COURS DE MATHÉMATIQUES

SIXIÈMES 5 PÉRIODES

Valère BONNET (valere.bonnet@eeb1.eu)

17 octobre 2011

ÉCOLE EUROPÉENNE BRUXELLES I

Table des matières

Chapitre I

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

Ce chapitre traite de fonctions numériques d'une variable réelle ; c'est-à-dire de fonctions qui à un nombre réel associe un nombre réel.

I.1 Ensemble de définition

I.1.1 Introduction

L'ensemble de définition d'une fonction est le sous-ensemble de $\mathbb{R}$ constitué des réels qui ont un image par cette fonction. Lorsque la fonction est notée, f ou g, l'ensemble de définition sera le plus souvent noté, D_f ou D_g. Cet ensemble peut être explicitement donné dans un énoncé comme dans, « considérons la fonction $f : x \longmapsto x^2$ définie sur $[-5;5]$ », une telle fonction f n'est pas définie en 6 bien que son expression soit calculable pour $x = 6$. Mais souvent l'ensemble de définition est implicite, par exemple l'expression de la fonction, $x \longmapsto \frac{1}{x}$, n'est pas calculable uniquement pour, $x = 0$, on en déduit que l'ensemble de définition de cette fonction est $\mathbb{R}^\star$. Ainsi, en pratique, déterminer un ensemble de définition c'est déterminer les nombres réels pour lesquelles l'expression est calculable, ou déterminer les nombres réels pour lesquelles l'expression n'est pas calculable et en déduire l'ensemble de définition par passage au complémentaire.

I.1.2 Détermination pratique

Compte tenu des fonctions de référence actuellement connues, les fonctions dont l'ensemble de définition n'est pas $\mathbb{R}$ sont des fonctions dont l'expression donnée présente un quotient où la variable apparaît au dénominateur ou un radical sous lequel la variable apparaît. Les polynômes ne sont pas de tels fonctions, on en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME I.1.1

L'ensemble de définition d'une fonction polynôme est $\mathbb{R}$.

Exercice I.1.1. ***Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f_1 : x \longmapsto \frac{2x+3}{x^2-4}$.***

Solution *Pour tous nombre réel, x, $f(x)$ est défini si, et seulement si, $x^2 - 4$ n'est pas nul.*

$$x^2 - 4 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad (x-2)(x+2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2 \text{ ou } x = -2$$

On en déduit que :

$$\mathrm{D}_{f_1} = \mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$$

□

Exercice I.1.2. ***Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f_2 : x \longmapsto 2x + 3 + \sqrt{-3x+2}$.***

Solution *Pour tout nombre réel, x, $f_2(x)$ est défini si, et seulement si, $-3x + 2 \geqslant 0$.*

$$-3x + 2 \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -3x \geqslant -2 \quad \Longleftrightarrow \quad x \leqslant \frac{2}{3} \quad (\text{car } -3 < 0)$$

On en déduit que :

$$\mathrm{D}_{f_2} = \left]-\infty; \frac{2}{3}\right]$$

□

Exercice I.1.3. ***Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f_3 : x \mapsto \sqrt{-x^2+3x-2}$.***

Solution *Pour tout nombre réel, x, $f_3(x)$ est défini si, et seulement si, $-x^2+3x-2 \geqslant 0$.*
1 est racine évidente du premier membre, on en déduit la factorisation : $-x^2+3x-2=(x-1)(-x+2)$.

x		1		2	
$-x^2+3x-2$	$-$	0	$+$	0	$-$

On en déduit que :

$$\mathrm{D}_{f_3}=[1;2].$$

□

Exercice I.1.4. ***Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f_4 : x \mapsto -x^2+3x-2$.***

Solution *f_4 est une fonction polynôme, donc :*

$$\mathrm{D}_{f_4}=\mathbb{R}.$$

□

Remarque *L'ensemble de définition de la fonction, $f : x \mapsto \dfrac{x(x+2)}{x+2}$ est,$\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, et pour tout élément, x, de cet ensemble : $f(x)=x$.*
La détermination de l'ensemble de définition doit toujours précéder d'éventuelles simplifications.

I.1.3 Exercices

I.1.a. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto 3x^2-5x+7$.

I.1.b. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{6}x^3-\dfrac{2}{3}x^2+\pi x-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

I.1.c. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x}{x-2}$.

I.1.d. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto 3-4\sqrt{x-2}$.

I.1.e. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto 2+3\sqrt{-5x+4}$.

I.1.f. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{x^2+1}$.

I.1.g. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x-3}{(x-2)(4x-3)}$.

I.1.h. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{3x^2-5x-2}$.

I.1.i. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2}\sqrt{x^2-x-1}$.

I.1.j. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x-4)}$.

I.2 Quelques fonctions de références

Un monôme ou fonction monôme est une expression ou une fonction de la forme ax^n ou $x \mapsto ax^n$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Le nombre a est appelé coefficient du monôme et le naturel n son degré. Ces deux nombres caractérisent le monôme.

Exemples

1. *πx est le monôme de degré 1 et de coefficient π.*
2. *-7 est le monôme de degré 0 et de coefficient -7.*
3. *$3x^{-1}$ et $2x^{\frac{1}{2}}$ ne sont pas des monômes car ni -1 ni $\dfrac{1}{2}$ ne sont sont des entiers naturels.*

DÉFINITION I.2.1

Un polynôme est une somme finie de monômes.

Notations et vocabulaire

1. *Dans une écriture réduite : $\mathrm{P}(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$ (avec $a_n \neq 0$) ; le monôme de plus haut degré, ici a_nx^n, est appelé monôme dominant, son coefficient (ici a_n) est appelé coefficient dominant et son degré (ici n) est appelé degré du polynôme, on notera : $\deg \mathrm{P}=n$.*
2. *Le quotient de deux polynômes est appelé fonction rationnelle ou fraction rationnelle.*
3. *Le quotient de deux fonctions affines est appelé fonction homographique.*

Cas particuliers

1. Le polynôme nul est défini par : $\mathrm{P}(x)=0$.

2. Les monômes sont des cas particuliers de polynômes.
3. Les fonctions affines sont des cas particuliers de polynômes.
4. Les fonctions affines sont des cas particuliers de fonctions homographiques.
5. Les fonctions homographiques et les polynômes sont des cas particuliers de fonction rationnelles.

Exemple *La fonction* P *définie par* $\mathrm{P}(x) = 5x^4 - 3x^2 + 7x - 1$ *est un polynôme de degré* 4, *son coefficient dominant est* 5 *et son monôme dominant est* $5x^4$.

Remarques
1. *Un polynôme est toujours défini sur* $\mathbb{R}$.
2. *Pour tous polynômes* P *et* Q *:* $\deg(\mathrm{P} \times \mathrm{Q}) = \deg \mathrm{P} + \deg \mathrm{Q}$.

Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME I.2.1
Deux polynômes f et g, distincts du polynôme nul, sont égaux si, et seulement si :
1. f et g ont le même degré ;
2. les coefficients $a_0, \cdots, a_n$ de f et $b_0, \cdots, b_n$ de g vérifient pour tout $i \in [\![0;1]\!]$: $a_i = b_i$.

DÉFINITION I.2.2
Une racine d'un polynôme f est un nombre α tel que : $f(\alpha) = 0$.

Exemple *Considérons la fonction polynôme* $f : x \mapsto 2x^2 - 5x + 3$ *; on a :* $f(1) = 2 - 5 + 3 = 0$ *; donc* 1 *est racine de* f.

Remarques
1. *Certains polynômes n'ont pas de racine dans* $\mathbb{R}$, *comme par exemple* $\mathrm{P}(x) = x^4 + x^2 + 1$ *(car pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:* $\mathrm{P}(x) \geqslant 1$*).*
2. *Si* α *est racine du produit* $\mathrm{P} \times \mathrm{Q}$ *de deux polynômes sans être racine de* P, *alors* α *est racine de* Q.

Nous admettons le théorème suivant.

THÉORÈME I.2.2 THÉORÈME FONDAMENTAL DE L'ALGÈBRE
Soit f un polynôme présentant une racine α.
Il existe un unique polynôme g tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = (x - \alpha)g(x)$.

Remarque $\deg g = (\deg f) - 1$.

Exemple *1 est racine de* $2x^3 - 5x^2 + 2x + 1$ *et on a :* $2x^3 - 5x^2 + 2x + 1 = (x-1)\left(2x^2 - 3x - 1\right)$.

COROLLAIRE I.2.3
Un polynôme de degré n a au plus n racines.

Démonstration Sous forme factorisée un polynôme de degré n a au plus n facteurs de degré 1. D'après le théorème I.2.2 les racines d'un polynômes sont fournies par ses facteurs de degré 1. On en déduit le corollaire. □

Exercice I.2.1. ***1. 1 est-il racine du polynôme*** $\mathbf{P} : x \mapsto 2x^3 + x^2 - 3$ ***?***
2. Factoriser $\mathbf{P}$ ***(on fera apparaître un facteur de degré 1 et un facteur de degré 2).***

Solution 1. *On a :* $\mathrm{P}(1) = 2 \times 1^3 + 1^2 - 3 = 2 + 1 - 3 = 0$ *; donc :*

$$\boxed{\textbf{1 est racine de P.}}$$

2. *D'après le théorème fondamental de l'algèbre, on peut mettre* $(x-1)$ *en facteur dans l'expression de* $\mathrm{P}(x)$ *:*

$$\begin{array}{rr|l} 2x^3 + x^2 & -3 & x - 1 \\ \cline{3-3} 3x^2 & & 2x^2 + 3x + 3 \\ & 3x - 3 & \\ & 0 & \end{array}$$

Pour tout réel x *:*

$$\boxed{\mathbf{P}(x) = (x-1)\left(2x^2 + 3x + 3\right)}.$$

□

Pour factoriser un polynôme, on peut reconnaître une racine, α, puis diviser l'expression de $\mathrm{P}(x)$ par $x - \alpha$.

Exercice I.2.2. ***Factoriser* $P : x \mapsto x^3 - 2x^2 - x + 2$ *(une décomposition en trois facteurs de degré 1 est attendue).***

Solution $P(x) = x^3 - x - 2x^2 + 2 = x\left(x^2-1\right) - 2\left(x^2-1\right) = (x-2)\left(x^2-1\right) = (x-2)(x-1)(x+1)$. □

M Pour factoriser un polynôme, on peut regrouper des termes semblables puis reconnaître un facteur commun.

