Exercices résolus d'analyse

EXERCICE I Calcul de limites

Étudier les limites suivantes à l'endroit indiqué.

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}$ *en* $\dfrac{\pi}{3}$.

Pour tout $x \neq \dfrac{\pi}{3}$: $f_1(x) = \dfrac{\cos x - \cos\frac{\pi}{3}}{x - \frac{\pi}{3}}$; $f_1(x)$ est donc le taux de variation de la fonction cos entre $\dfrac{\pi}{3}$ et x. De plus la fonction cos est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $-\sin$, donc :

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{1}{2}x^4 - 10x^3 - 100x^2 - 1000x + 1$ *en* $+\infty$.

Pour tout $x > 0$:

$$f_2(x) = x^4\left(\frac{1}{2} - \frac{10}{x} - \frac{100}{x^2} - \frac{1000}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right).$$

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^4 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2} - \frac{10}{x} - \frac{100}{x^2} - \frac{1000}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \quad \text{donc par produit} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x^4 - 10x^3 - 100x^2 - 1000x + 1\right) = +\infty}.$$

3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{2x^3 - 5x + 3}{3x^4 - 7x - 8}$ *en* $+\infty$.

Pour tout $x \in \mathrm{D}_f \setminus \{0\}$:

$$f_3(x) = \frac{x^3\left(2 - \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)}{x^4\left(3 - \frac{7}{x^3} - \frac{8}{x^4}\right)} = \frac{1}{x} \cdot \frac{2 - \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{7}{x^3} - \frac{8}{x^4}}.$$

$$\left.\begin{array}{r} \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2 - \frac{5}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{3 - \frac{7}{x^3} - \frac{8}{x^4}} = \frac{2}{3} \end{array}\right\} \quad \text{donc par produit} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{2x^3 - 5x + 3}{3x^4 - 7x - 8} = 0}.$$

EXERCICE II approximation affine

Déterminer sans calculatrice une valeur approchée de $\dfrac{1}{10,5}$ *; puis majorer (en utilisant la calculatrice) la valeur absolue de l'erreur*[1] *commise* e*, par une puissance entière de* 10 *la plus petite possible.*

Désignons par f la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$. On a :

$$f(10,5) \simeq f(10) + f'(10) \times 0,5.$$

Or : $f(10) = 0,1$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; donc : $f'(10) = -0,01$; d'où :

$$\boxed{\frac{1}{10,5} \simeq 0,095}.$$

À la calculatrice : $\dfrac{1}{10,5} = 0,0952\cdots$; donc :

$$\boxed{|e| < 10^{-3}}.$$

[1] Lorsqu'un réel a est une apprixmation d'un réel x, l'erreur commise est donnée par la formule : $e = a - x$.

EXERCICE III Étude d'une fonction rationnelle

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^2}{x-1}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).

1. *Préciser l'ensemble de définition, D_f, de f et déterminer l'ensemble de dérivabilité de f.*

$$\boxed{\mathrm{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{\mathbf{1}\}}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{f} \textbf{ est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable sur son ensemble de définition : } \mathbb{R}\setminus\{1\}}$$

2. *Déterminez trois nombres réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ on ait :*

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}.$$

Premère méthode Pour tout $x \in \mathrm{D}_f$, on a :

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x-1} + \frac{1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}.$$

Deuxième méthode On a : $ax + b + \dfrac{c}{x-1} = \dfrac{(ax+b)(x-1)+c}{x-1} = \dfrac{ax^2+(b-a)x+c-b}{x-1}$.

La question est donc équivalente à déterminer les réels a, b, c tels que pour tout $x \in \mathrm{D}_f$:

$$ax^2 + (b-a)x + c - b = x^2.$$

Par identification, on en déduit que (a, b, c) est solution du système :

$$\begin{cases} a & = 1 \\ -a + b & = 0 \\ \quad -b + c & = 0 \end{cases} \qquad (\Sigma)$$

Ce système n'a qu'une solution : $(1;1;1)$.

Troisième méthode

$$\begin{array}{lll|l} x^2 & & & x-1 \\ \cline{4-4} & x & & x+1 \\ & & 1 & \end{array}$$

Donc, pour tout $x \in \mathrm{D}_f$, on a :

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)+1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} + \frac{1}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{x-1}.$$

On peut donc prendre :

$$\boxed{\boldsymbol{a = b = c = 1}}.$$

3. *Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.*
En déduire que $\mathscr{C}_f$ présente une asymptote verticale dont on précisera une équation.

Limite en $-\infty$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to-\infty} (x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x-1} = 0 \end{array}\right\} \quad \text{donc par somme : } \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} \boldsymbol{f(x)} = -\infty}.$$

Limite en $+\infty$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}=0\end{array}\right\}\quad\text{donc par somme :}\quad \boxed{\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty}.$$

Limite en 1

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to1}(x+1)=2\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}\dfrac{1}{x-1}=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}\dfrac{1}{x-1}=+\infty\end{array}\right\}\quad\text{donc par somme :}\quad \boxed{\begin{array}{l}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}}f(x)=-\infty\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}}f(x)=+\infty\end{array}}.$$

Nous en déduisons que :

$$\boxed{\mathscr{C}_f \textbf{ présente en 1 une asymptote verticale d'équation : } x=1.}$$

4. *Déterminer la dérivée de f et étudier son signe.*

D'après **2.** pour tout $x\in D_f$:

$$\boxed{f'(x)=1-\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}}.$$

Un carré est toujours positif, on en déduit que $f'(x)$ est du signe de $x(x-2)$, d'où l'on tire le tableau de signes ci-dessous :

x		0		1		2	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$

5. *Dresser le tableau complet des variations de f sur D_f.*

On a : $f(0)=0$ et $f(2)=4$; on en déduit le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$

6. *Montrer que $\mathscr{C}_f$ présente une asymptote oblique, Δ, dont on précisera une équation.*
Étudier la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à son asymptote oblique.

