'il existe un nombre réel positif k tel que : $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$; alors on a : $\frac{A'B'}{A'B''}=\frac{A'C'}{A'C''}=k$; donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, les triangles A'B'C' et A'B"C" sont en situation de Thalès (donc semblables) et on déduit que : $\frac{A'B'}{A'B''}=\frac{A'C'}{A'C''}=\frac{B'C'}{B''C''}=k$.
En faisant le quotient membre à membre avec : $\frac{A'B'}{AB}=\frac{A'C'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=k$; on obtient :
$\frac{A'B'}{A'B''}\times\frac{AB}{AB'}=\frac{A'C'}{A'C''}\times\frac{AC}{AC'}=\frac{B'C'}{B''C''}\times\frac{BC}{B'C'}=k\times\frac{1}{k}$; C'est-à-dire : $\frac{AB}{A'B''}=\frac{AC}{A'C''}=\frac{BC}{B''C''}=1$.
Donc les triangles ABC et A'B"C" sont isométriques et par suite semblables. Les triangles ABC et A'B'C' sont semblables à A'B"C", ils sont donc semblables. □

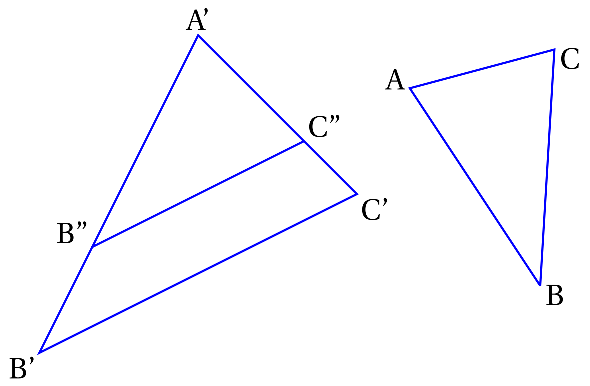


FIG. I.13 – Triangles semblables et proportionnalité

Notations et vocabulaire Le nombre k est appelé rapport de similitude qui transforme ABC en A'B'C'.

THÉORÈME I.1.6
Si ABC et A'B'C' sont deux triangles semblables et si k est le rapport de similitude qui transforme ABC en A'B'C', alors : $\text{aire}\left(A'B'C'\right) = k^2\,\text{aire}\,(ABC)$.

Démonstration On a : $\text{aire}\left(A'B'C'\right) = A'B' \times A'C' \cos\widehat{B'A'C'} = (k\,AB) \times (k\,AC) \cos\widehat{BAC} = k^2\,AB \times AC \cos\widehat{BAC} = k^2\,\text{aire}\,(ABC)$.
□

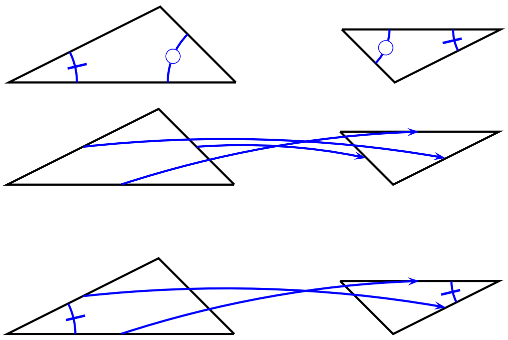
I.1.6 Cas de similitude de deux triangles

THÉORÈME I.1.7
Pour démontrer que deux triangles sont semblables, il suffit d'établir l'une des propositions suivantes.

(1) Deux angles sont égaux à leur homologue.

(2) Les longueurs des côté de l'un sont proportionnelles à leurs homologues

(3) L'un des angles est égal à son homologue et les longueurs des côté adjacents à cet angle sont proportionnelles aux longueurs des côtés homologues.



Démonstration

(1) La somme des angles d'un triangle est l'angle plat donc si deux angles sont égaux à leur homologue, alors le troisième l'est aussi.

(2) Cette propriété est une partie du théorème I.1.5.

(3) Soit ABC et A'B'C' deux triangles tels que :
$\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{B'C'}{BC} = k \text{ et } \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$.
Pour montrer que ABC et A'B'C' sont semblables, il suffit de démontrer que : $A'C' = kAC$.
Appliquons le théorème d'AL KASHI (**??**) aux triangles ABC et A'B'C'. Il vient :

$$\begin{aligned} A'C'^2 &= A'B'^2 + B'C'^2 - 2A'B' \times B'C' \cos\widehat{A'B'C'} \\ &= k^2AB^2 + k^2BC^2 - 2k\,AB \times k\,BC \cos\widehat{ABC} \\ &= k^2\left(AB^2 + BC^2 - 2AB \times BC \cos\widehat{ABC}\right) \\ &= k^2AC^2 \end{aligned}$$

On en déduit que : $A'C' = kAC$. □

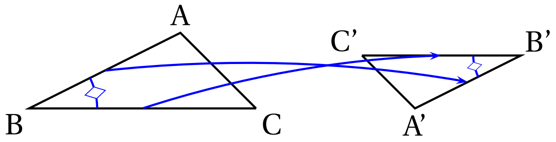


FIG. I.14 – Troisième cas de similitude de deux triangles

I.1.7 Exercice résolu

Exercice I.1.6. ***ABCD est un parallélogramme, N un point du segment [DC] distinct de D et C. La droite (AN) coupe (BC) en M.***

1. Démontrer que les triangles ADN et MBA sont des triangles semblables.

2. En déduire que $\mathbf{DN \times MB = BA \times AD}$.

Solution

1. *Dans les triangles ADN et MBA, les angles homologues* $\widehat{AND}$ *et* $\widehat{MAB}$ *sont égaux car alternes internes ; les angles homologues* $\widehat{DAN}$ *et* $\widehat{BMA}$ *sont égaux car alternes internes. Donc les triangles ADN et MBA sont semblables.*

Autre méthode *On a (AD)//(MC), donc les triangles ADN et MCN sont en situation de* THALÈS *et donc semblables. On a (NC)//(AB), donc les triangles MCN et MBA sont en situation de* THALÈS *et donc semblables. Donc les triangles ADN et MBA sont semblables.*

2. *On a donc :* $\frac{AD}{MB} = \frac{DN}{BA}$ *; d'où l'on tire :* $DN \times MB = BA \times AD$. □

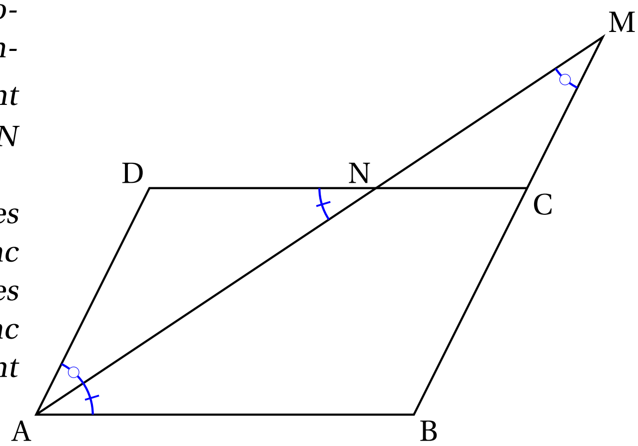


FIG. I.15 –

I.2 Généralités sur les transformations du plan

I.2.1 Introduction

DÉFINITION I.2.1

Une *transformation du plan*, ou *transformation plane* est une bijection du plan dans lui-même.

Exemples

1. L'application identique du plan, $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$, c'est-à-dire l'application du plan dans lui-même définie par : $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}(M) = M$; est une transformation du plan.

2. Les translations, les rotations, les réflexions et les homothéties sont des transformations.

3. La projection orthogonale sur une droite (D) n'est pas une transformation car un point hors de (D) n'a pas d'antécédent.

On rappelle que la composée de g par f, où f et g sont deux applications planes, est l'application plane $f \circ g$ définie par :

$$f \circ g(M) = f\big(g(M)\big).$$

La composition des applications du plan est associative, en effet pour toutes applications de plan f, g, h et pour tout point M du plan, on a :

$$\begin{cases} f\circ(g\circ h)(\mathrm{M}) = f\circ\big(g\circ h(\mathrm{M})\big) = f\circ\Big(g\big(h(\mathrm{M})\big)\Big) \\ (f\circ g)\circ h(\mathrm{M}) = \big(f\circ g\big)\big(h(\mathrm{M})\big) = f\circ\Big(g\big(h(\mathrm{M})\big)\Big) \end{cases}$$

donc :

$$f\circ(g\circ h) = (f\circ g)\circ h$$

La réciproque d'une transformation f est la transformation, notée f^{-1}, telle que pour tous points M et M' :

$$f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}' \quad\iff\quad f^{-1}(\mathrm{M}') = \mathrm{M}.$$

On a donc : $f\circ f^{-1} = f^{-1}\circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$.

Remarque Réciproquement, si f et g sont deux applications du plan telles que : $f\circ g = g\circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$; alors f et g sont deux transformations réciproques.

Théorème I.2.1

Soit f une transformation du plan et g une application du plan.
Si : $f\circ g = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$ ou $g\circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$; alors g est la transformation réciproque de f.

DémonstrationSi : $f\circ g = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$; alors en composant à gauche par f^{-1}, il vient : $f^{-1}\circ f\circ g = f^{-1}\circ \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$; c'est-à-dire : $g = f^{-1}$.
Si : $g\circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$; alors en composant à droite par f^{-1}, il vient : $g\circ f\circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}\circ f^{-1}$; c'est-à-dire : $g = f^{-1}$. □

Remarques

1. Désormais, dans ce chapitre, on écrira plus simplement transformation pour transformation plane.
2. La composée de deux transformations est une transformation.
3. La réciproque d'une transformation est une transformation.

I.2.2 Exercices résolus

Exercice I.2.1. ***On considère l'application plane, f, d'expression complexe $z' = (z-1)(z-2)$. f est-elle une transformation ?***

Solution *Pour $z = 1$ ou $z = 2$, on a : $z' = 0$.*
Les points $A(1)$ et $B(2)$ sont deux antécédents par f de $O(0)$; donc f n'est pas une transformation.
□

M Pour démontrer qu'une application n'est pas bijective, il suffit de trouver un élément de l'ensemble d'arrivée qui n'a pas d'antécédent ou qui a plusieurs antécédents.

Exercice I.2.2. ***On considère les applications planes f et g d'écritures complexes respectives :***

$$z' = -2z+3 \qquad \textit{et} \qquad z' = 3z+2.$$

1. Démontrer que f et g sont des transformations et déterminer leur transformation réciproques.

2. Déterminer les écritures complexes de $f\circ g$ et de $g\circ f$.

3. Démontrer que $f^{-1}\circ g^{-1}$ est la transformation réciproque de $g\circ f$.

Solution 1. *Soit M et M' deux points et z, z' leurs affixes respectives. On a :*

$$\mathrm{M}' = f(\mathrm{M}) \iff z' = -2z+3 \iff z = -\frac{1}{2}z' + \frac{3}{2}.$$

Le point M' a un et un seul antécédent : le point d'affixe $-\frac{1}{2}z'+\frac{3}{2}$*. Donc* f *est une transformation ; de plus sa transformation réciproque est la transformation* f^{-1} *d'écriture complexe :* $z'=-\frac{1}{2}z+\frac{3}{2}$.

On établit de même que g *est une transformation de transformation réciproque* g^{-1} *d'écriture complexe :* $z'=-\frac{1}{3}z-\frac{2}{3}$.