Exercice I.2.3. ***1.*** ***$\sqrt{2}$ est-il racine du polynôme $P : x \mapsto 4x^4 + 12x^3 + x^2 - 24x - 18$?***

2. ***Factoriser P (une décomposition en quatre facteurs de degré 1 est attendue).***

Solution ***1.*** $P\left(\sqrt{2}\right) = 16 + 24\sqrt{2} + 2 - 24\sqrt{2} - 18 = 0$.

$$\boxed{\sqrt{2} \textit{ est racine de } P.}$$

2. *Pour tout réel x, on a :*

$$P(x) = 12x^3 - 24x + 4x^4 + x^2 - 18 = 12x\left(x^2-2\right) + \left(x^2-2\right)\left(4x^2+9\right) = \left(x^2-2\right)\left(4x^2+12x+9\right)$$

Soit finalement :

$$\boxed{P(x) = \left(x - \sqrt{2}\right)\left(x - \sqrt{2}\right)(2x+3)^2}.$$

□

Dans l'exercice I.2.3., dans le calcul de $P\left(\sqrt{2}\right)$, on constate que les termes de degré pair sont entiers alors que les termes de degré impairs sont multiples de $\sqrt{2}$ on a donc l'idée, pour factoriser P, de regrouper les monômes suivant leur parité.

I.2.1 Travaux dirigés

I.2.1.a Décomposition d'une fonction rationnelle

On considère la fonction rationnelle $f : x \mapsto \dfrac{4x^3+5x^2-2x+3}{x^2+2}$. On se propose d'écrire f sous la forme :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+2}$$

(cette forme est plus avantageuse pour résoudre certains problèmes).

Pour venir à bout de cette question nous allons utiliser deux méthodes : l'identification des coefficients (méthode officielle) et la division de polynômes (méthode standard).

Partie A – Identification

1. Préciser l'ensemble de définition de f, D_f.

2. On se propose de déterminer quatre réels a, b, c et d tels que :

$$\text{pour tout } x \in D_f, \qquad f(x) = ax + b + \frac{cx+d}{x^2+2} \tag{P}$$

a. Démontrer que la proposition P est équivalente à :

$$\text{pour tout } x \in D_f, \qquad 4x^3+5x^2-2x+3 = (ax+b)\left(x^2+2\right) + cx + d \tag{P'}$$

b. En développant le second membre de la dernière égalité et en procédant par identification des coefficients, déterminer un système d'équations dont la solution est le quadruplet (a, b, c, d) cherché.

c. Résoudre le système obtenu en **A.2.c.** et conclure.

3. Procéder de même dans le cas de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x^2+3x+2}{2x+1}$.

Partie B – Division

Effectuons la division euclidienne des polynômes :

$$\begin{array}{r|l} 4x^3+5x^2-2x+3 & x^2+2 \\ \cline{2-2} 5x^2-10x & 4x+\frac{1}{2} \\ -10x+2 & \end{array}$$

On a donc, pour tout réel x :

$$4x^3+5x^2-2x+3=\left(x^2+2\right)\left(4x+\frac{1}{2}\right)-10x+2.$$

D'où l'on tire que pour tout réel x :

$$f(x)=4x+\frac{1}{2}+\frac{-10x+2}{x^2+2}.$$

Procéder de même dans le cas de la fonction $g : x \mapsto \dfrac{2x^2+3x+2}{2x+1}$.

Partie C – Utilisation du théorème fondamental de l'algèbre

On considère le polynôme :

$$\mathrm{P}(x)=2\,x^3-7\,x^2+7\,x-2.$$

1. Calculer $\mathrm{P}(1)$ et en déduire une factorisation de $\mathrm{P}(x)$ par un polynôme de degré 1.

2. Calculer $\mathrm{P}(2)$ et en déduire une décomposition de $\mathrm{P}(x)$ en trois facteurs de degré 1.

I.2.2 Exercices

I.2.a. La fonction $\mathrm{P} : x \mapsto x^2+\sin^2 x+\cos^2 x$ est-elle un polynôme ?

I.2.b. La fonction $\mathrm{P} : x \mapsto x^2+3x^{-1}$ est-elle un polynôme ?

I.2.c. La fonction $\mathrm{P} : x \mapsto x^2+4x^{\frac{1}{2}}$ est-elle un polynôme ?

I.2.d. La fonction $\mathrm{P} : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{x-1}$ est-elle un polynôme ?

I.2.e. La fonction $\mathrm{P} : x \mapsto \dfrac{x^4-1}{x^2+1}$ est-elle un polynôme ?

I.2.f. 1 est-il racine de $\mathrm{P} : x \mapsto 3x^2-4x+1$?

I.2.g. -2 est-il racine de $\mathrm{P} : x \mapsto 3x^2-4x+1$?

I.2.h. $\sqrt{3}$ est-il racine de $\mathrm{P} : x \mapsto 2x^4-3x^3-5x^2+9x-3$?

I.2.i. Factoriser $\mathrm{P} : x \mapsto 3x^2-4x+1$.

I.2.j. Factoriser $\mathrm{P} : x \mapsto 2x^4-3x^3-5x^2+9x-3$.
(on devra obtenir quatre facteurs de degré 1).

I.3 Opérations sur les fonctions et variations d'une fonction

I.3.1 Égalité de deux fonctions

Une fonction est déterminée par son ensemble de définition et par le mécanisme qui à chaque élément associe son image par la fonction. On en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME I.3.1

Soit f et g deux fonctions d'ensembles de définitions respectifs D_f et D_g.
Les fonctions f et g sont égales si, et seulement si :

$$\mathrm{D}_f=\mathrm{D}_g \qquad \text{et,} \qquad \text{pour tout } x\in\mathrm{D}_f,\quad f(x)=g(x).$$

Remarque *En particulier deux fonctions sont égales si, et seulement si, leurs représentations graphiques relativement à un repère donné sont confondues.*

Exercice I.3.1. ***Démontrer que les fonctions f et g définies par les expressions ci-dessous sont égales.***

$$f(x)=\frac{2x+3}{x+2} \qquad \textit{et} \qquad g(x)=2-\frac{1}{x+2}$$

Solution

1. *Pour tout réel x, $f(x)$ et $g(x)$ ne sont définis que lorsque $x\neq -2$, on en déduit que f et g ont le même ensemble de définition : $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.*

2. *Pour tout $x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\}$, on a :*

$$f(x)=\frac{2x+3}{x+2}=\frac{2(x+2)-1}{x+2}=2-\frac{1}{x+2}=g(x).$$

Donc : $f=g$. $\square$

I.3.2 Opérations sur les fonctions

f et g sont deux fonctions ayant le même ensemble de définition D.

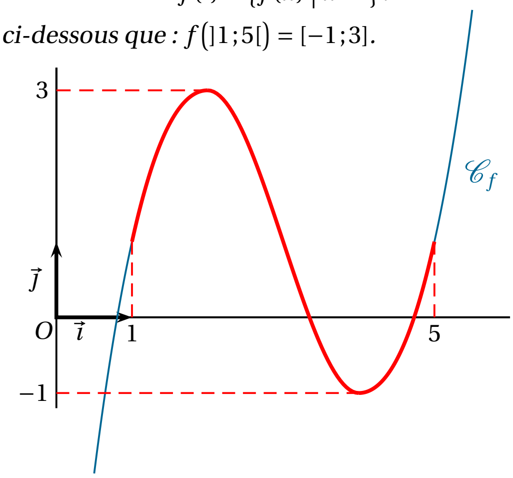
Opération	Notation	Fonction définie, pour tout $x \in \mathrm{D}$, par :
Produit par un réel λ	λf	$(\lambda f)(x) = \lambda \times f(x)$
Somme de fonctions	$f+g$	$(f+g)(x) = f(x)+g(x)$
Combinaison linéaire (avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$)	$\alpha f + \beta g$	$(\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \times f(x) + \beta \times g(x)$
Inverse d'une fonction (lorsque f ne s'annule pas sur D)	$\dfrac{1}{f}$	$\left(\dfrac{1}{f}\right)(x) = \dfrac{1}{f(x)}$
Quotient de deux fonctions (lorsque g ne s'annule pas sur D)	$\dfrac{f}{g}$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

I.3.3 Compositions de fonctions

Soit f une fonction et I un sous-ensemble de son ensemble de définition, on désignera par $f(\mathrm{I})$ l'ensemble décrit par $f(x)$ lorsque x décrit I :

$$f(\mathrm{I}) = \{f(x) \mid x \in \mathrm{I}\}.$$

Exemple *On lit sur le graphique ci-dessous que :* $f(]1;5[) = [-1;3]$.



DÉFINITION I.3.1 COMPOSÉE DE DEUX FONCTIONS

Soit f une fontion définie sur un ensemble I et g une fontion définie sur un ensemble J tel que $f(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. On appelle fonction composée de f par g (ou composée des fonctions f et g) la fonction, notée $g \circ f$, définie sur I par :

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big).$$

Remarque *La construction de l'image d'un réel x par $g \circ f$ respecte le schéma ci-dessous.*

$$\begin{tikzcd} \mathrm{I} \arrow[r] & \mathrm{J} \arrow[r] & \mathbb{R} \\ x \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[rr, bend right, "\boxed{g \circ f}"'] & y = f(x) \arrow[r, mapsto, "g"] & g(y) = g\big(f(x)\big) = g \circ f(x) \end{tikzcd}$$

Exercice I.3.2. ***On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x-3$ et $g : x \mapsto x^2+1$.***
Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

Solution *f et g sont définies sur $\mathbb{R}$, donc $g \circ f$ et $f \circ g$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x :*

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g(2x-3) = (2x-3)^2 + 1 = 4x^2 - 12x + 10.$$

$$f \circ g(x) = f\big(g(x)\big) = f\big(x^2+1\big) = 2\big(x^2+1\big) + 3 = 2x^2 + 5.$$

□

Remarque *Généralement : $g \circ f \neq f \circ g$.*

I.3.4 Sens de variation

I.3.4.a Rappels

Les définitions suivantes ont été vues dans les classes de précédentes.

DÉFINITIONS I.3.2

Soit f une fonction et I un intervalle inclus dans son ensemble de définition.

(1) On dit que f est *strictement croissante* sur I lorsque pour tous éléments a et b de I on a :

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad f(a) < f(b).$$

(2) On dit que f est *strictement décroissante* sur I lorsque pour tous éléments a et b de I on a :

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad f(b) < f(a).$$

(3) On dit que f est *strictement monotone* sur I lorsqu'elle est strictement croissante sur I ou strictement décroissante sur I.