On sait que pour tout $x\in D_f$: $f(x)=x+1+\dfrac{1}{x-1}$; or : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x-1}=0$.
Donc :

$$\boxed{\textbf{La droite, } \Delta\textbf{, d'équation : } y=x+1 \textbf{ ; est asymptote à } \mathscr{C}_f \textbf{ en } -\infty \textbf{ et en } +\infty.}$$

La position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à Δ est déterminée par le signe de $\dfrac{1}{x-1}$ (qui est du signe de $x-1$) ; donc :

$$\boxed{\textbf{Sur }]-\infty;1[, \mathscr{C}_f \textbf{ est au-dessous de } \Delta \textbf{ et sur }]1;+\infty[, \mathscr{C}_f \textbf{ est au-dessus de } \Delta.}$$

7. *Démontrer que le point d'intersection des asymptotes est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$.*

Les asymptotes ont pour équations : $x=1$ et $y=x+1$; elles se coupent donc au point $\Omega(1;2)$.
L'ensemble de définition, $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, est symétrique par rapport à 1 donc $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à Ω si, et seulement si pour tout $x\in D_f$: $4-f(2-x)=f(x)$. Or, pour tout $x\in D_f$:

$$4-f(2-x)=4-\left((2-x)+1+\frac{1}{(2-x)-1}\right)=4-\left(3-x-\frac{1}{x-1}\right)=x+1+\frac{1}{x-1}=f(x).$$

$$\boxed{\textbf{Le point } \Omega(1;2) \textbf{ est donc centre de symétrie de } \mathscr{C}_f.}$$

8. *Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse* 3.

La tangente, T_3, à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3 a pour équation :

$$y = f'(3)(x-3) + f(3).$$

Or : $f(3) = \dfrac{9}{2}$ et $f'(3) = \dfrac{3}{4}$; cette tangente a donc pour équation :

$$\boxed{\boldsymbol{y = \frac{3}{4}x + \frac{9}{4}}}.$$

9. *Tracer $\mathscr{C}_f$.*

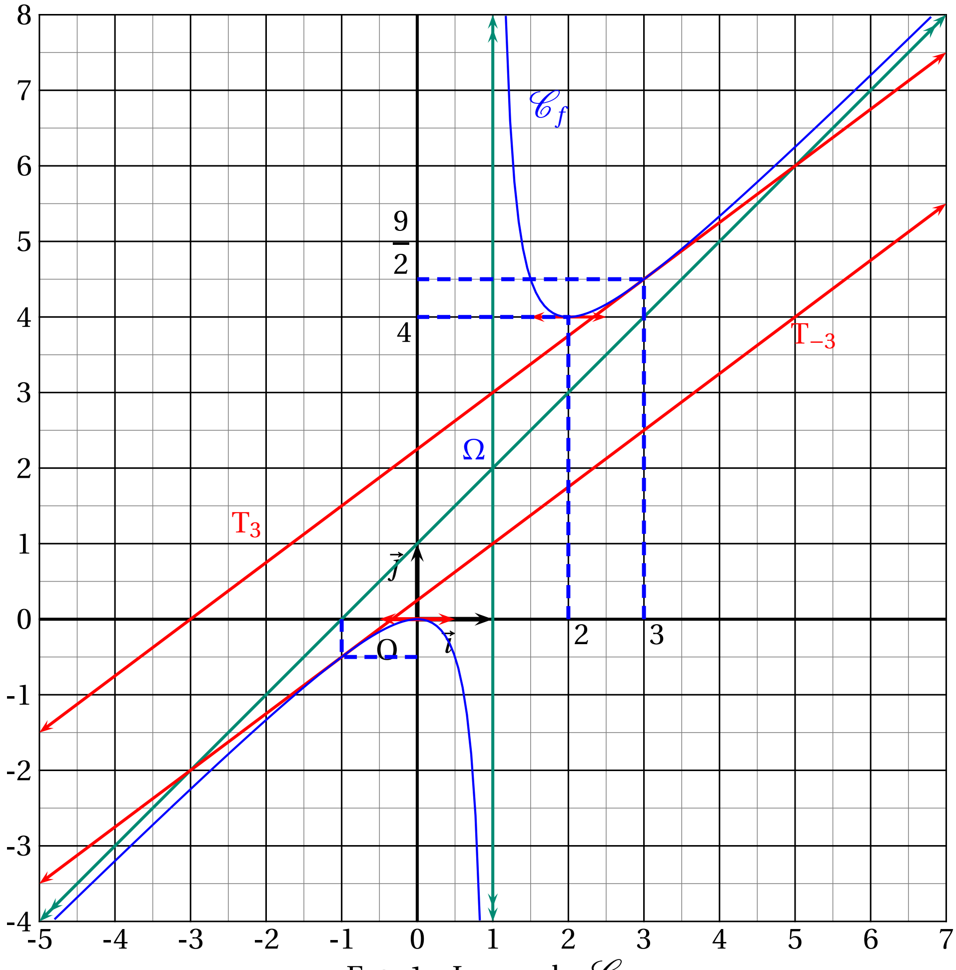

FIG. 1 – La courbe $\mathscr{C}_f$.