2. $f\circ g$ *a pour écritures complexe :* $z'=-2(3z+2)+3$ *; c'est-à-dire :* $z'=-6z-1$.
$g\circ f$ *a pour écritures complexe :* $z'=3(-2z+3)+2$ *; c'est-à-dire :* $z'=-6z+11$.
3. *On a :* $(f^{-1}\circ g^{-1})\circ(g\circ f)=f^{-1}\circ(g^{-1}\circ g)\circ f=f^{-1}\circ \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}\circ f=f^{-1}\circ f=\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$ *;*
donc, d'après le théorème I.2.1 $f^{-1}\circ g^{-1}$ *est la transformation réciproque de* $g\circ f$. □

Exercice I.2.3. ***On considère les applications planes*** f ***et*** g ***d'écritures complexes respectives :***

$$z'=(1+i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i\sqrt{3} \qquad \text{et} \qquad z'=2i\overline{z}-3+3i.$$

1. Déterminer les point fixes de f ***et de*** g***.***

2. Déterminer les écritures complexes de $f\circ g$ ***et de*** $g\circ f$***.***

3. Soit A et B les points d'affixes respectives $1+i$ ***et*** $1-i$***. Déterminer*** $f(A)$ ***et*** $g(B)$***.***

Solution 1. *Un point est invariant par* f *si et seulement si son affixe est solution de l'équation :*

$$z=(1+i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i\sqrt{3} \tag{I.1}$$

$$\begin{aligned}(\text{I.1}) \quad &\iff \quad i\sqrt{3}z=\sqrt{3}(1+i)\\ &\iff \quad i^2z=i(1+i)\\ &\iff \quad z=1-i\end{aligned}$$

f *n'a qu'un seul point fixe : le point d'affixe* $1-i$.

Un point est invariant par g *si et seulement si son affixe est solution de l'équation :*

$$z=2i\overline{z}-3+3i \tag{I.2}$$

Soit $z=x+iy$ *la forme algébrique de* z*.*

$$\begin{aligned}(\text{I.2}) \quad &\iff \quad (x+iy)-2i(x-iy)=-3+3i\\ &\iff \quad (x-2y)+i(-2x+y)=-3+3i\end{aligned}$$

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire, donc :

$$(\text{I.2}) \iff \begin{cases} x-2y=-3\\ -2x+y=3\end{cases} \iff \begin{cases} x=2y-3\\ -4y+y=-6+3\end{cases} \iff \begin{cases} x=-1\\ y=1\end{cases}$$

g *n'a qu'un seul point fixe : le point d'affixe* $-1+i$.

2. $f\circ g$ *a pour écriture complexe :* $z'=\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(2i\overline{z}-3+3i\right)-\sqrt{3}-i\sqrt{3}$ *;*
or pour tout $z\in\mathbb{C}$ *:*

$$\begin{aligned}\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(2i\overline{z}-3+3i\right)-\sqrt{3}-i\sqrt{3} &= 2\left(-\sqrt{3}+i\right)\overline{z}-3\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\right)-i\sqrt{3}(1-i)\\ &= 2\left(-\sqrt{3}+i\right)\overline{z}+\left(1-i\right)\left(-3-4\sqrt{3}i\right).\end{aligned}$$

$f\circ g$ *a pour écriture complexe :*

$$z'=2\left(-\sqrt{3}+i\right)\overline{z}+\left(1-i\right)\left(-3-4\sqrt{3}i\right).$$

$g\circ f$ *a pour écriture complexe :* $z'=2i\left(\overline{(1+i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i\sqrt{3}}\right)-3+3i$ *;*
or pour tout $z\in\mathbb{C}$ *:*

$$\begin{aligned}2i\left(\overline{(1+i\sqrt{3})z-\sqrt{3}-i\sqrt{3}}\right)-3+3i &= 2i\left((1-i\sqrt{3})\overline{z}-\sqrt{3}+i\sqrt{3}\right)-3+3i\\ &= 2i(1-i\sqrt{3})\overline{z}+(-2\sqrt{3}-2i\sqrt{3})-3+3i\\ &= 2\left(\sqrt{3}+i\right)\overline{z}-2\sqrt{3}(1+i)+3i(1+i)\\ &= 2\left(\sqrt{3}+i\right)\overline{z}+(1+i)\left(-2\sqrt{3}+3i\right)\end{aligned}$$

$g \circ f$ a pour écriture complexe :

$$z' = 2\left(\sqrt{3} + i\right)\overline{z} + (1+i)\left(-2\sqrt{3} + 3i\right)$$

3. *Déterminons f(A). Pour : $z = 1 + i$; dans l'écriture complexe de f, on a :*
$z' = (1 + i\sqrt{3})(1+i) - \sqrt{3} - i\sqrt{3} = 1 + i - 2\sqrt{3}$. *Donc f(A) est le point d'affixe* $1 - 2\sqrt{3} + i$.
Déterminons f(B). Pour : $z = 1 - i$; dans l'écriture complexe de g, on a :
$z' = 2i\overline{(1-i)} - 3 + 3i = 2i - 2 - 3 + 3i = -5 + 5i$. *Donc f(B) est le point d'affixe* $-5 + 5i$.
□

I.2.3 Groupes de transformations

Les *isométries* du plan sont les transformations du plan qui conservent les distances. Une transformation f est donc une isométrie si et seulement si pour tous points A et B du plan, on a : f(A)f(B) = AB.
Les translations, les rotations et les réflexions sont des cas particuliers d'isométries.
Soit f et g deux isométries. On se propose de démontrer que $f \circ g$ et f^{-1} sont des isométries.

Posons : $A_1 = g(A)$; $B_1 = g(B)$; $A_2 = f(A_1)$; $B_2 = f(B_1)$; $A_{-1} = f^{-1}(A)$; $B_{-1} = f^{-1}(B)$.
On a donc : $f \circ g(A) = A_2$ et $f \circ g(B) = B_2$.
Pour démontrer que $f \circ g$ et f^{-1} sont des isométries, il suffit de démontrer que : $A_2B_2 = AB$ et $A_{-1}B_{-1} = AB$.
g et f sont des isométries donc : $A_2B_2 = A_1B_1$ et $A_1B_1 = AB$; donc : $A_2B_2 = AB$.
f est une isométrie, de plus : $f(A_{-1}) = A$ et $f(B_{-1}) = B$; donc : $AB = A_{-1}B_{-1}$.
On en déduit que la composée de deux isométries est une isométrie et que la réciproque d'une isométrie.
Ainsi, pour les transformations du plan, la propriété « être une isométrie » se conserve par composition et par passage à l'inverse. Nous verrons ultérieurement qu'il en va de même pour d'autres propriétés, justifiant ainsi la définition suivante.

DÉFINITION I.2.2
Un *groupe de transformations* est un ensemble de transformations, G, vérifiant pour tous éléments f et g de G : $f \circ g \in G$ et $f^{-1} \in G$.

Exemples
1. Si on désigne par $\mathscr{I}$ l'ensemble des isométries du plan, alors $\mathscr{I}$ est un groupe de transformations.
2. La composée de deux transformations est une transformation et la réciproque d'une transformation est une transformation : l'ensemble des transformations du plan est un groupe de transformations.
3. De même $\{\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}\}$ est un groupe de transformations.
4. Si s est réflexion, alors : $s \circ s = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$; et $\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$ n'est pas une réflexion. La composée de deux réflexions n'est pas toujours une réflexion donc l'ensemble des réflexions n'est pas un groupe de transformations.

Exercice I.2.4. ***Soit O un point. Démontrer que l'ensemble des transformations du plan qui laissent le point O invariant est un groupe de transformation.***
Solution *Soit f et g sont deux transformations qui laissent invariant le point O. On a :* $f(O) = g(O) = O$ *; donc :* $f \circ g(O) = O$ *et* $O = f^{-1} \circ f(O) = f^{-1}(O)$. *On en déduit que* $f \circ g$ *et* f^{-1} *sont deux transformations qui laissent le point O invariant.*

L'ensemble des transformations du plan qui laissent le point O invariant est donc un groupe de transformation. □

I.2.4 Exercices

I.2.a. Soit f et g deux applications du plan tels que : $f \circ g = g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$.

1. Démontrer que f est une transformation *(On démontrera que tout point M' du plan a un antécédent et un seul)*.

2. Que représente g pour f ?

I.2.b. L'ensemble des réflexions du plan est-il un groupe de transformations ?

I.2.c. On dit qu'une application du plan, f, est *involutive* (ont dit aussi que f est une *involution*) lorsque : $f \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$.

1. Soit f une involution. Justifier que f est bijective et préciser f^{-1}. On suppose de plus que f conserve le milieu. M est un point du plan, M' son image par f et I le milieu du segment [MM']. Démontrer que I est un point fixe de f.

I.3 Notions de similitudes

I.3.1 Définition

Soit h une homothétie de rapport k. Pour tous points du pan M, N, P, Q du plan (tels que $\mathrm{M} \neq \mathrm{N}$ et $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$) et M', N', P', Q' leurs images respectives par h, on a : $\mathrm{M'N'} = |k|\,\mathrm{MN}$ et $\mathrm{P'Q'} = |k|\,\mathrm{PQ}$.

Lorsque : $\mathrm{M} \neq \mathrm{N}$ et $\mathrm{P} \neq \mathrm{Q}$; on en déduit que : $\dfrac{\mathrm{P'Q'}}{\mathrm{M'N'}} = \dfrac{|k|\,\mathrm{PQ}}{|k|\,\mathrm{MN}} = \dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{MN}}$.

Les homothéties conservent donc les rapports de distances.

DÉFINITION I.3.1

Une similitude plane est une transformation plane qui conserve les rapports de distances.

Exemples

1. Les homothéties sont des similitudes.

2. Soit f une isométrie, pour tous points M, N, P, Q (tels que : $\mathrm{M} \neq \mathrm{N}$) et M', N', P', Q' leurs images respectives par f, on a : $\mathrm{P'Q'} = \mathrm{PQ}$ et $\mathrm{M'N'} = \mathrm{MN}$; on en déduit que : $\dfrac{\mathrm{P'Q'}}{\mathrm{M'N'}} = \dfrac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{MN}}$.

Les isométries sont donc des similitudes.

En particulier, les translations, les rotations et les réflexions sont des similitudes.

Remarques

1. La composée de deux transformations planes qui conservent les rapports de distances est une transformation plane qui conserve les rapports de distances. De même que dans l'exemple introductif du paragraphe I.2.3 page 15, on démontre que la réciproque d'une transformation plane qui conserve les rapports de distances est une transformation plane qui conserve les rapports de distances. L'ensemble des similitudes planes est donc un groupe de transformations.

2. Toutes les transformations étudiées dans ce chapitre sont planes. Désormais nous écrirons « transformation » pour « transformation plane » et « similitude » pour « similitude plane », lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté, A' désignera l'image de A, B' l'image de B …

THÉORÈME I.3.1

Soit s une similitude.

Il existe un réel strictement positif k, tel que pour tous points M, N du plan d'image M', N' on ait : $\mathrm{M'N'} = k\,\mathrm{MN}$.

DémonstrationSoit A et B deux points distincts du plan et A', B' leurs images par s (s est une bijection donc $\mathrm{A'} \neq \mathrm{B'}$), posons ; $k = \dfrac{\mathrm{A'B'}}{\mathrm{AB}}$.

Soit M et N deux points distincts du plan et M', N' leurs images par s.

- Si M = N, alors $M' = N'$ et donc : $M'N' = k\,MN$.
- Si $M \neq N$, alors : $\dfrac{M'N'}{A'B'} = \dfrac{MN}{AB}$; d'où : $\dfrac{M'N'}{MN} = \dfrac{A'B'}{AB} = k$. Par conséquent : $M'N' = k\,MN$.

□

Notations et vocabulaire Le nombre k est appelé *rapport de la similitude* s.

THÉORÈME I.3.2

Soit k un réel strictement positif.
Les similitudes de rapport k sont les transformations qui multiplient les distances par k.

DémonstrationD'après le théorème I.3.1, on sait que toute similitude de rapport k est une transformation qui multiplie les distances par k. Il ne reste plus qu'a démontrer que les transformations qui multiplient les distances par k sont des similitudes (qui sont évidemment de rapport k).
Soit f une transformation qui multiplie les distances par k. Pour tous points M, N, P, Q (tels que : $M \neq N$), on a : $P'Q' = k\,PQ$ et $M'N' = k\,MN$; on en déduit que : $\dfrac{P'Q'}{M'N'} = \dfrac{k\,PQ}{k\,MN} = \dfrac{PQ}{MN}$. Donc f est une similitude. □

Exemples

1. Les isométries sont *les* similitudes de rapport 1.
2. Les homothéties de rapport k sont *des* similitudes de rapport $|k|$.