Remarques

1. *Dire que f est strictement croissante sur I signifie que sur cet intervalle f conserve l'ordre.*

2. *Dire que f est strictement décroissante sur I signifie que sur cet intervalle f inverse l'ordre.*

3. *On définit de même une fonction* croissante *(respectivement* décroissante *) sur un intervalle I en remplaçant l'implication par : $a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad f(a) \leqslant f(b)$ (respectivement : $a \leqslant b \quad \Longrightarrow \quad f(a) \geqslant f(b)$).*

4. *On définit de même une fonction* monotone *sur un intervalle I.*

5. *Toute fonction strictement croissante sur I est en particulier croissante sur I. La condition « strictement croissante » (respectivement « strictement décroissante »)est plus forte que la condition « croissante » (respectivement « décroissante »).*

6. *Les fonctions constantes sur un intervalle sont à la fois croissantes et décroissantes sur cet intervalle mais ne sont ni strictement croissantes, ni strictement décroissantes sur cet intervalle.*

THÉORÈME I.3.2

(1) Soit f une fonction strictement croissante sur un intervalle I, on a pour tous éléments a et b de I :

$$a < b \quad \Longleftrightarrow \quad f(a) < f(b).$$

(2) Soit f une fonction strictement décroissante sur un intervalle I, on a pour tous éléments a et b de I :

$$a < b \quad \Longleftrightarrow \quad f(b) < f(a).$$

Démonstration

(1) Soit a et b deux éléments de I. D'après la définition I.3.2 : $a < b \quad \Longrightarrow \quad f(b) < f(a)$.

Réciproquement, f une fonction strictement croissante sur I, elle est donc croissante sur I, d'où il vient : $a \geqslant b \quad \Longrightarrow \quad f(a) \geqslant f(b)$;

Nous en déduisons par contraposition : $a < b \quad \Longleftarrow \quad f(a) < f(b)$; ce qui achève la démonstration de la propriété.

On démontre de même la propriété **(2)**. □

DÉFINITION I.3.3

Étudier le sens de variation d'une fonction, c'est déterminer les intervalles maximaux sur lesquelles la fonction est strictement croissante, strictement décroissante ou constante.

I.3.4.b Sens de variation et composition

Soit f une fonction, I un intervalle inclus dans son ensemble de définition et g une fonction dont l'ensemble de définition contient $f(\mathrm{I})$.

Si f est strictement décroissante sur I et g strictement décroissante sur $f(\mathrm{I})$ alors $g \circ f$ inversera successivement deux fois l'ordre sur I ; on en déduit que $g \circ f$ est strictement croissante sur I.

Plus généralement on a le théorème suivant :

THÉORÈME I.3.3

Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I et si g est une fonction strictement monotone sur $f(\mathrm{I})$, alors $g \circ f$ est une fonction strictement monotone sur un intervalle I ; plus précisément, le sens de variation de $g \circ f$ est donné dans le tableau ci-dessous.

	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
g est strictement croissante sur $f(\mathrm{I})$	$g \circ f$ est strictement croissante sur I	$g \circ f$ est strictement décroissante sur I
g est strictement décroissante sur $f(\mathrm{I})$	$g \circ f$ est strictement décroissante sur I	$g \circ f$ est strictement croissante sur I

Remarques

1. *Si g est strictement croissante sur $f(\mathrm{I})$ alors $g \circ f$ a le même sens de variation que f sur I.*

2. *Si g est strictement décroissante sur $f(\mathrm{I})$ alors $g \circ f$ a le sens de variation contraire de celui de f sur I.*

3. *Le théorème I.3.3 reste vrai si on remplace « strictement monotone » par « monotone ».*

I.3.4.c Sens de variation et opérations

THÉORÈME I.3.4

Soit f et g deux fonctions, I un intervalle inclus dans leur ensemble de définition et k un nombre réel.

(1) Si $k > 0$, alors kf a le même sens de variation que f sur I.

(2) Si $k < 0$, alors kf a le sens de variation contraire de celui de f sur I.

(3) Si f et g sont strictement croissantes sur I, alors $f + g$ est strictement croissante sur I.

(4) Si f et g sont strictement décroissantes sur I, alors $f + g$ est strictement décroissante sur I.

Démonstration

(1) Si $k > 0$, alors kf est la composée de f par $x \mapsto kx$, qui est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc kf a le même sens de variation que f sur I.

(2) Si $k < 0$, alors kf est la composée de f par $x \mapsto kx$, qui est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, donc kf a le sens de variation contraire de celui de f sur I.

(3) Soit a et b deux éléments de I.

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f(a) < f(b) \\ g(a) < g(b) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f(a) + g(a) < f(b) + g(b)$$

(4) Soit a et b deux éléments de I.

$$a < b \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} f(a) > f(b) \\ g(a) > g(b) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad f(a) + g(a) > f(b) + g(b)$$

□

Remarque *Dans les propriétés (3) et (4), lorsque f et g n'ont pas le même sens de variation, on ne peut rien conclure (voir exercice I.3.j.)*

I.3.5 Exercices

I.3.a. **1.** Développer : $(x-3)(x-1)$.

2. Démontrer que les fonctions f et g définies par les expressions ci-dessous sont égales.

$$f(x) = \frac{2}{x^2 - 4x + 3} \qquad \text{et} \qquad g(x) = \frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-1}$$

I.3.b. Démontrer que les fonctions f et g définies par les expressions ci-dessous sont égales.

$$f(x) = \frac{3x^2 + 4x + 2}{(x+1)^2} \qquad \text{et} \qquad g(x) = 3 - \frac{2}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2}$$

I.3.c. Les fonctions $f : x \mapsto \dfrac{x^2 + x}{x}$ et $g : x \mapsto x + 1$ sont-elles égales ?

I.3.d. Les fonctions $f : x \mapsto x$ et $g : x \mapsto \sqrt{x^2}$ sont-elles égales ?

I.3.e. On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x - 3$ et $g : x \mapsto -3x + 7$.
Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

I.3.f. On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x^2 - 3$ et $g : x \mapsto -3x^2 + 7x$.
Déterminer $g \circ f$ et $f \circ g$.

I.3.g. On considère les fonctions affines $f : x \mapsto 2x - 3$ et $\mathrm{I}d : x \mapsto x$.
Déterminer une fonction affine g telle que : $g \circ f = \mathrm{I}d$.
A-t-on : $f \circ g = \mathrm{I}d$?

I.3.h. Une fonction constante sur un intervalle I est-elle croissante sur cet intervalle ?

I.3.i. Soit f une fonction décroissante sur un intervalle I. Démontrer que pour tous éléments a et b de I, on a :

$f(a) > f(b) \Longrightarrow a < b$.

I.3.j. **1.** Donner un exemple d'une fonction f strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et d'une fonction g strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ tels que $f+g$ soit strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Donner un exemple d'une fonction f strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et d'une fonction g strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ tels que $f+g$ soit strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. Conclure.

I.3.k. On rappelle que la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $[0;+\infty[$. Déterminer le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle considéré.

a. $f(x) = \sqrt{x} + 2x - 1$ sur $[0;+\infty[$.
b. $f(x) = \sqrt{x} - 1$ sur $[0;+\infty[$.
c. $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$ sur $[1;+\infty[$.
d. $f(x) = -3\sqrt{x} + 2$ sur $[0;+\infty[$.

I.4 Parité, périodicité

Désormais, dans ce chapitre, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

I.4.1 Symétrie d'une partie de $\mathbb{R}$ par rapport à 0

DÉFINITION I.4.1

Soit E une partie de $\mathbb{R}$, on dit que E est symétrique par rapport à 0 lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x \in E \Longrightarrow -x \in E.$$

Exemples

1. $[-3;+\infty[$ *n'est pas symétrique par rapport à 0, en effet,* $4 \in [-3;+\infty[$ *et pourtant* $-4 \notin [-3;+\infty[$.

2. $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *n'est pas symétrique par rapport à 0, en effet,* $1 \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *et* $-1 \notin \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

3. $]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[$ *est symétrique par rapport à 0.*

I.4.2 Fonctions paires, fonctions impaires

DÉFINITIONS I.4.2

Soit f une fonction et D_f son ensemble de définition.

(1) La fonction f est dite paire lorsque : $\begin{cases} D_f \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \text{pour tout } x \in D_f : \quad f(-x) = f(x) \end{cases}$.

(2) La fonction f est dite impaire lorsque : $\begin{cases} D_f \text{ est symétrique par rapport à } 0 \\ \text{pour tout } x \in D_f : \quad f(-x) = -f(x) \end{cases}$.

Interprétation graphique Les fonctions paires sont les fonctions dont la représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées (noté Oy) et les fonctions impaires sont les fonctions dont la représentation graphique est symétrique par rapport à l'origine du repère.

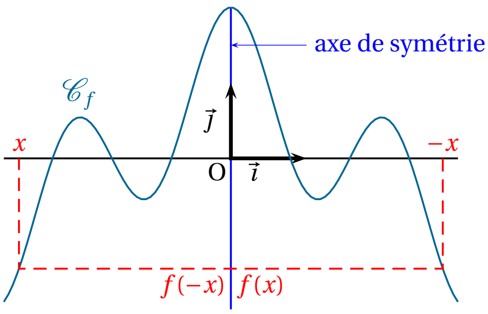


FIGURE I.1 – Fonction paire.

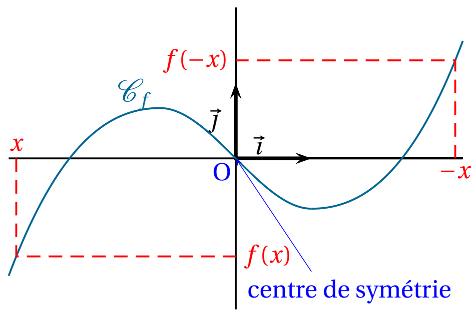


FIGURE I.2 – Fonction impaire.

Remarques

1. *Généralement une fonction n'est ni paire ni impaire. Le fait d'être paire ou impaire, pour une fonction, est une propriété remarquable.*

2. *Lorsqu'une fonction est paire, on restreint son étude à la partie positive de son ensemble de définition, on trace la courbe correspondant à cette étude, puis on complète la courbe en utilisant la symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.*

3. *Lorsqu'une fonction est impaire, on restreint son étude à la partie positive de son ensemble de définition, on trace la courbe correspondant à cette étude, puis on complète la courbe en utilisant la symétrie par rapport à l'origine du repère.*

Exercice I.4.1. ***Étudier la parité de la fonction*** $f : x \mapsto \sqrt{3-x}$.

Solution *La fonction* f *est définie en* -4, *mais pas en* 4, *donc :*

$$\boxed{\textbf{la fonction } f \textbf{ n'est ni paire ni impaire.}}$$

□

Pour démontrer qu'une fonction n'est ni paire ni impaire, il suffit (lorsque cela est possible) d'illustrer par un contre-exemple le fait que l'ensemble de définition n'est pas symétrique par rapport à 0.

Exercice I.4.2. ***Étudier la parité de la fonction*** $f : x \mapsto x^2 + x$.

Solution *On a :* $f(1) = 2$ *et* $f(-1) = 0$. $f(1)$ *et* $f(-1)$ *ne sont ni égaux ni opposés, donc :*

$$\boxed{\textbf{la fonction } f \textbf{ n'est ni paire ni impaire.}}$$

□

Pour démontrer qu'une fonction n'est ni paire ni impaire, il suffit de choisir un nombre et son opposé dont les images ne sont ni égales ni opposées.

Exercice I.4.3. ***Étudier la parité de la fonction*** $f : x \mapsto 5x^4 - 4x^2 + \sqrt{2}$.

Solution f *est une fonction polynôme, elle est donc définie sur* $\mathbb{R}$ *qui est symétrique par rapport à* 0.
Pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ *:*

$$f(-x) = 5(-x)^4 - 4(-x)^2 + \sqrt{2} = 5x^4 - 4x^2 + \sqrt{2} = f(x).$$

$$\boxed{\textbf{la fonction } f \textbf{ est paire.}}$$

□

Pour démontrer qu'une fonction est paire ou impaire il suffit, après s'être assuré que l'ensemble de définition est symétrique par rapport à 0, d'exprimer $f(-x)$ en fonction de $f(x)$.

Exercice I.4.4. ***Étudier la parité de la fonction*** $f : x \mapsto \dfrac{4x}{x^2-2}$.

Solution *On a :* $x^2 - 2 = 0 \iff x = \sqrt{2}$ *ou* $x = -\sqrt{2}$.
Donc : $\mathrm{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right\}$; D_f *est donc symétrique par rapport à 0.*
Pour tout $x \in \mathrm{D}_f$ *:*

$$f(-x) = \frac{4(-x)}{(-x)^2-2} = \frac{-4x}{x^2-2} = -\frac{4x}{x^2-2} = -f(x).$$

$$\boxed{\textbf{la fonction } f \textbf{ est impaire.}}$$

□

I.4.3 Fonctions périodiques

DÉFINITION I.4.3

Soit f une fonction, D_f son ensemble de définition et p un nombre réel.
La fonction f est dite périodique de période p lorsque :

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in \mathbb{R} : & x \in D_f \iff x+p \in D_f \\ \text{pour tout } x \in D_f : & f(x+p) = f(x) \end{cases}.$$

Interprétation graphique Les fonctions périodiques de période p sont les fonctions dont la représentation graphique est globalement invariante par la translation de vecteurs $p\vec{\imath}$.

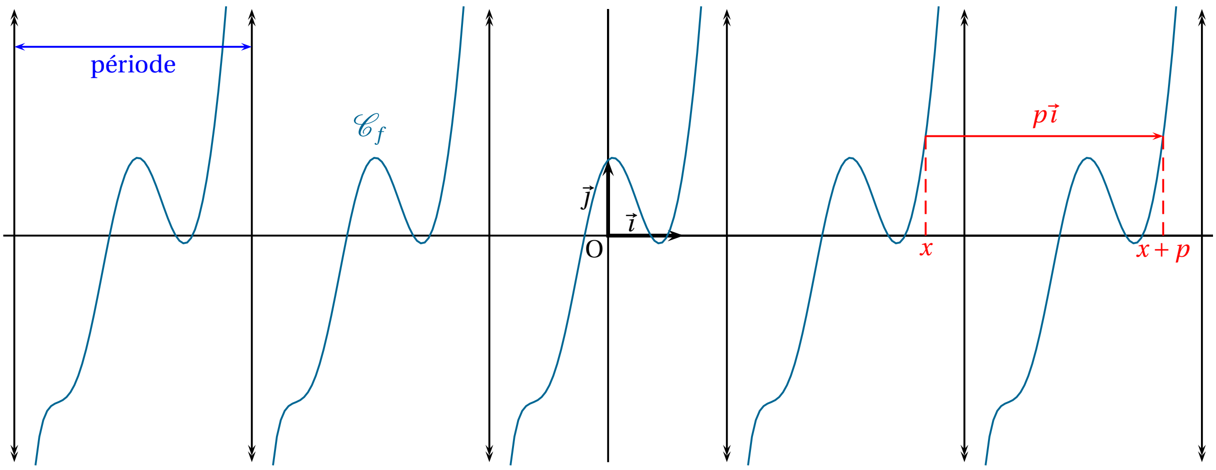


FIGURE I.3 – Fonction périodique de période p.

Remarques

1. *Pour exprimer qu'une fonction f est périodique de période p, on dira souvent qu'elle est p-périodique.*

2. *Si f est p-périodique et si $k \in \mathbb{Z}$ alors :*

$$\begin{cases} \text{pour tout } x \in \mathbb{R} : & x \in D_f \iff x+kp \in D_f \\ \text{pour tout } x \in D_f : & f(x+kp) = f(x) \end{cases}.$$

3. *Si p est une période de f alors les nombres de la forme kp (avec $k \in \mathbb{Z}$) sont aussi des périodes de f.*

4. *En pratique, lorsqu'on affirmera qu'une fonction f est p-périodique, p sera la plus petite période strictement positive de f. Les périodes de f seront alors les multiples de p, c'est-à-dire les nombres de la forme kp (avec $k \in \mathbb{Z}$).*

Le théorème suivant a été vu dans les classes précédentes.

THÉORÈME I.4.1

(1) Les fonctions cos et sin sont 2π-périodiques.

(2) La fonction tan est π-périodique.

Exercice I.4.5. ***Soit f une fonction p-périodique. Étudier la périodicité de la fonction g définie par : $g(x) = f(2x)$.***

Solution *Pour tout x tel que $2x \in D_f$: $g(x) = f(2x) = f(2x+p) = f\left(2\left(x+\frac{p}{2}\right)\right) = g\left(x+\frac{p}{2}\right)$.*

De plus pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$x \in D_g \iff 2x \in D_f \iff 2x+p \in D_f \iff 2\left(x+\frac{p}{2}\right) \in D_f \iff x+\frac{p}{2} \in D_g.$$

$$\boxed{g \text{ est } \frac{p}{2}\text{-périodique.}}$$

□

Exercice I.4.6. ***Étudier la périodicité de la fonction $f : x \mapsto 50\sin\left(6x+\frac{\pi}{4}\right)$.***

Solution *La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$f(x) = 50\sin\left(6x+\frac{\pi}{4}\right) = 50\sin(6x+\frac{\pi}{4}+2\pi) = 50\sin\left(6\left(x+\frac{2\pi}{6}\right)+\frac{\pi}{4}\right) = f\left(x+\frac{\pi}{3}\right).$$

$$\boxed{f \text{ est } \frac{\pi}{3}\text{-périodique.}}$$

□

I.4.4 Exercices

I.4.a. Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{4x}{x-2}$.

I.4.b. Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto 2x+4$.

I.4.c. Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto 3x^2-7$.

I.4.d. Étudier la parité de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{3x^2-7}{x^2+1}$.

I.4.e. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On considère les fonctions i et p définies par :

$$i(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2} \quad \text{et} \quad p(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2}.$$

1. Exprimer $p+i$ en fonction de f.

2. Étudier la parité des fonctions i et p.

3. Expliciter les fonctions i et p dans le cas où la fonction f est définie par : $f(x) = 2x^3-7x^2+5x-4$.

4. Expliciter les fonctions i et p dans le cas où la fonction f est définie par :
$f(x) = \sqrt{3}x^7+6x^6-\pi x^5+5x^4+10x^3-103x+1000$.

I.4.f. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Étudier la parité de fg dans chacun des cas suivants.

a. f et g sont paires.

b. f et g sont impaires.

c. f est paire et g est impaire.

d. f est impaire et g est paire.

I.4.g. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Étudier la parité de $f \circ g$ dans chacun des cas suivants.

a. f et g sont paires.

b. f et g sont impaires.

c. f est paire et g est impaire.

d. f est impaire et g est paire.

I.4.h. Soit f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et α, β deux nombres réels.

a. Démontrer que si f et g sont paires, alors $\alpha f+\beta g$ est paire.

b. Démontrer que si f et g sont impaires, alors $\alpha f+\beta g$ est impaire.

I.4.i. Une fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, est p-périodique. Étudier la périodicité de la fonction g définie par : $g(x) = f\left(\dfrac{x}{3}\right)$.

I.4.j. Une fonction f est p-périodique. Étudier la périodicité de la fonction $g : x \mapsto f(5x)$.

I.4.k. Une fonction f est p-périodique. Étudier la périodicité de la fonction $g : x \mapsto 7f(5x+3)$.

I.4.l. Déterminer ω pour que la fonction
$u : t \mapsto 220\sin(\omega t)$ soit périodique de période $\dfrac{1}{50}$.

I.4.m. f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$. f est 4-périodique et g est 10-périodique. Déterminer la période de $2f+3g$.

I.4.n. Désignons par E la fonction partie entière ; pour tout nombre réel x, $\mathrm{E}(x)$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x. C'est donc l'unique entier vérifiant : $\mathrm{E}(x) \leqslant x < \mathrm{E}(x)+1$.

1. Donner la partie entière de π, 6, -7 et de $-7,5$.

2. Démontrer que pour tout réel x : $\mathrm{E}(x+1) = \mathrm{E}(x)+1$

3. On considère la fonction m définie par : $m(x) = x - \mathrm{E}(x)$. Démontrer que m est 1-périodique.

4. Représenter graphiquement les fonctions E et m. (unité graphique : 1 cm)

I.5 Vocabulaire de l'ordre

Considérons une partie non vide, E, de $\mathbb{R}$, par exemple : $\mathrm{E} =]-3;0] \cup \{2\}$;
On a pour tout $x \in \mathrm{E}$: $2,5 \geqslant x$; on dit que 2,5 est *majorant* de E. Tout nombre plus grand que 2,5 est également un majorant de E. L'ensemble des majorants de E est l'intervalle $[2;+\infty[$.

On a pour tout $x \in \mathrm{E}$: $-4 \leqslant x$; on dit que -4 est *minorant* de E. Tout nombre plus petit que -4 est également un minorant de E. L'ensemble des minorants de E est l'intervalle $]-\infty;-3]$.

E a un *plus grand élément*, 2, mais n'a pas de *plus petit élément*.