I.3.2 Conséquences

THÉORÈME I.3.3

(1) Deux triangles images l'un de l'autre par une similitude sont semblables.
(2) La composée de deux similitudes de rapport k et k' est une similitude de rapport kk'.
(3) La réciproque d'une similitude de rapport k est une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$.
(4) Si s est une similitude qui a trois points non alignés invariants, alors s est l'identité.
(5) Deux similitudes qui coïncident en trois points non alignés sont égales.

Démonstration(1) Soit ABC un triangle, s une similitude et k son rapport. On a :

$$\begin{cases} A'B' = k\,AB \\ B'C' = k\,BC \\ C'A' = k\,CA \end{cases} ;\text{ donc : } \frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA} ;$$

donc ABC et A'B'C' sont semblables.
(2) est un corollaire du théorème I.3.2.
(3) Soit s une similitude de rapport k. s est une transformation qui multiplie les distances par k donc s^{-1} est une transformation qui divise les distances par k, c'est-à-dire une similitude de rapport $\dfrac{1}{k}$.
(4) Soit s une similitude tel qu'il existe un triangle ABC tel que : s(A) = A ; s(B) = B ; s(C) = C.
Démontrons que pour tout point M : s(M) = M.
On a : s(A)s(B) = AB ; donc s est une similitude de rapport 1, c'est-à-dire une isométrie.
Soit M un point et M' son image par s. s est une isométrie donc : s(A)s(M) = AM ; c'est-à-dire : $AM' = AM$; de même : $BM' = BM$ et $CM' = CM$;
Si M et M' étaient distincts alors A, B, C seraient trois points non alignés de la médiatrice de [MM'] ; donc : s(M) = M.
(5) Soit s et s' deux similitudes tel qu'il existe un triangle ABC tel que : $s(A) = s'(A)$; $s(B) = s'(B)$; $s(C) = s'(C)$.
On a : $s^{-1} \circ s'(A) = s^{-1}\big(s'(A)\big) = s^{-1}\big(s(A)\big) = A$; de même : $s^{-1} \circ s'(B) = B$ et $s^{-1} \circ s'(C) = C$.
A, B, C sont trois points invariants non alignés de $s^{-1} \circ s'$; donc : $s^{-1} \circ s' = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$; en composant à gauche par s, il vient : $s = s'$. □

Remarque Deux triangles images l'un de l'autre par une isométrie sont isométriques.

I.3.3 Exercices résolus

Exercice I.3.1. ***A et B sont deux points tels que :*** **AB = 7** ***; s est la symétrie de centre A et h est l'homothétie de centre B et de rapport*** **−3*****. On pose :*** $\mathrm{f} = \mathrm{h} \circ \mathrm{s}$ ***;*** $\mathrm{A}' = \mathrm{f}(\mathrm{A})$ ***et*** $\mathrm{B}' = \mathrm{f}(\mathrm{B})$***.Déterminer A'B'.***

Solution *f est la composée d'une similitude de rapport* 1 *par une similitude de rapport* 3*, donc f est une similitude de rapport* 3*. On en déduit que :* $\mathrm{A}'\mathrm{B}' = 3\,\mathrm{AB} = 21$. □

I.3.4 Exercices

I.3.a. ABCD est un carré de centre O, $\mathrm{s_{AC}}$ désigne la réflexion d'axe (AC), $\mathrm{s_{BD}}$ désigne la réflexion d'axe (BD) et $\mathrm{s_O}$ désigne la symétrie de centre O.
Démontrer que : $\mathrm{s_{AC}} \circ \mathrm{s_{BD}} = \mathrm{s_O}$.

I.4 Autres propriétés

I.4.1 Écriture complexe d'une similitude

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$.
L'affixe d'un point A sera notée z_A, l'affixe d'un point B sera notée z_B ...
On sait qu'une translation de vecteur $\vec{u}(u)$ a pour écriture complexe : $z' = z + u$.
On sait qu'une homothétie de rapport k et de centre $\Omega(\omega)$ a pour écriture complexe :
$z' - \omega = k(z - \omega)$; c'est-à-dire : $z' = kz + \omega(1-k)$.
On sait qu'une rotation d'angle θ et de centre $\Omega(\omega)$ a pour écriture complexe :
$z' - \omega = \mathrm{e}^{i\theta}(z-\omega)$; c'est-à-dire : $z' = \mathrm{e}^{i\theta} z + \omega(1-\mathrm{e}^{i\theta})$.
Les réflexions d'axe l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées ont respectivement pour écriture complexe : $z' = \overline{z}$ et $z' = -\overline{z}$.

Toutes les similitudes que nous connaissons ont une écriture complexe qui peut se présenter sous l'une des deux formes suivantes : $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$.

Théorème I.4.1
Une application du plan est une similitude plane si et seulement si elle admet une écriture complexe de la forme : $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démonstration

Soit $a \in \mathbb{C}^\star$ et $b \in \mathbb{C}$.

Démontrons que l'application s d'écriture complexe : $z' = az + b$; est une similitude.
On a : $z' = az + b \Longleftrightarrow z = \dfrac{1}{a}z' - \dfrac{b}{a}$; donc s est une transformation et sa transformation réciproque est la transformation s^{-1} d'écriture complexe : $z' = \dfrac{1}{a}z - \dfrac{b}{a}$. Soit $\mathrm{M}(z_\mathrm{M})$, $\mathrm{N}(z_\mathrm{N})$ deux points et $\mathrm{M'}(z'_\mathrm{M})$, $\mathrm{N'}(z'_\mathrm{N})$ leurs images respectives par s.
On a : $\mathrm{M'N'} = \left|z'_\mathrm{N} - z'_\mathrm{M}\right| = \left|(az_\mathrm{N} + b) - (az_\mathrm{M} + b)\right| = |a|\,|z_\mathrm{N} - z_\mathrm{M}| = |a|\,\mathrm{MN}$.
s est une transformation qui multiplie les distances par $|a|$, donc s est similitude de rapport $|a|$.

Démontrons que l'application s' d'écriture complexe : $z' = a\overline{z} + b$; est une similitude.
La réflexion par rapport à l'axe des abscisses, σ, est une similitude et son écriture complexe est : $z' = \overline{z}$.
On a donc : $\mathrm{s}' = \mathrm{s} \circ \sigma$. s' est la composée d'une similitude de rapport $|a|$ par une similitude de rapport 1, donc s' est une similitude de rapport $|a|$.

On remarque s et s' transforment les points O(0) et I(1) en O'(b) et I'($a+b$) ; donc a est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{O'I'}}$ et b est l'affixe du point O'.

Soit s une similitude.

Déterminons $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que : $z' = az+b$ ou $z' = a\overline{z}+b$; soit une écriture complexe de s.
Soit I et J les points d'affixes respectives 1 et i, O', I', J' les images respectives de O, I, J par s et a, b les affixes respectives de $\overrightarrow{\mathrm{O'I'}}$ et O'(O ≠ I, donc $\mathrm{O'} \neq \mathrm{I'}$, d'où $a \neq 0$). I' est donc le point d'affixe $a+b$.
Désignons par s_1 et s_2 les similitudes d'écritures complexes respectives : $z' = az+b$ et $z' = a\overline{z}+b$.
Pour $z=0$, puis pour $z=1$, on obtient dans les deux cas : $z' = b$ puis $z' = a+b$; on en déduit que :

$$s_1(\mathrm{O}) = s_2(\mathrm{O}) = \mathrm{O'} \qquad \text{et} \qquad s_1(\mathrm{I}) = s_2(\mathrm{I}) = \mathrm{I'}$$

Les triangles OIJ et O'I'J' sont images l'un de l'autre par la similitude s, ils sont donc semblables. Le triangle OIJ est rectangle et isocèle en O, donc le triangle O'I'J' est rectangle et isocèle en O'.

1er cas : OIJ et O'I'J' sont directement semblables

OIJ est direct donc O'I'J' est un triangle rectangle isocèle direct en O'. Donc : $z'_{\mathrm{J}} - z'_{\mathrm{O}} = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}(z'_{\mathrm{I}} - z'_{\mathrm{O}})$.
C'est-à-dire : $z'_{\mathrm{J}} = i(z'_{\mathrm{I}} - z'_{\mathrm{O}}) + z'_{\mathrm{O}} = az_{\mathrm{J}} + b$; d'où : $s_1(\mathrm{J}) = \mathrm{J'}$.
s et s_1 sont deux similitudes qui coïncident en O, I, J (O, I, J sont trois points non alignés) donc $s = s_1$.
s a donc pour écriture complexe : $z' = az+b$.

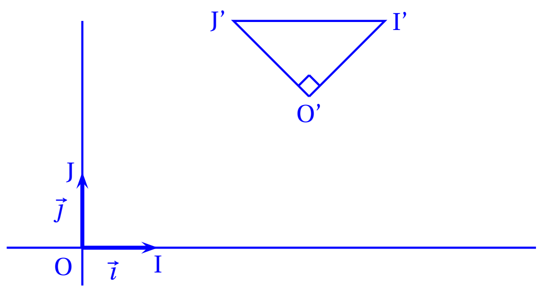


FIG. I.16 – OIJ et O'I'J' sont directement semblables

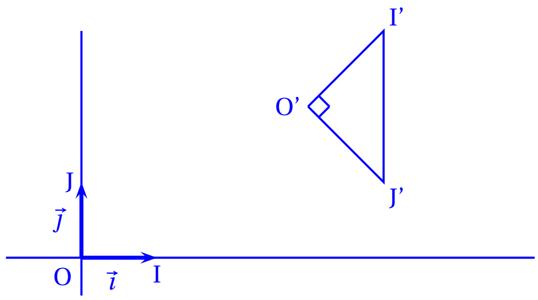


FIG. I.17 – OIJ et O'I'J' sont indirectement semblables

2e cas : OIJ et O'I'J' sont indirectement semblables

OIJ est direct donc O'I'J' est un triangle rectangle isocèle indirect en O'. Donc : $z'_{\mathrm{J}} - z'_{\mathrm{O}} = \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}(z'_{\mathrm{I}} - z'_{\mathrm{O}})$.
C'est-à-dire : $z'_{\mathrm{J}} = -i(z'_{\mathrm{I}} - z'_{\mathrm{O}}) + z'_{\mathrm{O}} = a\overline{z_{\mathrm{J}}} + b$; d'où : $s_2(\mathrm{J}) = \mathrm{J'}$.
s et s_2 sont deux similitudes qui coïncident en O, I, J (O, I, J sont trois points non alignés) donc $s = s_2$.
s a donc pour écriture complexe : $z' = a\overline{z}+b$. □

Remarque Soit s une similitude d'écriture complexe : $z' = az+b$ ou $z' = a\overline{z}+b$;
- le rapport de s est $|a|$;
- le nombre a est l'affixe de $\overrightarrow{\mathrm{O'I'}}$;
- le nombre b est l'affixe de O'.

Exemple La similitude d'écriture complexe : $z' = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\overline{z} - 4$; a pour rapport 2.

I.4.2 Similitudes directes, similitudes indirectes

DÉFINITIONS I.4.1

(1) Les similitudes qui ont une écriture complexe de la forme : $z' = az+b$; sont appelées *similitudes directes.*

(2) Les similitudes qui ont une écriture complexe de la forme : $z' = a\overline{z}+b$; sont appelées *similitudes indirectes.*

Remarque Toute similitude est donc soit directe soit indirecte.

THÉORÈME I.4.2

(1) Les similitudes directes conservent les angles orientés.

(2) Les similitudes indirecte changent un angle orienté en son opposé.

DémonstrationSoit $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

(1) Soit s la similitude d'écriture complexe : $z' = az + b$; et A, B, C, D quatre points tels que : $A \neq B$ et $C \neq D$.

Démontrons que : $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$.

On a : $\dfrac{z'_D - z'_C}{z'_B - z'_A} = \dfrac{(a\,z_D + b) - (a\,z_C + b)}{(a\,z_B + b) - (a\,z_A + b)} = \dfrac{a(z_D - z_C)}{a(z_B - z_A)} = \dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$; donc : $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right) = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$.

(2) Soit s' la similitude d'écriture complexe : $z' = a\overline{z} + b$.

La réflexion par rapport à l'axe des abscisses, σ, a écriture complexe est : $z' = \overline{z}$.

On a donc : $s' = s \circ \sigma$. s' est donc la composée d'une transformation qui change un angle orienté en son opposé par une transformation qui conserve les angles orientés, donc s' change les angles orientés en leur opposé. □

Par des arguments du type : « la composée de deux similitudes qui conservent les angles orientés est une similitude qui conserve les angles orientés » ; on déduit du théorème I.4.2 le corollaire suivant.

COROLLAIRE I.4.3

(1) La composée de deux similitudes directes est une similitude directe.

(2) La composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.

(3) La composée d'une similitudes directe et d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.

(4) La réciproque d'une similitude directe est une similitude directe.

(5) La réciproque d'une similitude indirecte est une similitude indirecte.

THÉORÈME I.4.4

Soit s une similitude qui a deux points invariants distincts : A et B.

(1) Si s est une similitude directe alors s est l'identité.

(2) Si s est une similitude indirecte alors s est la réflexion d'axe (AB).

Démonstration On a donc : $s(A) = A$ et $s(B) = B$; désignons par s_{AB} la réflexion d'axe (AB).

Si s est une similitude directe alors s a un écriture complexe du type : $z' = az + b$.

On a : $s(A) = A$ et $s(B) = B$; donc : $z'_A = z_A$ et $z'_B = z_B$.

On en déduit que : $z_B - z_A = z'_B - z'_A = (a\,z_B + b) - (a\,z_A + b) = a\,(z_B - z_A)$.

Or $A \neq B$, donc : $a = 1$. On en déduit que : $z_A = z'_A = a\,z_A + b = z_A + b$; donc : $b = 0$. s a pour écriture complexe : $z' = z$; donc $s = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$.

Si s est une similitude indirecte alors posons : $s' = s \circ s_{AB}$.

s' est la composée de deux similitudes indirectes donc s' est une similitude directe.

De plus : $s'(A) = s \circ s_{AB}(A) = s\big(s_{AB}(A)\big) = s(A) = A$; de même : $s'(B) = B$; s' est une similitude directe qui laisse invariants les points A et B, donc s' est l'identité. On a : $s \circ s_{AB} = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$; donc en composant à droite par s_{AB}, il vient : $s = s_{AB}$.

□

Remarque Cette propriété est parfois retenue sous la forme suivante :
« Une similitude qui laisse invariants deux points distincts A et B est soit l'identité, soit la réflexion d'axe (AB) ».

I.4.3 Propriétés de conservations, images de figures usuelles

THÉORÈME I.4.5

Les similitudes conservent les angles géométriques.

DémonstrationLes similitudes directes conservent les angles orientés, elles conservent donc également les angles géométriques. Les similitudes indirectes changent un angle orienté en son opposé, les similitudes indirectes conservent donc les angles géométriques. Par conséquent toute similitude, quelle soit directe ou indirecte, conserve les angles géométriques. □

THÉORÈME I.4.6

Les similitudes conservent le barycentre.

DémonstrationDémontrons que les similitudes directes conservent le barycentre.
Soit s une similitude directe d'écriture complexe : $s' = a\,z + b$; $\{(\mathrm{A}_1, \alpha_1), \cdots, (\mathrm{A}_n, \alpha_n)\}$ un système de points pondérés dont la somme des coefficients n'est pas nulle, G son barycentre et $\mathrm{A}'_1, \cdots, \mathrm{A}'_n, \mathrm{G}'$ les images respectives de $\mathrm{A}_1, \cdots, \mathrm{A}_n, \mathrm{G}$ par s.
Utilisons le théorème **??** page **??** pour démontrons que G' est le barycentre du système $\{(\mathrm{A}'_1, \alpha_1), \cdots, (\mathrm{A}'_n, \alpha_n)\}$. On a :

$$z'_{\mathrm{G}} = a\,z_{\mathrm{G}} + b = a\frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_{\mathrm{A}_k}}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} + b = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} a\alpha_k z_{\mathrm{A}_k}\right) + \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k b\right)}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k (a\,z_{\mathrm{A}_k} + b)\right)}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k} = \frac{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k z'_{\mathrm{A}_k}}{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}.$$

G' et le barycentre du système $\{(\mathrm{A}'_1, \alpha_1), \cdots, (\mathrm{A}'_n, \alpha_n)\}$ ont la même affixe, ils sont don égaux.
On démontre de même que les similitudes indirectes conservent le barycentre. □

Remarque En particulier les similitudes conservent le milieu des segments et le centre de gravité des triangles.

COROLLAIRE I.4.7

Soit s une similitude, A et B deux points distincts, A', B' les images respectives de A et B par s.
(1) L'image par s de la droite (AB) est la droite (A'B').
(2) L'image par s de la demi-droite [AB) est la demi-droite [A'B').
(3) L'image par s du segment [AB] est le segment [A'B'].

DémonstrationSoit s une similitude, A et B deux points distincts, A', B' les images respectives de A et B par s. Pour tous réel t et tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}} \iff \overrightarrow{\mathrm{MA}} + t\left(\overrightarrow{\mathrm{MB}} - \overrightarrow{\mathrm{MA}}\right) = \vec{0} \iff (1-t)\overrightarrow{\mathrm{MA}} + t\,\overrightarrow{\mathrm{MB}} \iff \mathrm{M} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}, 1-t), (\mathrm{B}, t)\}.$$

Soit M un point du plan. On a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M} \in (\mathrm{AB}) &\iff \exists^{1}\, t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{\mathrm{AM}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}\\
&\iff \exists\, t \in \mathbb{R},\ \mathrm{M} = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}, 1-t), (\mathrm{B}, t)\}\\
&\iff \exists\, t \in \mathbb{R},\ \mathrm{M}' = \mathrm{bar}\{(\mathrm{A}', 1-t), (\mathrm{B}', t)\} \quad \text{, car s et s}^{-1} \text{ conservent le barycentre}\\
&\iff \exists\, t \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{\mathrm{A'M'}} = t\,\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}\\
&\iff \mathrm{M}' \in (\mathrm{A'B'})
\end{aligned}$$

Donc s transforme (AB) en (A'B').
En remplaçant $\mathbb{R}$ par $\mathbb{R}^+$ puis par $[0\,;1]$, on démontre de même que s transforme [AB) en [A'B') et [AB] en [A'B']. □

Remarque On en déduit en particulier que les similitudes conservent l'alignement

THÉORÈME I.4.8

Les similitudes transforment les cercles en cercles.

DémonstrationSoit s une similitude de rapport k, $\mathscr{C}$ un cercle, Ω son centre, r son rayon et $\mathscr{C}'$, Ω' les images respectives de $\mathscr{C}$, Ω par s. Pour tout point M et son image M', on a :

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}' \in \mathscr{C}' &\iff \mathrm{M} \in \mathscr{C}\\
&\iff \Omega\mathrm{M} = r\\
&\iff \Omega'\mathrm{M}' = kr
\end{aligned}$$

[1] Le symbole « ∃ » signifie « il existe ».

Donc $\mathscr{C}'$ est le cercle de centre Ω' et de rayon kr. □

On déduit du corollaire I.4.7 et du théorème I.4.5 le théorème suivant.

THÉORÈME I.4.9

Les similitudes conservent le parallélisme[2] et l'orthogonalité.

Nous admettons les théorèmes suivants.

THÉORÈME I.4.10

Les similitudes de rapport k multiplient les longueurs par k et les aires par k^2.

THÉORÈME I.4.11

Les similitudes conservent le contact.

I.5 Classification des similitudes

I.5.1 Similitudes directes

Notations et vocabulaire Soit s une similitude directe d'écriture complexe : $z' = az + b$ (avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$) ; et : $a = k\mathrm{e}^{i\theta}$; l'écriture exponentielle de a. On dit alors que s est une similitude directe de rapport k et d'*angle* θ.

Exemples

1. Soit s l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z', telle que : $z' = (\sqrt{3} + i)z - 2 + i$. L'application s a une écriture complexe de la forme : $z' = az + b$; où a s'écrit sous forme exponentielle : $\sqrt{3} + i = 2\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$; donc s est une similitude directe de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

2. Les translations sont les similitudes directes de rapport 1 et d'angle nul.

3. Les rotations distinctes de l'identité sont les similitudes directes de rapport 1 et d'angle non nul.

4. Les homothéties de rapport k, avec $k > 0$, sont les similitudes directes de rapport k et d'angle nul.

5. Les homothéties de rapport k, avec $k < 0$, sont les similitudes directes de rapport $|k|$ et d'angle plat.

THÉORÈME I.5.1 PROPRIÉTÉ CARACTÉRISTIQUE DES SIMILITUDES DIRECTES DE RAPPORT k ET D'ANGLE θ

Soit $k \in \mathbb{R}^{+*}$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

Une application du plan dans lui-même est une similitude directe de rapport k et d'angle θ si et seulement si pour tous points distincts A, B et A', B' leurs images respectives par s, on a :

$\mathrm{A'B'} = k\,\mathrm{AB}$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}\right) \equiv \theta \pmod{2\pi}$.

Démonstration

Soit s une similitude directe de rapport k et d'angle θ

s a une écriture complexe de la forme : $z' = k\mathrm{e}^{i\theta}z + b$ avec $b \in \mathbb{C}$. Soit A, B deux points distincts et A', B' leurs images respectives.

On a : $\dfrac{z'_B - z'_A}{z_B - z_A} = \dfrac{(k\mathrm{e}^{i\theta} z_B + b) - (k\mathrm{e}^{i\theta} z_A + b)}{z_B - z_A} = k\mathrm{e}^{i\theta}$; donc : $\mathrm{A'B'} = k\,\mathrm{AB}$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}\right) \equiv \theta \pmod{2\pi}$.

[2] Conserver le parallélisme signifie que deux droites parallèles sont transformées en deux droites parallèles.

Soit s une application plane tel que pour tous points A, B : $A'B' = k\,AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \theta \ (2\pi)$

Désignons par b l'affixe du point O', image de l'origine O par s. Soit M(z) un point et M'(z') son image par s.

1^er cas : $z \neq 0$ On a : $O'M' = k\,OM$ et $\left(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}\right) \equiv \theta \ (2\pi)$; donc : $\dfrac{z'-b}{z} = k\mathrm{e}^{i\theta}$; on en déduit que : $z' = k\mathrm{e}^{i\theta}z + b$.

2^e cas : $z = 0$ On a M = O, donc M' = O' d'où : $z' = b = k\mathrm{e}^{i\theta} \times 0 + b = k\mathrm{e}^{i\theta}z + b$.

s a pour écriture complexe : $z' = k\mathrm{e}^{i\theta}z + b$; donc s est une similitude directe de rapport k et d'angle θ.

□

Remarque D'un point de vue complexe, la condition : $A'B' = k\,AB$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \theta \ (2\pi)$; dans le théorème I.5.1 s'exprime par : $z'_B - z'_A = k\mathrm{e}^{i\theta}(z_B - z_A)$.

THÉORÈME I.5.2

Soit s une similitude directe d'écriture complexe : $z' = az + b$ (avec $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$) ; k le rapport de s et θ un argument de a.

(1) Si $a = 1$, alors s est la translation de vecteur $\vec{u}(b)$.

(2) Si $a \neq 1$, alors s a unique point invariant, Ω, et en désignant par h l'homothétie de centre Ω et de rapport k, et par r la rotation d'angle θ et de centre Ω ; on a : $s = h \circ r = r \circ h$.

Démonstration

(1) Si $a = 1$, alors s a pour écriture complexe : $z' = z + b$; on reconnaît l'écriture complexe de la translation de vecteur $\vec{u}(b)$.