Un ensemble qui a des majorants (respectivement des minorants) est dit *majoré* (respectivement *minoré*). Un ensemble à la fois minoré et majoré est dit *borné*. Certaines parties de $\mathbb{R}$, comme $\mathbb{N}$, ne sont pas bornées.

Le plus petit élément de l'ensemble des majorants (respectivement minorants) est appelé *borne supérieure* (respectivement *borne inférieure*). Par exemple la borne supérieure de E est 2 et sa borne inférieure est -3.

On dira que $f \leqslant \lambda$ sur un intervalle I lorsque pour tout $x \in \mathrm{I}$: $f(x) \leqslant \lambda$.
On dira alors que la fonction f est majorée par λ sur I.

Exemple *Considérons la fonction $f : x \mapsto 2-x^2$. Un carré est toujours positif, donc : $f \leqslant 2$ sur $\mathbb{R}$.*
Ainsi f est majorée par 2 sur $\mathbb{R}$.

Plus généralement, on adapte ainsi aux fonctions tous le vocabulaire introduit ci-dessus pour les sous-ensembles de

$\mathbb{R}$.

Exercice I.5.1. ***On considère la fonction $f : x \mapsto -2x+3$ et l'intervalle $\mathrm{I} = [7;10[$. Préciser les bornes de $f(\mathrm{I})$. Sont-elles atteintes ?***

Solution *On a : $-2<0$; donc f est une fonction affine strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R} : x \in \mathrm{I} \iff 7 \leqslant x < 10 \iff f(7) \geqslant f(x) > f(10) \iff -17 < f(x) \leqslant -11$.*
Donc : $f(\mathrm{I}) =]-17;-11]$.

Les bornes inférieure et supérieure de f sur I sont respectivement -17 et -11.
La borne inférieure n'est pas atteinte et la borne supérieure est atteinte en 7.

Autre méthode *On a : $-2<0$; donc f est une fonction affine strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, on en déduit le tableau de variation suivant.*

x	$-\infty$	7	10	$+\infty$
f(x)	$+\infty$ ↘	-11 ↘	-17 ↘	$-\infty$

Donc : $f\big([7;10[\big) =]-17;-11]$.

Les bornes inférieure et supérieure de f sur I sont respectivement -17 et -11.
La borne inférieure n'est pas atteinte et la borne supérieure est atteinte en 7.

□

Pour déterminer l'image d'un intervalle par une fonction, la lecture d'un tableau de variation bien dressé est souvent la méthode la plus simple.
Un tableau de variation à valeur de démonstration.

I.5.1 Exercices

I.5.a. L'ensemble $\mathbb{Z}$ est-il borné ?

I.5.b. On pose $\mathrm{E} = [-2;-1[\cup[1;2[$.

1. E est-il minoré ? majoré ? si oui préciser un minorant, un majorant.

2. E est-il borné ? si oui préciser ses bornes.

3. E a-t-il un plus grand élément ? un plus petit élément ? si oui préciser lesquels.

I.5.c. Donner un exemple d'ensemble borné qui n'a ni plus grand élément ni plus petit élément.

I.5.d. Soit E un ensemble qui a un plus grand élément, S.
S est-il un majorant de E ?
Démontrer que S est la borne supérieure de E.

I.6 Rappels sur les trinôme du second degré

Un polynôme P de degré 2 défini par $\mathrm{P}(x) = ax^2+bx+c$ (avec $a \neq 0$), est aussi appelé trinôme du second degré. L'objectif de cette section est de savoir factoriser $\mathrm{P}(x)$, résoudre l'équation $\mathrm{P}(x) = 0$, étudier le signe $\mathrm{P}(x)$ suivant les valeurs de x, représenter graphiquement P et trouver l'extremum de P.

I.6.1 Forme canonique

Pour factoriser un polynôme P, de la forme : $\mathrm{P}(x) = ax^2+bx+c$; on écrit $\mathrm{P}(x)$ sous forme canonique pour faire apparaître soit la différence de deux carrés (auquel cas $\mathrm{P}(x)$ est factorisable) soit la somme de deux carrés (auquel cas $\mathrm{P}(x)$ n'est pas factorisable). La forme canonique de $\mathrm{P}(x)$ est : $\mathrm{P}(x) = a\left[\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$. Pour obtenir cette formule, on utilise la démarche explicitée dans le tableau ci-dessous.

étapes	cas particulier	cas général
1.	$P(x)=3x^2+5x-7$ $P(x)=3\left(x^2+\frac{5}{3}x-\frac{7}{3}\right)$	$P(x)=ax^2+bx+c$ $P(x)=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$
2.	$P(x)=3\left(x^2+2\frac{5}{6}x+\left(\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{7}{3}\right)$ $P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{5}{6}\right)^2-\frac{7}{3}\right]$ $P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{25}{36}-\frac{84}{36}\right]$ $P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\frac{109}{36}\right]$	$P(x)=a\left(x^2+2\frac{b}{2a}x+\left(\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right)$ $P(x)=a\left[\left(x-\frac{b}{2a}\right)^2-\left(\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}\right]$ $P(x)=a\left[\left(x-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{b^2}{4a^2}+\frac{4ac}{4a^2}\right]$
3.	$P(x)=3\left[\left(x+\frac{5}{6}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{109}}{6}\right)^2\right]$ $P(x)=3\left(x+\frac{5}{6}-\frac{\sqrt{109}}{6}\right)\left(x+\frac{5}{6}+\frac{\sqrt{109}}{6}\right)$ $P(x)=3\left(x-\frac{-5+\sqrt{109}}{6}\right)\left(x-\frac{-5-\sqrt{109}}{6}\right)$	$P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a^2}\right]$

Récapitulatif des étapes

1. On met, si besoin est, le coefficient dominant en facteur
2. On reconnaît la somme des termes de degrés 2 et 1 comme le début d'une identité remarquable.
3. Si l'expression entre crochets est la différence de deux quantités positives, alors on reconnaît la différence de deux carrés et on factorise ; sinon, l'expression entre crochets est la somme de deux quantités positives et il n'existe pas de factorisation en produit de facteurs de degré un à coefficient réels.

DÉFINITION I.6.1

Le nombre, Δ, défini par : $\Delta = b^2-4ac$; est appelé *discriminant* de P.

La forme canonique de P devient alors :

$$P(x)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a^2}\right] \tag{I.1}$$

I.6.2 Représentation graphique et sens de variation

Le plan est muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
D'après (I.1), pour tout réel x :

$$P(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{\Delta}{4a} \tag{I.2}$$

Introduisons la fonction $u : x \mapsto ax^2$ et $\mathscr{C}_u$ sa représentation graphique. D'après (I.2) la courbe, $\mathscr{P}$, de P est l'image de $\mathscr{C}_u$ par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-\frac{b}{2a}\\-\frac{\Delta}{4a}\end{pmatrix}$.

THÉORÈME I.6.1

La représentation graphique $\mathscr{P}$ de $P(x)=ax^2+bx+c$ (avec $a\neq 0$) est une parabole d'axe parallèle à Oy et de sommet $S\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$; de plus, dans le repère $(S;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\mathscr{P}$ a pour équation : $Y=aX^2$.

Remarque *D'après (I.2) on a :* $P\left(-\frac{b}{2a}\right)=-\frac{\Delta}{4a}$ *; donc en pratique on obtient l'ordonnée de S en calculant* $P\left(-\frac{b}{2a}\right)$.

Exemple *On se propose de représenter graphiquement la fonction f définie par :* $f(x)=x^2-5x+4$.
On a : $-\frac{b}{2a}=\frac{5}{2}$ *et* $f\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{25}{4}-\frac{5}{2}+4=\frac{16}{4}-\frac{25}{4}=-\frac{9}{4}$.
Introduisons le point $S\left(\frac{5}{2};-\frac{9}{4}\right)$*, dans le repère* $(S;\vec{\imath},\vec{\jmath})$*,* $\mathscr{C}_f$ *a pour équation :* $Y=X^2$.
Nous en déduisons la courbe de la figure I.4.

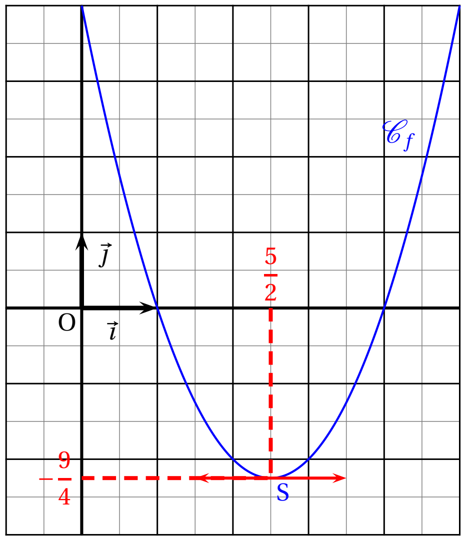


FIGURE I.4 – Représentation graphique de f.

On déduit du théorème I.6.1 le tableau de variations de P en fonction du signe de a.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\nearrow$	$+\infty$

FIGURE I.5 – Lorsque $a > 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{\Delta}{4a}$	$\searrow$	$-\infty$

FIGURE I.6 – Lorsque $a < 0$.

I.6.3 Factorisation et résolution d'équations

Dans une décomposition en produit, tout facteur de degré1 apporte une racine au polynôme. On en déduit que si P peut se décomposer en produit de deux facteurs de degré 1 alors P a au moins une racine. Ou encore, par contraposition : si un polynôme de degré 2 n'a pas de racine alors on ne peut pas le décomposer en produit de deux facteurs de degré 1.

Reprenons la forme canonique de P, (I.1) dans le cas où : $\Delta > 0$. On a alors :

$$\mathrm{P}(x) = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right] = a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)^2\right] = a\left(x+\frac{b}{2a}-\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x+\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

On en déduit la factorisation :

$$\mathrm{P}(x) = a\left(x-\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(x-\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

En particulier P a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Nous en déduisons le théorème suivant.

THÉORÈME I.6.2

Soit P : $x \mapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un trinôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$ P a deux racines distinctes :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et pour tout réel x :

$$\mathrm{P}(x) = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Si $\Delta = 0$ P a une racine double :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

et pour tout réel x :

$$\mathrm{P}(x) = a(x - x_0)^2.$$

Si $\Delta < 0$ P n'a pas de racine et n'est pas factorisable en produit de deux facteurs de degré 1 à coefficients réels.

Remarques

1. *Si on remplace Δ par 0 dans les formules de calcul de x_1 et x_2, on obtient :* $x_1 = x_2 = -\dfrac{b}{2a} = x_0$.