(2) Si $a \neq 1$, alors l'équation : $z = az + b$; a une unique solution : $\omega = \dfrac{b}{1-a}$.

h et r ont respectivement pour écriture complexes : $z' - \omega = k(z - \omega)$ et $z' - \omega = \mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega)$. On en déduit que $h \circ r$ et $r \circ h$ ont toutes deux pour écriture complexe :

$$z' - \omega = k\mathrm{e}^{i\theta}(z - \omega) \tag{I.3}$$

On a donc : (I.3)
$$\begin{aligned}
&\iff z' = a\left(z - \frac{b}{1-a}\right) + \frac{b}{1-a}\\
&\iff z' = az - \frac{ab}{1-a} + \frac{b}{1-a}\\
&\iff z' = az - b\left(-\frac{a}{1-a} + \frac{1}{1-a}\right)\\
&\iff z' = az + b
\end{aligned}$$

$h \circ r$ et $r \circ h$ ont la même écriture complexe que s, donc : $s = h \circ r = r \circ h$. □

Notations et vocabulaire

1. Lorsque $a \neq 1$, Ω est appelé *centre* de la similitude directe s.

2. Une similitude directe qui n'est pas une translation est déterminée par son centre, son rapport et son angle, appelés *éléments caractéristiques* de s

3. La décomposition : $s = h \circ r = r \circ h$ est appelée *forme réduite* de s.

Exercice I.5.1. ***Soit s l'application du plan dans lui-même, d'écriture complexe : $z' = (1-i)z - 2 + i$.***
Déterminer la nature et les éléments caractéristique de s.

Solution *On a :* $1 - i = \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}}$.

s a une écriture complexe de la forme : $z' = az + b$ *; où a est le nombre complexe de module $\sqrt{2}$ et d'argument $-\dfrac{\pi}{4}$, donc s est une similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.*

L'affixe du centre de s est solution de l'équation : $z = (1-i)z - 2 + i$ *; donc, après calcul, le centre de s est le point* $\Omega(-1-2i)$. □

Pour déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude direct s, d'écriture complexe : $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C} \setminus \{0; 1\}$ et $b \in \mathbb{C}$; on peut :

- Déterminer le module et un argument de a, on obtient ainsi le rapport et une angle de s.
- Résoudre l'équation d'inconnue z : $z = az + b$; la solution obtenue est l'affixe de s.

On déduit des théorèmes I.5.1 et **??** page **??** le théorème suivant.

THÉORÈME I.5.3

Soit s une similitude directe de centre $\Omega(\omega)$, de rapport k, d'angle θ et M(z), M'(z') deux points distincts de Ω. Les propositions suivantes sont équivalentes.

(1) $M' = s(M)$

(2) $z' - \omega = k e^{i\theta}(z - \omega)$

(3) $\Omega M' = k\,\Omega M$ et $\left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \theta \pmod{2\pi}$

Remarque La similitude s a donc pour écriture complexe : $z' - \omega = k e^{i\theta}(z - \omega)$.

Exercice I.5.2. ***Déterminer une écriture complexe de la similitude directe de centre $\Omega(1+2i)$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.***

Solution *s a pour écriture complexe : $z' - (1+2i) = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} \left(z - (1+2i)\right)$; c'est-à-dire, après calcul : $z' = (1-i)z - 2 + i$.* □

Exercice I.5.3. ***s est la similitude directe de centre $\Omega(\omega)$ de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Le point A(z_A) a pour image par s le point B(z_B). Démontrer que le triangle ΩAB est rectangle isocèle en A et orienté dans le sens direct.***

Solution

1^re^ méthode

D'après le théorème I.5.3, s a pour écriture complexe :

$z_B - \omega = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}(z_A - \omega) = (1+i)(z_A - \omega)$.

Donc : $z_B - z_A = (z_B - \omega) - (z_A - \omega) = (1+i)(z_A - \omega) - (z_A - \omega) = i(z_A - \omega)$ *; d'où :* $\omega - z_A = i(z_B - z_A)$.

On en déduit que, d'après le théorème **??** *:* $A\Omega = AB$ *et* $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$.

Le triangle ΩAB *est donc rectangle isocèle en A et orienté dans le sens direct.*

2^e^ méthode *On a :* $\left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}\right) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$ *et* $\frac{\pi}{4} \in]0, \pi[$ *; donc le triangle* ΩAB *est orienté dans le sens direct.*

D'après le théorème des sinus, on a : $\dfrac{\sin\widehat{\Omega AB}}{\Omega B} = \dfrac{\sin\widehat{A\Omega B}}{AB}$.

On en déduit que : $\sin\widehat{\Omega AB} = \dfrac{\sin\widehat{A\Omega B}}{AB}\Omega B = \dfrac{\sin\frac{\pi}{4}}{AB}\sqrt{2}AB = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \sqrt{2} = 1$ *; on a donc :* $\widehat{\Omega AB} = \frac{\pi}{2}$ *et* $\widehat{A\Omega B} = \frac{\pi}{4}$ *;*

ainsi le triangle ΩAB *est rectangle isocèle en A et orienté dans le sens direct.*

□

THÉORÈME I.5.4

(1) La composée d'une similitude directe de rapport k et d'angle θ par une similitude directe de rapport k' et d'angle θ' est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\theta + \theta'$.

(2) La réciproque d'une similitude directe de rapport k et d'angle θ est une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.

DémonstrationSoit s une similitude directe de rapport k et d'angle θ et s' une similitude directe de rapport k' et d'angle θ'. Elles ont respectivement des écritures complexes de la forme : $z' = k e^{i\theta} z + b$ et $z' = k' e^{i\theta'} z + b'$.

(1) $s' \circ s$ a donc pour écriture complexe : $z' = k' e^{i\theta'} \left(k e^{i\theta} z + b\right) + b'$; c'est-à-dire :

$z' = kk' e^{i(\theta+\theta')} z + b' + k' e^{i\theta'} b$.

On reconnaît l'écriture complexe d'une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\theta + \theta'$.

(2) On a : $z' = k e^{i\theta} z + b \iff z = \frac{1}{k} e^{-i\theta} z' - \frac{1}{k} e^{-i\theta} b$; donc s^{-1} a pour écriture complexe :

$z' = \frac{1}{k} e^{-i\theta} z - \frac{1}{k} e^{-i\theta} b$;

On reconnaît l'écriture complexe d'une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$. □

Exercice I.5.4. ***Qu'obtient-on en composant deux symétries centrales ?***

Solution *Une symétrie centrale est une similitude de rapport* 1 *et d'angle* π*, lorsque l'on en compose deux on obtient donc une similitude directe de rapport* 1 *et d'angle nul, c'est-à-dire une translation.* □

Exercice I.5.5. ***Soit r le quart de tour direct qui transforme O(0) en A(2) et h l'homothétie de rapport −2 qui transforme A en B(−4+2i) ; on pose :*** $\mathrm{f} = \mathrm{h} \circ \mathrm{r}$***. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.***

Solution *f est la composée d'une similitude directe de rapport* 1 *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *par une similitude directe de rapport* 2 *et d'angle* π *; donc f est une similitude directe de rapport* 2 *et d'angle* $-\frac{\pi}{2}$*. La similitude f a donc une écriture complexe de la forme :* $z' = -2i\,z + b$ *avec* $b \in \mathbb{C}$*.*

De plus : $\mathrm{f(O)} = \mathrm{h}\big(\mathrm{r(O)}\big) = \mathrm{h(A)} = \mathrm{B}$ *; donc pour* $z = 0$*, on a :* $z' = -4+2i$*, on en déduit que :* $b = -4+2i$*. La similitude f a donc pour écriture complexe :* $z' = -2i\,z - 4 + 2i$*. L'affixe du centre de f est solution de l'équation :*

$$z = -2i\,z - 4 + 2i \tag{I.4}$$

On a : I.4 $\iff$ $(1+2i)z = 2i(1+2i)$ $\iff$ $z = 2i$.
f est la similitude directe de rapport 2*, d'angle* $-\frac{\pi}{2}$ *et de centre* $\Omega(2i)$. □

I.5.2 Isométries

I.5.2.a Introduction

Les isométries sont les similitudes de rapport 1. Les similitudes directes de rapport 1 sont appelées *déplacements*. Les similitudes indirectes de rapport 1 sont appelées *antidéplacements*.

Les déplacements sont donc les isométries qui conservent les angles orientés et les antidéplacements sont les isométries qui changent les angles orientés en leurs opposés.
Toute isométrie est soit un déplacement soit un antidéplacement.

Exemples

1. Les translations et les rotations sont des déplacements.

2. Les réflexions sont des antidéplacements.

Remarques

1. La composée de deux déplacements est un déplacement et la réciproque d'un déplacement est un déplacement. L'ensemble des déplacements est donc un groupe de transformations.

2. La composée de deux antidéplacements est un déplacement et la réciproque d'un antidéplacement est un antidéplacement. L'ensemble des antidéplacements n'est donc pas un groupe de transformations.

3. La composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement.

I.5.2.b Déplacements

D'après l'étude précédente les déplacements sont les transformations d'écriture complexe :

$$z' = \mathrm{e}^{i\theta} z + b \tag{I.5}$$

avec $\theta \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{C}$.

1^{er} cas : $e^{i\theta} = 1$

Le déplacement est la translation de vecteur $\vec{u}(b)$.

2^{e} cas : $e^{i\theta} \neq 1$

Le déplacement est une rotation d'angle θ.
On en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME I.5.5

Les seuls déplacements sont les translations et les rotations.

I.5.2.c Antidéplacements

Écriture complexe d'une réflexion d'axe (AB)

Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B. Considérons l'application σ d'écriture complexe :

$$z' - z_A = \frac{z_B - z_A}{\overline{z_B - z_A}}\left(\overline{z - z_A}\right) \tag{I.6}$$

De par son écriture complexe σ est une similitude indirecte. De plus,
pour $z = z_A$, on a : $z' = \frac{z_B - z_A}{\overline{z_B - z_A}}\left(\overline{z_A - z_A}\right) + z_A = z_A$;
pour $z = z_B$, on a : $z' = \frac{z_B - z_A}{\overline{z_B - z_A}}\left(\overline{z_B - z_A}\right) + z_A = (z_B - z_A) + z_A = z_B$.
A et B sont deux points fixes distincts de la similitude indirecte σ donc, d'après le théorème I.4.4 page 20, σ est la réflexion d'axe (AB).

Exercice I.5.6. ***On considère les points $A(-1)$ et $B(1+i)$. Déterminer une écriture complexe de la réflexion, d'axe (AB).***

Solution *Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = 2 + i$;*
donc : $\frac{z_B - z_A}{\overline{z_B - z_A}} = \frac{2+i}{2-i} = \frac{(2+i)^2}{|2-i|^2} = \frac{3+4i}{5}$.
Soit σ l'application d'écriture complexe :

$$z' - z_A = \frac{z_B - z_A}{\overline{z_B - z_A}}\left(\overline{z - z_A}\right)$$

c'est-à-dire, après calcul :

$$z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\overline{z} - \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i.$$

De par son écriture complexe σ est une similitude indirecte. De plus,
pour $z = -1$, on a : $z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\left(\overline{-1}\right) - \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i = -1$; donc A est un point fixe de σ ;
pour $z = 1 + i$, on a : $z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\overline{1+i} - \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i = \frac{7}{5} + \frac{1}{5}i - \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i = 1 + i$; donc B est un point fixe de σ ;
A et B sont deux points fixes distincts de la similitude indirecte σ, donc σ est la réflexion d'axe (AB).
□

Exercice I.5.7. ***Soit σ l'application plane d'écriture complexe : $z' = \left(\frac{5}{13} + \frac{12}{13}i\right)\overline{z} - \frac{12}{13} + \frac{18}{13}i$.***

1. Justifier que σ est un antidéplacement.

2. Déterminer $\sigma \circ \sigma$.

3. On considère les points $A(i)$ et $B(-1-4i)$. Déterminer les images de A et B par σ et en déduire deux points fixes

de σ.

4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de σ.

Solution 1. *De par son écriture complexe σ est une similitude indirecte.*

De plus : $\left|\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i\right| = \sqrt{\frac{25}{169}+\frac{144}{169}} = 1$;

donc σ est une similitude indirecte de rapport 1, c'est-à-dire un antidéplacement.

2. $\sigma\circ\sigma$ *a pour écriture complexe :* $z' = \left(\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i\right)\left[\overline{\left(\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i\right)\overline{z}-\frac{12}{13}+\frac{18}{13}i}\right]-\frac{12}{13}+\frac{18}{13}i$;

c'est-à-dire : $z' = \left|\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i\right|^2 z - \frac{6}{169}(5+12i)(2+3i)-\frac{12}{13}+\frac{18}{13}i$.

On a : $\left|\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i\right|^2 = 1$ *et* $(5+12i)(2+3i) = -26+39i$ *; donc $\sigma\circ\sigma$ a pour écriture complexe :* $z' = z$;

on en déduit que : $\sigma\circ\sigma = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$.

3. *Pour* $z = i$ *; on a :*

$$z' = \left(\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i\right)\overline{i}-\frac{12}{13}+\frac{18}{13}i$$
$$= -\frac{5}{13}i+\frac{12}{13}-\frac{12}{13}+\frac{18}{13}i = i \ ;$$

donc : $\sigma(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$.

Pour $z = -1-4i$ *; on a :*

$$z' = \left(\frac{5}{13}+\frac{12}{13}i\right)\left(\overline{-1-4i}\right)-\frac{12}{13}+\frac{18}{13}i$$
$$= \frac{1}{13}(-5-48-12i+20i-12+18i) = -5+2i \ ;$$

donc $\sigma(\mathrm{B})$ *est le point* $B'(-5+2i)$.

4. *On a :* $\sigma(\mathrm{B}') = \sigma\circ\sigma(\mathrm{B}) = \mathrm{B}$. *Soit C le milieu du segment [BB'] ; C est donc le point d'affixe :* $-3-i$.

Les similitudes conservent le barycentre donc $\sigma(\mathrm{C})$ *est le milieu du segment [B'B] ; C est donc un autre point fixe de σ.*

σ est une similitude indirecte qui laisse invariants les points A et C ; σ est donc la réflexion d'axe (AC). $\square$

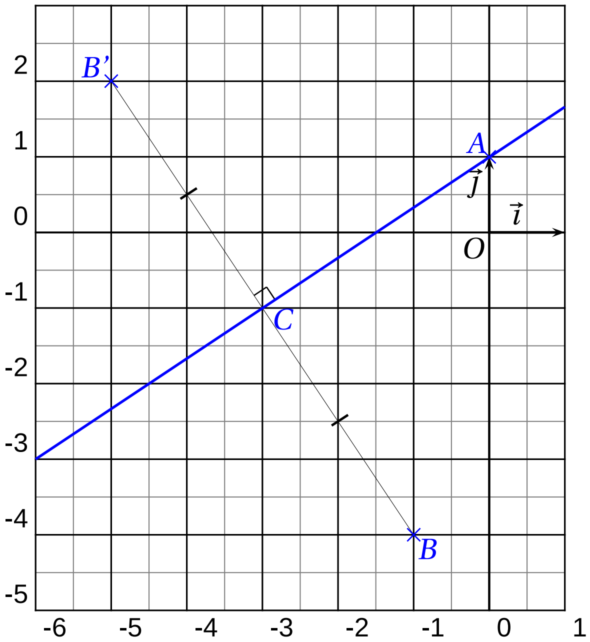


FIG. *I.18 – Réflexion d'axe (AC)*

Plus généralement, pour décomposer une une similitude indirecte, f, déterminée par une écriture complexe, il est souvent avantageux de déterminer $f\circ f$.

Un autre point de vue

Soit σ une symétrie d'axe δ, $\vec{u}(\mathrm{e}^{i\theta})$ un vecteur directeur unitaire de δ, O' le symétrique de O par rapport à δ, H le milieu du segment [OO'] G l'image de H par la translation de vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}(i\,\mathrm{e}^{i\theta})$ le vecteur unitaire normal à δ tel que le repère orthonormé $(\mathrm{H};\vec{u},\vec{v})$ soit direct.
Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$ et $\vec{u}$ sont orthogonaux donc les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OO}'}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Il existe donc un réel b tels que : $\overrightarrow{\mathrm{OO}'} = b\vec{v}$; on en déduit que les points O' et H ont respectivement pour affixe : $i\,b\mathrm{e}^{i\theta}$ et $i\,\frac{b}{2}\mathrm{e}^{i\theta}$.
D'après l'équation I.6, σ a une écriture complexe de la forme : $z' = \dfrac{z_{\mathrm{G}} - z_{\mathrm{H}}}{\overline{z_{\mathrm{G}} - z_{\mathrm{H}}}}\overline{z} + \beta$ avec $\beta \in \mathbb{C}$.

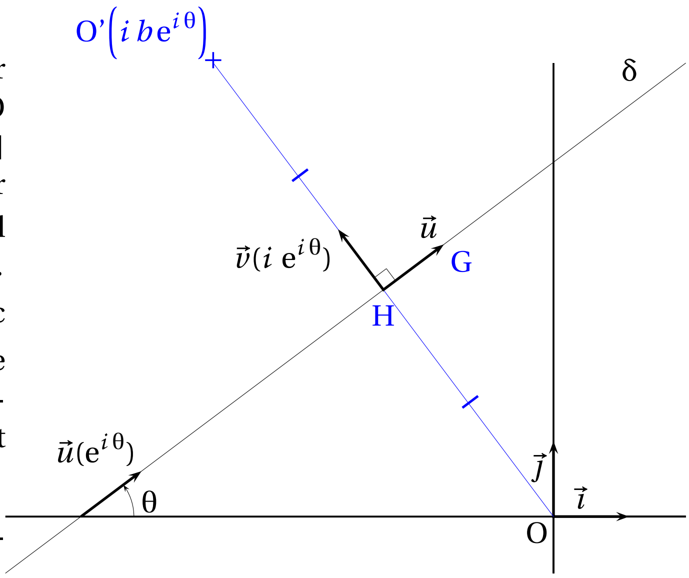


FIG. I.19 – Réflexion d'axe δ

Or $z_{\mathrm{G}} - z_{\mathrm{H}}$ est l'affixe de $\vec{u}$ donc : $\dfrac{z_{\mathrm{G}} - z_{\mathrm{H}}}{\overline{z_{\mathrm{G}} - z_{\mathrm{H}}}} = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\overline{\mathrm{e}^{i\theta}}} = \dfrac{\mathrm{e}^{i\theta}}{\mathrm{e}^{-i\theta}} = \mathrm{e}^{2i\theta}$.
On a : $\sigma(\mathrm{O}) = \mathrm{O}'$; donc, pour $z = 0$, on obtient : $\beta = z' = i\,b\mathrm{e}^{i\theta}$.
On en déduit que σ a pour écriture complexe :

$$z' = \mathrm{e}^{2i\theta}\overline{z} + i\,b\mathrm{e}^{i\theta}.$$

Symétrie glissée

Reprenons les notations ci-dessus, considérons $\vec{w}$ un vecteur directeur de δ et t la translation de vecteur $\vec{w}$.
Il existe donc un réel non nul a tel que : $\vec{w} = a\vec{u}$; on en déduit que $\vec{w}$ a pour affixe : $a\mathrm{e}^{i\theta}$; et que t a pour écriture complexe : $z' = z + a\mathrm{e}^{i\theta}$.
t ∘ σ a pour écriture complexe : $z' = \mathrm{e}^{2i\theta}\overline{z} + i\,b\mathrm{e}^{i\theta} + a\mathrm{e}^{i\theta}$;
c'est-à-dire : $z' = \mathrm{e}^{2i\theta}\overline{z} + \mathrm{e}^{i\theta}(a + i\,b)$
σ ∘ t a pour écriture complexe : $z' = \mathrm{e}^{2i\theta}\left(\overline{z + a\mathrm{e}^{i\theta}}\right) + i\,b\mathrm{e}^{i\theta}$;
c'est-à-dire : $z' = \mathrm{e}^{2i\theta}\overline{z} + \mathrm{e}^{i\theta}(a + i\,b)$
En posant : s = t ∘ σ ; il vient : s = t ∘ σ = t ∘ σ.

DÉFINITION I.5.1
Soit δ une droite et $\vec{w}$ un vecteur directeur de δ.
On appelle *symétrie glissée* d'axe δ et de vecteur $\vec{w}$ la composée de la réflexion d'axe δ pal la translation de vecteur $\vec{w}$.

Remarques

1. La décomposition : s = t ∘ σ = t ∘ σ ; est appelée forme réduite de la symétrie glissée.
2. s ∘ s = (t ∘ σ) ∘ (σ ∘ t) = t ∘ t
3. Toute symétrie glissée est un antidéplacement.
4. Une symétrie glissée n'a aucun point invariant, mais son axe est globalement invariant.
5. Soit M un point, M' son image. Le milieu du segment [MM'] est un point de l'axe de la symétrie glissée.
6. En particulier, pour $z = 0$, on a : $z' = \mathrm{e}^{i\theta}(a + i\,b)$; donc le point d'affixe $\frac{1}{2}\mathrm{e}^{i\theta}(a + i\,b)$ est un

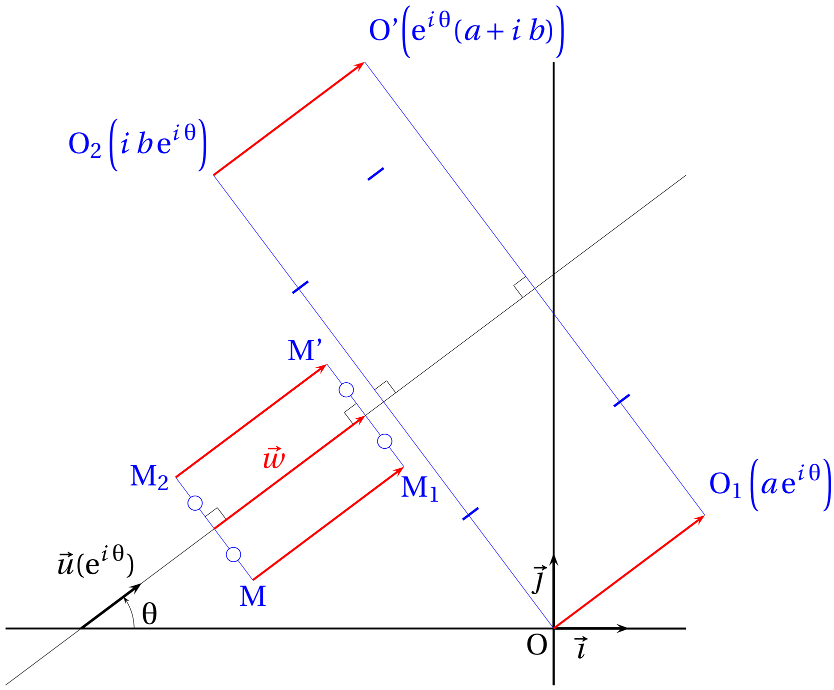


FIG. I.20 – Symétrie glissée d'axe δ et de vecteur $\vec{w}$

point de l'axe de la symétrie glissée.

Cas général

Soit s un antidéplacement. s est une similitude indirecte de rapport 1, elle admet donc une écriture complexe de la forme : $z' = e^{2i\theta}z + \beta$. Écrivons $\beta e^{-i\theta}$ sous forme algébrique, nous obtenons : $\beta e^{-i\theta} = a + ib$; d'où il vient : $\beta = e^{i\theta}(a+ib)$; s a donc pour écriture complexe : $z' = e^{2i\theta}\overline{z} + e^{i\theta}(a+ib)$.

1^er^ cas : $a = 0$ s a pour écriture complexe : $z' = e^{2i\theta}\overline{z} + ib e^{i\theta}$; donc s est la réflexion d'axe δ, où δ est la droite de vecteur directeur $\vec{u}(e^{i\theta})$ passant par H$\left(i\dfrac{b}{2}e^{i\theta}\right)$

2^e^ cas : $a \neq 0$ s a pour écriture complexe : $z' = e^{2i\theta}\overline{z} + e^{i\theta}(a+ib)$.
s est donc la symétrie glissée d'axe δ et de vecteur $\vec{w}\left(a e^{i\theta}\right)$.

On déduit de cette étude le théorème suivant.

THÉORÈME I.5.6

Tout antidéplacement est soit une réflexion soit une symétrie glissée.