2. *Si a et c sont de signes contraires, alors $\Delta > 0$ et P a deux racines distinctes.*

3. *Bien qu'exhaustive, cette méthode n'est pas opportune dans le cas ou la factorisation du polynôme est immédiate (identité remarquable ou polynôme P qui est la somme de 2 monômes).*

4. *Le théorème I.6.2 peut être aussi bien utilisé pour factoriser un polynôme du second degré,P, que pour résoudre l'équation,* $\mathrm{P}(x) = 0$ *(voir corollaire I.6.3).*

Exercice I.6.1. ***Factoriser lorsque cela est possible.***

a. $\mathbf{P(x) = 2x^2 + 3x - 6}$.

b. $\mathbf{P(x) = 2x^2 - 8x + 8}$.

c. $\mathbf{P(x) = 2x^2 - 5x + 8}$.

d. $\mathbf{P(x) = -5x^2 + 3x + 2}$.

Solution

a. *On a :* $\Delta = 3^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 57$ *; donc* $\Delta > 0$ *et* P *a deux racines :*

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{57}}{4} \quad \textit{et} \quad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{57}}{4}.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbf{P(x) = 2\left(x - \frac{-3 - \sqrt{57}}{4}\right)\left(x - \frac{-3 + \sqrt{57}}{4}\right)}}.$$

b. Méthode des identités

$$\boxed{\mathbf{P(x) = 2\left(x^2 - 4x + 4\right) = 2(x - 2)^2}}.$$

Méthode du discriminant *On a :* $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 8 = 0$ *; donc* $\Delta = 0$ *et* P *a une racine double :*

$$x_0 = \frac{8}{4} = 2.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbf{P(x) = 2(x - 2)^2}}.$$

c. *On a :* $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (8) = 39$ *; donc* $\Delta < 0$.

$$\boxed{\textbf{\textit{P n'est pas factorisable.}}}$$

d. Méthode de la racine évidente *On voit que 1 est racine évidente, donc pour tout réel x :*

$$\boxed{\mathbf{P(x) = (x - 1)(-5x - 2)}}.$$

Méthode du discriminant *On a :* $\Delta = 3^2 - 4 \times (-5) \times 2 = 49 = 7^2$ *; donc* $\Delta > 0$ *et* P *a deux racines :*

$$x_1 = \frac{-3 - 7}{-10} = 1 \quad \textit{et} \quad x_2 = \frac{-3 + 7}{-10} = -\frac{2}{5}.$$

On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{\mathbf{P(x) = 2(x-1)\left(x+\frac{5}{2}\right)}}.$$

□

COROLLAIRE I.6.3

Soit a, b et c trois réels (avec $a \neq 0$), E l'équation

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad \text{(E)}$$

et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$ (E) a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Si $\Delta = 0$ (E) a une seule solution :

$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$

Si $\Delta < 0$ (E) n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice I.6.2. ***Résoudre dans $\mathbb{R}$.***

a. $\mathbf{3x^2 + 5x - 7 = 0.}$

b. $\mathbf{3x^2 - 5x - 2 = 0.}$

c. $\mathbf{3x^2 + 5x + 7 = 0.}$

d. $\mathbf{-5x^2 + 4x - \frac{4}{5} = 0.}$

Solution a. *On a : $\Delta = 25 - 4 \times 3 \times (-7) = 109$; donc $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions :*

$$x_1 = \frac{-5-\sqrt{109}}{6} \quad \textit{et} \quad x_2 = \frac{-5+\sqrt{109}}{6}.$$

$$\boxed{\mathbf{S = \left\{\frac{-5-\sqrt{109}}{6}, \frac{-5+\sqrt{109}}{6}\right\}}}.$$

b. Méthode de la racine évidente *On voit que 2 est racine évidente, donc pour tout réel x :*

$$3x^2 - 5x - 2 = (x-2)(3x+1).$$

$$\boxed{\mathbf{S = \left\{2; -\frac{1}{3}\right\}}}.$$

c. *On a : $\Delta = 25 - 4 \times 3 \times 7 = -59$; donc $\Delta < 0$.*

$$\boxed{\mathbf{S = \emptyset}}.$$

d. Méthode des identités

$$-5x^2 + 4x - \frac{4}{5} = -5\left(x^2 - \frac{4}{5}x + \frac{4}{25}\right) = -5\left(x - \frac{2}{5}\right)^2.$$

$$\boxed{\mathbf{S = \left\{\frac{2}{5}\right\}}}.$$

Méthode du discriminant *On a : $\Delta = 16 - 4 \times (-5) \times \left(-\frac{4}{5}\right) = 0$; donc $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution :*

$$x_0 = \frac{-4}{-10} = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{\mathbf{S = \left\{\frac{2}{5}\right\}}}.$$

□

I.6.4 Signe d'un trinôme

On se propose de déterminer le signe de $\mathrm{P}(x) = ax^2 + bx + c$ en fonction de x. On a vu en I.6.3 que lorsque $\Delta > 0$, on a la factorisation :

$$\mathrm{P}(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)\,.$$

Donc en supposant que $x_1 < x_2$, on en déduit le tableau suivant :

x		x_1		x_2	
a	signe de a				
$x - x_1$	$-$	0	$+$		$+$
$x - x_2$	$-$		$-$	0	$+$
$\mathrm{P}(x)$	signe de a	0	signe de $-a$	0	signe de a

Lorsque $\Delta < 0$, d'après (I.1) : $\mathrm{P}(x) = a \underbrace{\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2}\right]}_{\text{strictement positif}}$; donc P est du signe de a.

Nous en déduisons le théorème suivant.

THÉORÈME I.6.4

Soit $\mathrm{P} : x \mapsto ax^2 + bx + c$ (avec $a \neq 0$) un trinôme du second degré et $\Delta = b^2 - 4ac$ son discriminant.

Si $\Delta > 0$ $\quad \mathrm{P}(x)$ est du signe de a à l'extérieur des racines et du signe contraire à l'intérieur.

Si $\Delta = 0$ $\quad \mathrm{P}(x)$ est du signe de a et s'annule en $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

Si $\Delta < 0$ $\quad \mathrm{P}(x)$ est du signe de a.

Exercice I.6.3. ***Étudier le signe des polynômes suivants.***

a. $\mathbf{P_1 : x \mapsto -2x^2 + 3x + 4}$.

b. $\mathbf{P_2 : x \mapsto 3x^2 + 3x + 4}$.

c. $\mathbf{P_3 : x \mapsto -5x^2 + 2x - \frac{1}{5}}$.

Solution **a.** *On a :* $\Delta = 9 - 32 = 41$ *; donc* $\Delta > 0$ *et* P_1 *a deux racines :*

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{41}}{-4} \qquad \textit{et} \qquad x_2 = \frac{-3 + \sqrt{41}}{-4}.$$

On en déduit que le signe de P_1 *est donné par le tableau suivant.*

x		$\frac{3 - \sqrt{41}}{4}$		$\frac{3 + \sqrt{41}}{4}$	
$\mathrm{P}_1(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

b. *On a :* $\Delta = 9 - 48 = -39$ *; donc* $\Delta < 0$.

$$\boxed{\mathbf{P_2 > 0 \textit{ sur } \mathbb{R}.}}$$

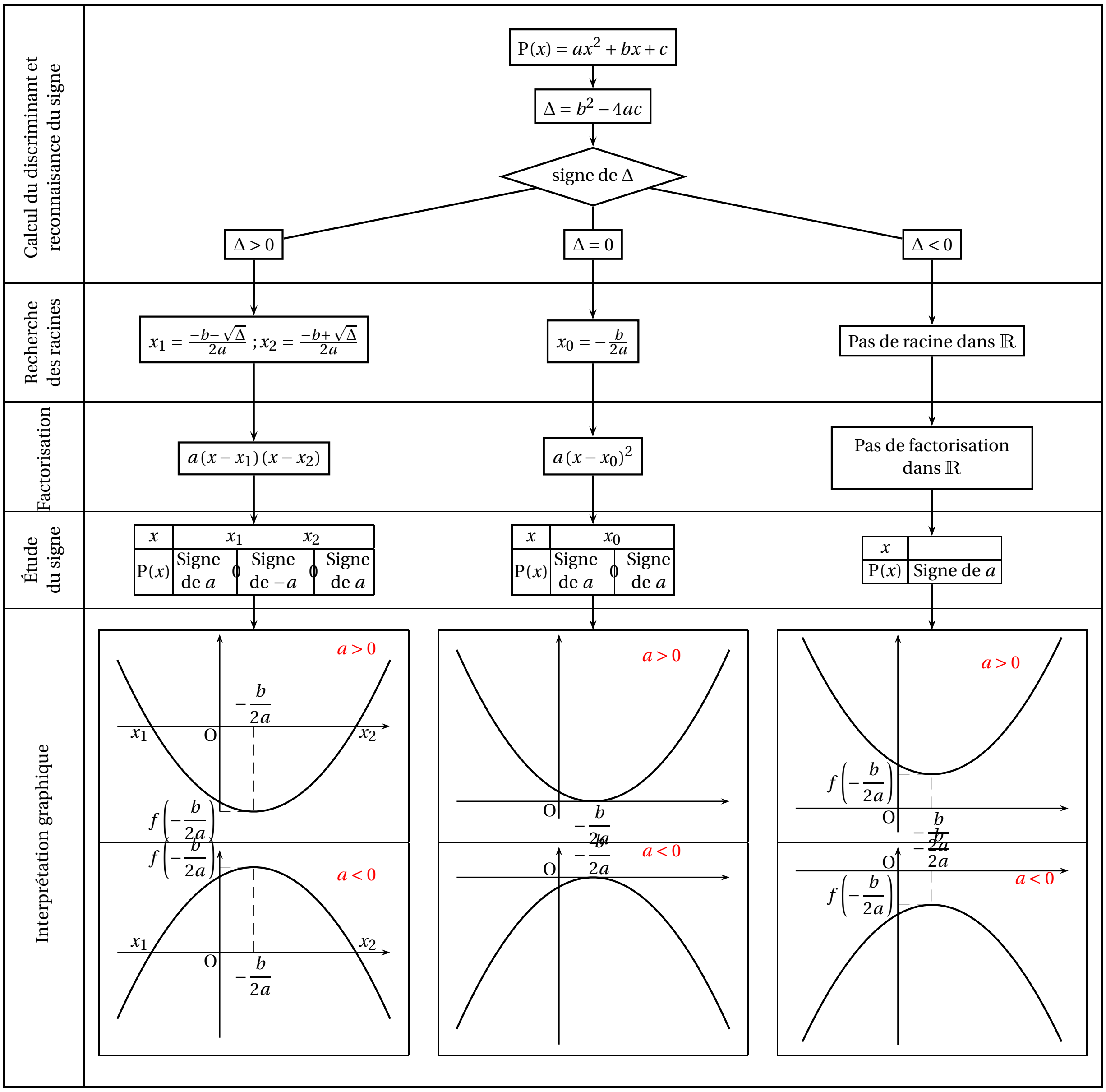
c. *On a :* $\Delta = 4 - 4 = 0$ *; donc* $\Delta = 0$ *et* P_3 *a une seule racine :*

$$x_0 = \frac{-2}{-10} = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{\mathbf{P_2 \geqslant 0 \textit{ sur } \mathbb{R} \textit{ et } P_2 \textit{ est s'annule seulement en } \frac{2}{5}.}}$$

□

I.6.5 Tableau récapitulatif



I.6.6 Travaux dirigés

I.6.6.a Factorisation d'expressions bicarrées

Les trinômes bicarrés sont les trinômes de la forme $P : x \mapsto ax^4 + bx^2 + c$.
L'objectif de ce travail dirigé est de dégagé à travers quelques exemples une méthode générale permettant de décomposer n'importe quel trinôme bicarré en produit de deux facteurs de degré 2.