Exercice I.5.8. ***Déterminer la nature et les élément caractéristiques de l'application plane, s, d'écriture complexe : $z' = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\overline{z} + 2i$.***

Solution *s a une écriture complexe de la forme : $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$; donc s est une similitude indirecte.* s ∘ s *a pour écriture complexe :* $z' = \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\overline{\left(\frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3})\overline{z}+2i\right)} + 2i$ *; soit :*
$z' = \frac{1}{4}(-1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})z + 2i\left(1 - \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)$ *; soit finalement :* $z' = z + \sqrt{3} + 3i$.

$\mathrm{s}\circ\mathrm{s}$ *est donc la translation de vecteur* $\vec{v}\left(\sqrt{3}+3i\right)$. *soit t la translation de vecteur :* $\vec{w}=\frac{1}{2}\vec{v}$ *;* $\mathrm{t}\circ\mathrm{t}$ *est la translation de vecteur* $\vec{v}$*, donc :* $\mathrm{t}\circ\mathrm{t}=\mathrm{s}\circ\mathrm{s}$. $\vec{w}$ *a pour affixe :* $\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i=\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ *;*
t a donc pour écriture complexe : $z'=z+\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ *; et* t^{-1} *a pour écriture complexe :* $z'=z-\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.
s a pour écriture complexe : $z'=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\overline{z}+2i$. *Posons :* $\sigma=\mathrm{s}\circ\mathrm{t}^{-1}$.
σ *est la composée d'une similitude directe par une similitude indirecte, donc* σ *est une similitude indirecte.*
σ *a pour écriture complexe :* $z'=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\overline{\left(z-\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\right)}+2i$ *; c'est-à-dire :* $z'=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\overline{z}-\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}+2i$.
$\mathrm{t}^{-1}\circ\mathrm{s}$ *a pour écriture complexe :* $z'=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\overline{z}+2i-\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.
On en déduit que : $\sigma=\mathrm{s}\circ\mathrm{t}^{-1}=\mathrm{t}^{-1}\circ\mathrm{s}$ *; d'où :* $\sigma\circ\sigma=(\mathrm{t}^{-1}\circ\mathrm{s})\circ(\mathrm{s}\circ\mathrm{t}^{-1})=\mathrm{t}^{-1}\circ(\mathrm{s}\circ\mathrm{s})\circ\mathrm{t}^{-1}=\mathrm{t}^{-1}\circ\mathrm{t}\circ\mathrm{t}\circ\mathrm{t}^{-1}=\mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$.
Soit A le point d'affixe i. *Déterminons l'image de A par* σ. *Pour* $z=i$*, on a :*
$z'=-i\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2i=i$ *; donc A est un point fixe de* σ.
Soit B le point d'affixe $-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$. *Déterminons l'image de B par* σ. *Pour* $z=\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}}$*, on a :*
$z'=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\overline{\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}}}-\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}+2i=\mathrm{e}^{-i\frac{3\pi}{6}}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}i+2i=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i$ *; donc B est un point fixe de* σ.
σ *est une similitude indirecte qui laisse fixes les points A et B, donc* σ *est la réflexion d'axe (AB).* □

I.5.3 Similitudes indirectes (complément)

Le cas des similitudes indirectes de rapport 1, c'est-à-dire des antidéplacements a été traité au paragraphe I.5.2.c. Nous ne traiterons donc ici que les cas des similitudes indirectes dont le rapport est différent de 1.
Soit s une similitude indirecte d'écriture complexe : $z'=k\mathrm{e}^{i2\theta}\overline{z}+\beta$ avec $k\in]0;1[\cup]1;+\infty[$.
$\mathrm{s}\circ\mathrm{s}$ a pour écriture complexe : $z'=k\mathrm{e}^{i2\theta}\overline{\left(k\mathrm{e}^{i2\theta}\overline{z}+\beta\right)}+\beta$; c'est-à-dire : $z'=k^2z+k\mathrm{e}^{i2\theta}\overline{\beta}+\beta$.
On reconnaît l'écriture complexe d'une homothétie de rapport k^2 et dont l'affixe du centre, Ω, est solution de l'équation : $z=k^2z+k\mathrm{e}^{i2\theta}\overline{\beta}+\beta$; on en déduit après calcul que Ω est le point d'affixe : $\omega=\frac{k\mathrm{e}^{i2\theta}\overline{\beta}+\beta}{1-k^2}$. Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport k. $\mathrm{h}\circ\mathrm{h}$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport k^2, donc : $\mathrm{h}\circ\mathrm{h}=\mathrm{s}\circ\mathrm{s}$; de plus h et h^{-1} ont respectivement pour écritures complexes : $z'-\omega=k(z-\omega)$ et $z'-\omega=\frac{1}{k}(z-\omega)$.
Soit Ω' l'image de Ω par s ; on a : $\mathrm{s}(\Omega')=\mathrm{s}\circ\mathrm{s}(\Omega)=\mathrm{h}\circ\mathrm{h}(\Omega)=\Omega$. s transforme $[\Omega\Omega']$ en $[\Omega'\Omega]$ et multiplie les distances par k donc : $\Omega\Omega'=k\,\Omega\Omega'$; d'où : $(1-k)\Omega\Omega'=0$; or $k\neq1$ donc : $\Omega=\Omega'$. Ω est un point fixe de s. On en déduit que s a pour écriture complexe : $z'-\omega=k\mathrm{e}^{i2\theta}\overline{(z-\omega)}$.

Posons : $\sigma=\mathrm{s}\circ\mathrm{h}^{-1}$. σ est la composée d'une similitude directe de rapport $\frac{1}{k}$ par une similitude indirecte de rapport k, donc σ est une similitude indirecte de rapport 1, c'est-à-dire une réflexion où une symétrie glissée. Mais une symétrie glissée n'a pas de point invariant et : $\sigma(\Omega)=\mathrm{s}\left(\mathrm{h}^{-1}(\Omega)\right)=\Omega$; donc σ est une réflexion dont l'axe passe par Ω. σ et $\mathrm{h}^{-1}\circ\mathrm{s}$ ont toute deux pour écriture complexe : $z'-\omega=k\mathrm{e}^{i2\theta}\overline{(z-\omega)}$; donc : $\sigma=\mathrm{s}\circ\mathrm{h}^{-1}=\mathrm{h}^{-1}\circ\mathrm{s}$. On en déduit la décomposition : $\mathrm{s}=\mathrm{h}\circ\sigma=\sigma\circ\mathrm{h}$. De plus, d'après l'étude menée au paragraphe I.4.1 on sait que l'axe de la réflexion σ est dirigé par le vecteur $\vec{u}\left(\mathrm{e}^{i\theta}\right)$

	similitude directe	similitude indirecte
$\boldsymbol{k=1}$	s est une translation de vecteur $\vec{\boldsymbol{u}}$ ou une rotation de centre $\boldsymbol{\Omega}$ et d'angle $\boldsymbol{\theta}$	s est une réflexion d'axe $\boldsymbol{\delta}$ ou une symétrie glissée d'axe $\boldsymbol{\delta}$ et de vecteur $\vec{\boldsymbol{w}}$
$\boldsymbol{k\neq 1}$	s est une similitude directe de rapport $\boldsymbol{k}$, d'angle $\boldsymbol{\theta}$ et de centre $\boldsymbol{\Omega}$	s est une similitude indirecte de rapport $\boldsymbol{k}$, de centre $\boldsymbol{\Omega}$ et d'axe $\boldsymbol{\delta}$

TAB. I.1 – Éléments caractéristiques d'une similitude

On retiendra donc que pour toute similitude indirecte, s, d'écriture complexe : $z' = k\mathrm{e}^{i\,2\theta}\overline{z}+\beta$ avec $k\in]0;1[\cup]1;+\infty[$; il existe une homothétie, h, de rapport k et une réflexion σ dont l'axe δ est la droite passant par le centre Ω de h et dirigée par $\vec{u}\left(\mathrm{e}^{i\,\theta}\right)$ tels que : $\mathrm{s}=\mathrm{h}\circ\sigma=\sigma\circ\mathrm{h}$.
s est la similitude indirecte de rapport k et d'axe δ.

Remarques

1. La décomposition : $\mathrm{s}=\mathrm{h}\circ\sigma=\sigma\circ\mathrm{h}$; est appelée forme réduite de s.

2. Ω est l'unique point fixe de s. En effet pour tout point fixe, M, de s ; s transforme $[\Omega\mathrm{M}]$ en $[\Omega\mathrm{M}]$ et multiplie les distances par k d'où : $(1-k)\Omega\mathrm{M}=0$; on a donc : $\mathrm{M}=\Omega$.

I.6 Déterminations d'une similitude

I.6.1 Similitude déterminée par ses éléments caractéristiques

Comme nous l'avons vu tout au long de ce chapitre, une similitude est déterminée par ses éléments caractéristiques. Le tableau I.1 précise ces éléments dans les différents cas. k désigne le rapport de la similitude s.

I.6.2 Similitude déterminée par une écriture complexe

Une similitude s peut également être déterminée par une écriture complexe. Dans ce paragraphe, lorsque s est une similitude directe, son écriture complexe sera donnée sous la forme : $z' = az+b$; et lorsque s est une similitude indirecte, son écriture complexe sera donnée sous la forme : $z' = a\overline{z}+b$.
Dans les études précédentes, les écritures complexes de similitudes directes ont parfois été données sous la forme : $z' = k\mathrm{e}^{i\,\theta}z+b$ on passe de l'une à l'autre par les formules usuelles de conversion entre forme algébrique et forme exponentielle du nombre complexe a.
Dans les études précédentes, les écritures complexes de similitudes indirectes ont parfois été données sous la forme : $z' = k\mathrm{e}^{i\,2\theta}z+\beta$ on passe de l'une à l'autre par les formules : $k=|a|$; $\mathrm{e}^{i\,2\theta}=\dfrac{a}{|a|}$ et $\beta=b$; de plus $\mathrm{e}^{i\,\theta}$ est une racine carrée de $\mathrm{e}^{i\,2\theta}$. Lorsque s est une similitude indirecte, un calcul immédiat montre $\mathrm{s}\circ\mathrm{s}$ a pour écriture complexe : $z' = |a|^2z+a\overline{b}+b$.

Le tableau I.2 résume les résultats obtenus dans les paragraphes I.5.1 à I.5.3.

	s est une similitude directe d'écriture complexe : $z' = az + b$	**s est une similitude indirecte d'écriture complexe : $z' = a\overline{z} + b$**
$\|a\| = 1$	**Si $a = 1$** alors s est une translation de vecteur $\vec{u}(b)$. **Si $a \neq 1$** alors une rotation de centre $\Omega(\frac{b}{1-a})$ et d'angle un argument de a	**Si $a\overline{b} + b = 0$** alors s est une réflexion d'axe δ où δ est la droite passant par le point d'affixe $\frac{b}{2}$ et dirigée par un vecteur d'affixe une racine carrée de $\frac{a}{\|a\|}$. **Si $a\overline{b} + b \neq 0$** alors s est une symétrie glissée d'axe δ et de vecteur $\vec{w}(a\overline{b} + b)$ où δ est la droite passant par le point d'affixe $\frac{b}{2}$ et dirigée par un vecteur d'affixe une racine carrée de $\frac{a}{\|a\|}$.
$\|a\| \neq 1$	s est une similitude directe de rapport $\|a\|$, d'angle un argument de a et de centre $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$	s est une similitude indirecte de rapport $\|a\|$, de centre $\Omega\left(\frac{a\overline{b}+b}{1-\|a\|^2}\right)$ et d'axe δ où δ est la droite passant par Ω et dirigée par un vecteur d'affixe une racine carrée de $\frac{a}{\|a\|}$

TAB. I.2 – Éléments caractéristiques déduits de l'écriture complexe

I.6.3 Similitude déterminée par deux points, leurs images et une orientation

THÉORÈME I.6.1
Soit A, B, A', B' quatre points tels que : $A \neq B$ et $A' \neq B'$.
(1) Il existe une unique similitude directe s telle que : $s(A) = A'$ et $s(B) = B'$.
(2) Il existe une unique similitude indirecte s' telle que : $s'(A) = A'$ et $s'(B) = B'$.