Partie A – avec le discriminant

Factoriser (lorsque c'est possible) les polynômes suivants en utilisant la méthode du discriminant (*on pourra poser :* $X = x^2$).

1. $P_1 : x \mapsto 2x^4 + 3x^2 - 1$.
2. $P_2 : x \mapsto x^4 + x^2 + 1$.
3. $P_3 : x \mapsto 6x^4 - 5x^2 - 6$.
4. $P_4 : x \mapsto x^4 + 16$.
5. $P_5 : x \mapsto 2x^4 - 7x^2 + 6$.
6. $P_6 : x \mapsto 2x^4 - x^2 + 8$.

Partie B – sans le discriminant

On constate que certains polynômes considérés ci-dessus ont un discriminant strictement négatif et ne sont donc pas factorisables par la méthode du discriminant. On se rappelle alors que cette méthode découle de la forme canonique que nous avions obtenue en factorisant par le coefficient dominant puis en considérant les deux premiers termes du facteur de degré 2 comme le début d'un carré. L'idée est alors, non pas de considérer les deux premiers termes du facteur de degré 2 comme le début d'un carré, mais de considérer les termes extrêmes du facteur de degré 2 comme les termes extrêmes d'un carré.
Factoriser les polynômes qui ne l'ont pas été dans la partie **A.**

I.6.6.b Équations en somme et produit

1. Soit $\mathrm{P} : x \mapsto ax^2 + bx + c$ un trinôme du second degré dont le discriminant est strictement positif.
Exprimer en fonction de a, b et c la somme et produit des racines.

2. Soit α et β deux nombres dont on connaît la somme, s et le produit, p.
Démontrer que α et β sont les racines du polynôme : $\mathrm{P} : x \mapsto x^2 - sx + p$.

3. Un rectangle a pour périmètre 24 et pour aire 35, déterminer ses dimensions.

4. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x + y = 4 \\ xy = 1 \end{cases}$

5. Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant : $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = -12 \end{cases}$

I.6.7 Exercices

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\,)$ (unité graphique : 1 cm).

I.6.a. Écrire $\mathrm{P} : x \mapsto x^2 - 2x + 2$ sous forme canonique.

I.6.b. Écrire $\mathrm{Q} : x \mapsto 4x^2 - 2x + 2$ sous forme canonique.

I.6.c. Écrire $\mathrm{R} : x \mapsto -5x^2 + 10x + 2$ sous forme canonique.

I.6.d. Tracer la courbe $\mathscr{P}$ d'équation $y = x^2 - 2x + 2$.

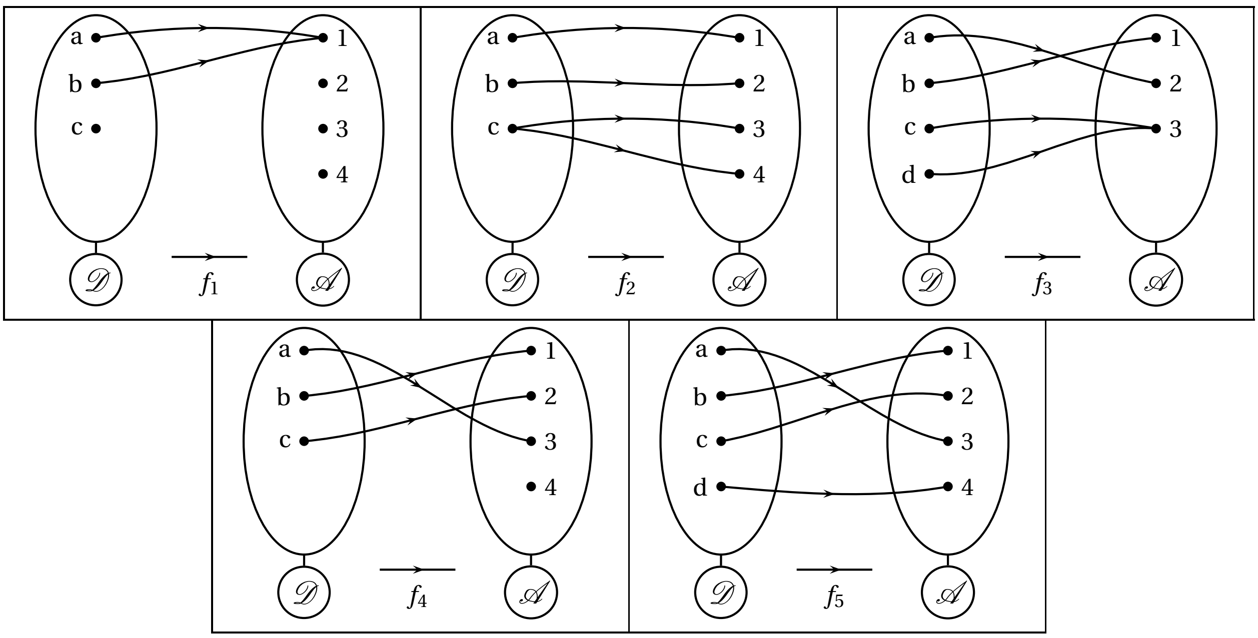
I.6.e. Tracer la courbe $\mathscr{P}$ d'équation $y = -3x^2 - 12x - 4$.

I.7 Applications

I.7.1 Introduction

Sur les schémas sagittaux de la table I.1 figurent des relations entre un ensemble de départ, $\mathscr{D}$, et un ensemble d'arrivée, $\mathscr{A}$.

TABLE I.1 – Relations entre deux ensembles.



Une relation *univoque* est une relation dans laquelle tout élément de l'ensemble de départ à une image et une seule dans l'ensemble d'arrivée :
- f_1 n'est pas univoque car c n'a pas d'image ;
- f_2 n'est pas univoque car c a plusieurs images ;
- f_3, f_4, f_5 sont univoques.

Une relation *biunivoque* est une relation univoque dans laquelle tout élément de l'ensemble d'arrivée à un antécédent et un seule dans l'ensemble de départ :
- f_3 n'est pas biunivoque car 3 a plusieurs antécédents ;
- f_4 n'est pas univoque car 4 n'a pas d'antécédent ;
- f_5 est biunivoque ;
- f_2 n'est pas biunivoque car elle n'est pas univoque.

DÉFINITIONS I.7.1

(1) Une application est une relation univoque entre un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée.
(2) Une bijection est une relation biunivoque entre un ensemble de départ et un ensemble d'arrivée.

Notations et vocabulaire

1. *Pour définir une application f de $\mathscr{D}$ vers $\mathscr{A}$, on peut écrire :*

$$f : \begin{array}{rcl} \mathscr{D} & \longrightarrow & \mathscr{A} \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}.$$

Par exemple, l'application , f, de $[1;2]$ vers $\mathbb{R}$ définie par, $f(x) = 2x - 3$, pourra être notée :

$$f : \begin{array}{rcl} [1;2] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 2x-3 \end{array}.$$

2. *Le graphe d'une relation est l'ensemble des couples de $\mathscr{D} \times \mathscr{A}$ dont les éléments sont en relation. Par exemple, le graphe de f_1 est : $\{(a;1);(b;1)\}$.*
Plus généralement, le graphe d'une application, f, est l'ensemble : $\{(x;y) \in \mathscr{D} \times \mathscr{A} \mid y = f(x)\}$.
Par exemple, le graphe de f_1 est : $\{(a;2);(b;1);(c;3);(d;3)\}$.
3. *Lorsqu'une application, f, est une bijection, on dit aussi que f est bijective.*
4. *Si f est bijective et si y est un élément de $\mathscr{A}$, l'antécédent de y par f est noté $f^{-1}(y)$.*
On a alors : $\quad \forall (x;y) \in \mathscr{D} \times \mathscr{A}, \quad y = f(x) \iff x = f^{-1}(y).$
5. *On définit ainsi la* bijection réciproque *de f, notée f^{-1}, qui est une bijection de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{D}$.*
6. *Pour tout ensemble, $\mathscr{E}$, l'*application identique *de $\mathscr{E}$, notée $\mathrm{Id}_{\mathscr{E}}$, est l'application qui a tout élément de $\mathscr{E}$ associe lui-même*

D'après les définitions I.7.1 une application est déterminée par son ensemble de départ, son ensemble d'arrivée et son graphe ; on en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME I.7.1

Deux applications sont égales si, et seulement si :
- elles ont le même ensemble de départ ;
- elles ont le même ensemble d'arrivée ;
- chaque élément de l'ensemble de départ a la même image par les deux applications.

Remarque *Si f est une application d'un ensemble $\mathscr{E}$ vers un ensemble $\mathscr{F}$ et g est une application de $\mathscr{F}$ vers un ensemble $\mathscr{G}$, alors $g \circ f$ est une application de $\mathscr{E}$ vers $\mathscr{G}$*

THÉORÈME I.7.2

Soit f une application d'un ensemble $\mathscr{D}$ dans un ensemble $\mathscr{A}$.
(1) Si f est bijective, alors : $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$ et $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$.
(2) S'il existe une application g de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{D}$ telle que, $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$, alors : f est bijective et sa bijection réciproque est g.