Démonstration

Existence de s

Il suffit de considérer la similitude directe s d'écriture complexe :

$$z' = \frac{z'_B - z'_A}{z_B - z_A}(z - z_A) + z'_A$$

Pour $z = z_A$ et $z = z_B$, on obtient respectivement : $z' = z'_A$ et $z' = z'_B$; d'où : $s'(A) = A'$ et $s'(B) = B'$.

Unicité de s

Soit s" une similitude directe qui transforme A en A' et B en B'. $s^{-1} \circ s''$ est une similitude directe qui laisse invariants A et B, d'où : $s^{-1} \circ s'' = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$; en composant membre à membre cette égalité à gauche par s, on en déduit que : $s'' = s$.

Existence de s'

Soit s_{AB} la réflexion d'axe (AB), posons : $s' = s \circ s_{AB}$. s' est la composée d'une similitude indirecte par une similitude directe donc une similitude indirecte. De plus : $s'(A) = s(s_{AB}(A)) = s(A) = A'$ et $s'(B) = s(s_{AB}(B)) = s(B) = B'$.

Unicité de s'

Soit s" une similitude indirecte qui transforme A en A' et B en B'. $s^{-1} \circ s''$ est une similitude directe qui laisse invariants A et B, d'où : $s^{-1} \circ s'' = \mathrm{Id}_{\mathscr{P}}$; en composant membre à membre cette égalité à gauche par s', on en déduit que : $s'' = s$. □

Exercice I.6.1. ***Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).***
On considère les ponts A, B, A' et B' d'affixes respectives :

$$z_A = \sqrt{3} + i\left(\sqrt{3} - 1\right); \quad z'_A = \left(\sqrt{3} - 2\right) + i\left(\sqrt{3} + 1\right); \quad z_B = \left(2 + \sqrt{3}\right) + i\left(3 - \sqrt{3}\right); \quad z'_B = \left(2 - \sqrt{3}\right) + i\left(3 + \sqrt{3}\right).$$

1. Justifier l'existence et l'unicité d'une similitude directe s et d'une similitude indirecte s' qui transforment A en A' et B en B'.

2. Déterminer des écritures complexes de s et s'.

3. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de s et de s'.

Solution 1. *On sait qu'une similitude directe (ou indirecte) est déterminée par deux points distincts et leurs images. On a :* $A \neq B$ *et* $A' \neq B'$ *; donc, par théorème :*

$$\boxed{\textbf{Il existe une unique similitude directe s et une unique similitude indirecte s' qui transforment A en A' et B en B'.}}$$

2. *s est une similitude directe, elle a donc une écriture complexe de la forme :* $z' = az + b$.
De plus : $s(A) = A'$ *et* $s(B) = B'$ *; donc :* $z'_A = az_A + b$ *et* $z'_B = az_B + b$ *; d'où :* $z'_B - z'_A = a(z_B - z_A)$ *;*

on en déduit que :
$$\begin{aligned}
a &= \frac{z'_B - z'_A}{z_B - z_A} \\
&= \frac{\left(2 - \sqrt{3}\right) + i\left(3 + \sqrt{3}\right) - \left(\sqrt{3} - 2\right) - i\left(\sqrt{3} + 1\right)}{\left(2 + \sqrt{3}\right) + i\left(3 - \sqrt{3}\right) - \sqrt{3} - i\left(\sqrt{3} - 1\right)} \\
&= \frac{4 - 2\sqrt{3} + 2i}{2 + i\left(4 - 2\sqrt{3}\right)} \\
&= \frac{\left(4 - 2\sqrt{3} + 2i\right)\left(2 - i\left(4 - 2\sqrt{3}\right)\right)}{2^2 + \left(4 - 2\sqrt{3}\right)^2} \\
&= \frac{\left(16 - 8\sqrt{3}\right) + i\left(-24 + 16\sqrt{3}\right)}{32 - 16\sqrt{3}} \\
&= \frac{\left(2 - \sqrt{3}\right) + i\left(-3 + 2\sqrt{3}\right)}{2\left(2 - \sqrt{3}\right)} \\
&= \frac{1}{2} + i\sqrt{3}\frac{2 - \sqrt{3}}{2\left(2 - \sqrt{3}\right)} \\
&= \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&= e^{i\frac{\pi}{3}}.
\end{aligned}$$

Déterminons b. On sait que : $z'_A = az_A + b$ *; donc :*
$$\begin{aligned}
b &= z'_A - az_A \\
&= \left(\sqrt{3} - 2\right) + i\left(\sqrt{3} + 1\right) - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(\sqrt{3} + i\left(\sqrt{3} - 1\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.
\end{aligned}$$

Donc s a pour écriture complexe :

$$\boxed{z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

s' est une similitude indirecte, elle a donc une écriture complexe de la forme : $z' = a\overline{z} + b$.
De plus : $s'(A) = A'$ *et* $s'(B) = B'$ *; donc :* $z'_A = a\overline{z_A} + b$ *et* $z'_B = a\overline{z_B} + b$ *; d'où :* $z'_B - z'_A = a(\overline{z_B - z_A})$ *;*

on en déduit que : $a = \dfrac{\overline{z'_B - z'_A}}{z_B - z_A}$

$= \dfrac{\left(2-\sqrt{3}\right) + i\left(3+\sqrt{3}\right) - \left(\sqrt{3}-2\right) - i\left(\sqrt{3}+1\right)}{\left(2+\sqrt{3}\right) - i\left(3-\sqrt{3}\right) - \sqrt{3} + i\left(\sqrt{3}-1\right)}$

$= \dfrac{4-2\sqrt{3}+2i}{2-i\left(4-2\sqrt{3}\right)}$

$= \dfrac{4-2\sqrt{3}+2i}{-i\left(\left(4-2\sqrt{3}\right)+2i\right)}$

$= i\,.$

Déterminons b. On sait que : $z'_A = a\overline{z_A} + b$ *; donc :* $b = z'_A - a\overline{z_A}$

$= \left(\sqrt{3}-2\right) + i\left(\sqrt{3}+1\right) - i\left(\sqrt{3} - i\left(\sqrt{3}-1\right)\right)$

$= -1+i\,.$

Donc s' a pour écriture complexe :

$$\boxed{\boldsymbol{z' = i\,\overline{z} - 1 + i}}.$$

3. *Dans l'écriture complexe de s, le coefficient de* z *est le nombre complexe de module* 1 *et d'argument* $\dfrac{\pi}{3}$*, donc s est une rotation d'angle* $\dfrac{\pi}{3}$.

L'affixe du centre de la rotation s est solution de l'équation : $z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}z - \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Résolvons cette équation.

$$\begin{aligned}
z = \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad &\iff \quad \left(1 - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\iff \quad -\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&\iff \quad z = -1.
\end{aligned}$$

s est la rotation d'angle $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$ ***et de centre*** $\boldsymbol{\Omega(-1)}$***.***

Autre méthode *On a :* $-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-1+\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ *; d'où il vient :*

$$z'=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}z-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\iff z'-(-1)=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}\left(z-(-1)\right).$$

$\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ *est le nombre complexe de module* 1 *et d'argument* $\dfrac{\pi}{3}$ *donc s est une similitude de rapport* 1 *et d'angle* $\dfrac{\pi}{3}$*, de plus son centre a pour affixe* -1*, donc :*

s est la rotation d'angle $\boldsymbol{\dfrac{\pi}{3}}$ ***et de centre*** $\boldsymbol{\Omega(-1)}$**.**

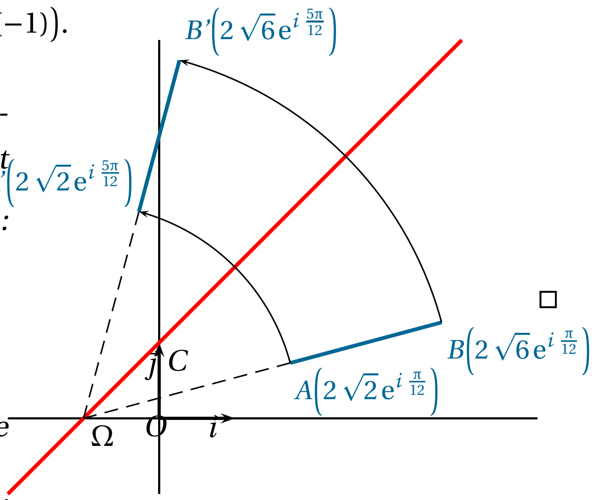


FIG. *I.21* –

D'après la figure I.21*, la similitude indirecte s' semble être la réflexion d'axe* (ΩC) *où C est le point d'affixe* i *.*
Pour : $z=-1$ *; on a :* $z'=i\left(\overline{-1}\right)-1+i=-1$ *; donc :* s(Ω) = Ω.
Pour : $z=i$ *; on a :* $z'=i\times\overline{i}-1+i=i$ *; donc :* s(C) = C.
s' est une similitude indirecte par laquelle les points Ω *et C sont invariants, donc :*

s' est la réflexion d'axe **(Ω**C**).**

I.6.4 Similitude déterminée par deux triangles semblables

THÉORÈME I.6.2
Soit ABC et A'B'C' deux triangles semblables.
Il existe une unique similitude s telle que : s(A) = A′ ; s(B) = B′ et s(C) = C′.

Démonstration

Existence de s

Les triangles ABC et A'B'C' sont soit directement semblables, soit indirectement semblables.

Si les triangles ABC et A'B'C' sont directement semblables
On prend pour s la similitude directe qui transforme A en A' et B en B'. Il ne reste plus qu'a démontré que s transforme C en C'. Posons : $C''=s(C)$.
s transforme ABC et A'B'C" et conserve les angles orientés, donc : $\dfrac{A'C''}{A'B'}=\dfrac{AC}{AB}$ et $\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C''}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.
Les triangles ABC et A'B'C' sont directement semblables, donc : $\dfrac{A'C'}{AC}=\dfrac{A'B'}{AB}$ et $\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C'}\right)=\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right)$.
On en déduit que : $A'C''=\dfrac{AC}{AB}A'B'=\dfrac{A'B'}{AB}AC=A'C'$ et $\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C''}\right)=\left(\overrightarrow{A'B'};\overrightarrow{A'C''}\right)$; donc : $A'C''=A'C'$ et $\left(\overrightarrow{A'C''};\overrightarrow{A'C'}\right)=0$.
Les vecteurs $\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{A'C''}$ ont même direction, même sens et même norme, ils sont donc égaux ; on en déduit que s transforme C en C'.

Si les triangles ABC et A'B'C' sont indirectement semblables
On prend pour s la similitude indirecte qui transforme A en A' et B en B'. Il ne reste plus qu'a démontré que s transforme C en C'. Posons : $C''=s(C)$.
s transforme ABC et A'B'C" et change les angles orientés en leurs opposés, donc :

$\dfrac{A'C''}{A'B'} = \dfrac{AC}{AB}$ et $\left(\overrightarrow{A'B'}\,;\overrightarrow{A'C''}\right) = -\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$.

Les triangles ABC et A'B'C' sont indirectement semblables, donc : $\dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{A'B'}{AB}$ et $\left(\overrightarrow{A'B'}\,;\overrightarrow{A'C'}\right) = -\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AC}\right)$.

On en déduit que : $A'C'' = \dfrac{AC}{AB}A'B' = \dfrac{A'B'}{AB}AC = A'C'$ et $\left(\overrightarrow{A'B'}\,;\overrightarrow{A'C''}\right) = \left(\overrightarrow{A'B'}\,;\overrightarrow{A'C''}\right)$;

donc : $A'C'' = AC'$ et $\left(\overrightarrow{A'C''}\,;\overrightarrow{A'C'}\right) = 0$.

Les vecteurs $\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{A'C''}$ ont même direction, même sens et même norme, ils sont donc égaux ; on en déduit que s transforme C en C'.

Unicité de s

Soit s' une similitude qui transforme ABC en A'B'C', s et s' sont deux similitudes qui coïncident en trois points non alignés donc, d'après le théorème I.3.3, elles sont égales.□

Index