Démonstration (1) Les applications $f \circ f^{-1}$ et $\mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$ ont le même ensemble de départ et d'arrivée, $\mathscr{A}$.
Il ne reste qu'à démontrer que chaque élément de l'ensemble de départ a la même image par les deux applications. Soit x un élément de $\mathscr{D}$ désignons par y son image par f, on a donc : $x = f^{-1}(y)$.
Ainsi : $\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\left(f(x)\right) = f^{-1}\left(y\right) = x = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}(x)$. Donc : $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$.
Les applications $f \circ f^{-1}$ et $\mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$ ont le même ensemble de départ et d'arrivée, $\mathscr{A}$.
Soit y un élément de $\mathscr{A}$ désignons par x son antécédent par f, on a donc : $y = f(x)$ et $x = f^{-1}(y)$.
Ainsi : $\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f\left(f^{-1}(y)\right) = f(x) = y = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}(y)$. Donc : $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$.
(2) Pour démontrer que f est bijective, il suffit de montrer que tout élément de $\mathscr{A}$ a un unique antécédent par f.

existence Tout élément, y, de $\mathscr{A}$ a pour antécédent : $g(y)$. En effet : $f(g(y)) = f \circ g(y) = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}(y) = y$.

unicité Soit x et x' deux antécédents d'un élément, y, de $\mathscr{A}$. Démontrons que : $x = x'$.
On a : $x = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y) = g(f(x')) = g \circ f(x') = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}(x') = x'$

Démontrons que g est la bijection réciproque de f. Les application g et f^{-1} ont le même ensemble de départ, $\mathscr{A}$, et le même ensemble d'arrivée, $\mathscr{D}$. Soit $y \in \mathscr{A}$. Posons : $x = f^{-1}(y)$. On a : $f^{-1}(y) = x = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}(x) = g \circ f(x) = g(f(x)) = g(y)$. Donc : $f^{-1} = g$. □

Pour démontrer l'unicité d'un objet vérifiant une propriété, il suffit de considérer deux objets vérifiant la propriété et de démontrer qu'ils sont identiques.

I.7.2 Image, image réciproque d'un ensemble

Soit D un sous-ensemble de $\mathscr{D}$. L'image de D par une application, f, est l'ensemble des images des éléments de D. Cet ensemble est noté : $f(\mathrm{D})$.

$$f(\mathrm{D}) = \{f(x) \mid x \in \mathrm{D}\}$$

Exemple *En reprenant les applications de table I.1, il vient :* $f_3(\{b;c\}) = \{1;3\}$

Soit A un sous-ensemble de $\mathscr{A}$. L'image de réciproque de A par une application, f, est l'ensemble des antécédents des éléments de A. Cet ensemble est noté : $f^{-1}(\mathrm{A})$.

$$f^{-1}(\mathrm{A}) = \{x \in \mathscr{D} \mid f(x) \in \mathrm{A}\}$$

Exemple *En reprenant les applications de la table I.1, il vient :* $f_3^{-1}(\{1;3\}) = \{b;c;d\}$

Remarque *D'après les deux exemples précédents, lorsque f n'est pas bijective, les ensembles D et $f^{-1}(f(\mathrm{D}))$ ne sont pas forcément égaux.*

I.7.3 Cas ou les ensembles de départ et d'arrivée sont des intervalles

Dans ce paragraphe I et J désignent deux intervalles de $\mathbb{R}$, f désigne une application de I vers J et $\mathscr{C}_f$ désigne la représentation graphique de f. Le graphe de f est donc l'ensemble des coordonnées des points de $\mathscr{C}_f$.
Dans l'hypothèse ou f est bijective, désignons par $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ la représentation graphique de f^{-1}. Pour tout point $\mathrm{M}(a;b)$ on désigne par M' le symétrique de M par rapport à la première bissectrice. M' est donc, d'après I.8.2, le point de coordonnées $(b;a)$. On a :

$$\mathrm{M} \in \mathscr{C}_f \iff b = f(a) \iff a = f^{-1}(b) \iff \mathrm{M}' \in \mathscr{C}_{f^{-1}}.$$

On en déduit que les courbes $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_{f^{-1}}$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Exemple *L'application* cos *de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ n'est pas bijective car le nombre 1 a plusieurs antécédents (tous les multiples de 2π). Cependant, si on restreint* cos *à l'intervalle $[0;\pi]$, on a le tableau de variation suivant.*

x	0		π
$\cos(x)$	1	$\searrow$	-1

Ce tableau suggère et nous admettons que l'application,

$$f : \begin{array}{rcl} [0;\pi] & \longrightarrow & [-1;1] \\ x & \longmapsto & \cos(x) \end{array}$$

est une bijection. Sa bijection réciproque est la fonction Arc cosinus, notée Arccos*, c'est une bijection de $[-1;1]$ dans $[0;\pi]$. Sa courbe représentative se déduit de celle de la fonction cosinus par la réflexion d'axe Δ.*

Exercice I.7.1. ***On considère l'application :***

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}\setminus\{-1\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{2\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{2x}{x+1} \end{array}.$$

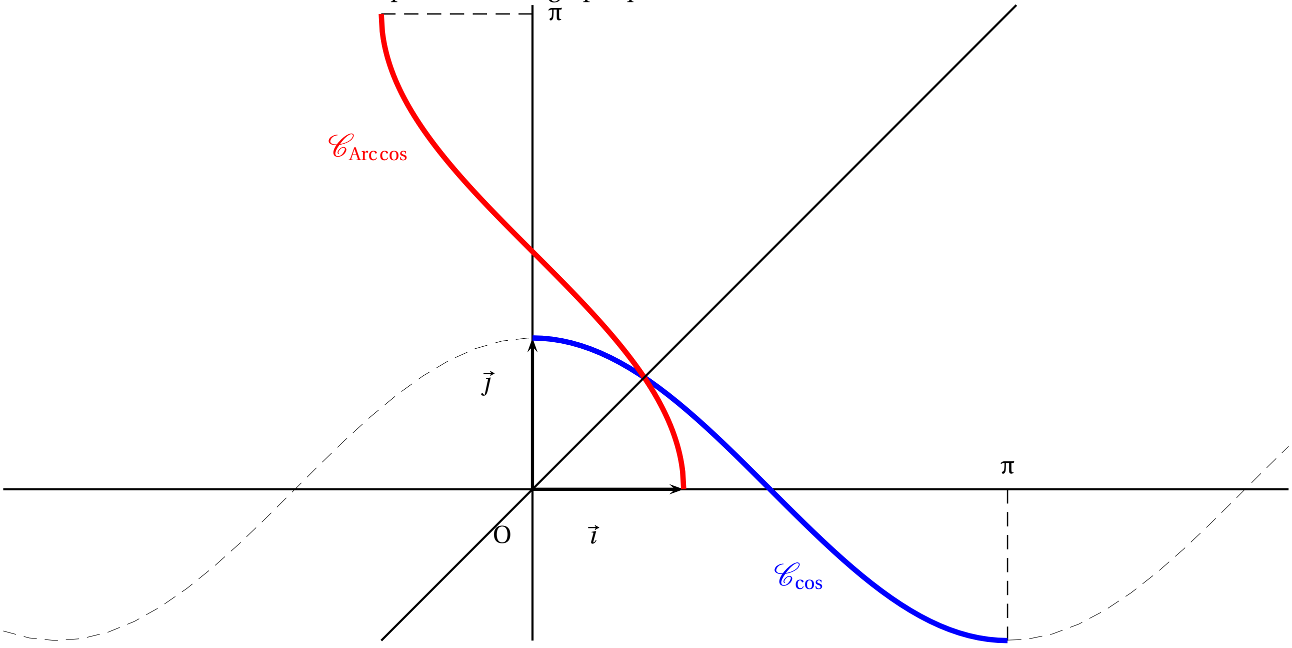
1. Vérifier que l'application f est bien définie.

2. Démontrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

Solution ***1.*** *Pour vérifier que f est bien définie, il suffit de vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}\ f(x) \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$; c'est-à-dire que l'équation : $f(x) = 2$; n'a pas de solution dans $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$. Résolvons cette équation dans cet ensemble.*

$$\begin{aligned} f(x) = 2 &\iff \frac{2x}{x+1} = 2 \\ &\iff 2x = 2x + 2 \qquad \text{car } x \neq -1 \\ &\iff 0 = 2 \end{aligned}$$

FIGURE I.7 – Représentations graphiques de fonctions cosinus et Arc cosinus.



L'application f est bien définie.

2. Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ et $y \in \mathbb{R}\setminus\{2\}$. On a :

$$\begin{aligned}
y = f(x) &\iff \frac{2x}{x+1} = y \\
&\iff 2x = yx + y \qquad \text{car } x \neq -1 \\
&\iff x(2-y) = y \\
&\iff x = \frac{y}{2-y} \qquad \text{car } y \neq 2
\end{aligned}$$

On en déduit que y a un antécédent unique : $\dfrac{y}{2-y}$.

f est bijective et sa réciproque est

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{-1\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{-x+2} \end{array}.$$

□

I.7.4 Exercices

I.7.a. Déterminer la bijection réciproque de, $f : x \mapsto 3x+2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

I.7.b. Déterminer la bijection réciproque de, $f : x \mapsto -5x+4$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

I.7.c. On considère l'application :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}\setminus\{-2\} & \longrightarrow & \mathbb{R}\setminus\{3\} \\ x & \longmapsto & \dfrac{3x+4}{x+2} \end{array}.$$

1. Vérifier que f est bien définie.

2. Démontrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

I.7.d. On considère l'application, $f : x \mapsto x^2$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^+$. Est-elle bijective ? justifier.

I.7.e. On considère l'application, $f : x \mapsto -x^2$, de $\mathbb{R}^+$ vers $\mathbb{R}^-$. Démontrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

I.7.f. On admet que la fonction sinus réalise une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$ dans $[-1;1]$. La bijection réciproque est appelée Arc sinus et notée Arcsin. Dresser le tableau de variation de Arcsin, puis tracer sur un même graphique les représentations graphiques de sin et Arcsin.

I.7.g. ⋆⋆ On considère l'application, $f : x \mapsto x + \sqrt{x^2+1}$, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{+\star}$.

1. Vérifier que pour tout réel, x : $f(x) > 0$.

2. Démontrer que f est bijective et déterminer sa réciproque.

I.7.h. $\star$ f est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I.
Déterminer le sens de variation de f^{-1}.

I.7.i. $\star$ f est une bijection strictement décroissante de $\mathbb{R}$ dans un intervalle I.
Déterminer le sens de variation de f^{-1}.

I.7.j. $\star$ f est une application d'un ensemble $\mathscr{D}$ vers un ensemble $\mathscr{A}$ et g est une application de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{D}$ telle que : $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$. g est-elle la bijection réciproque de f ? il conviendra de justifier la réponse par une démonstration ou par un contre-exemple.

I.7.k. $\star$ f est une application d'un ensemble $\mathscr{D}$ vers un ensemble $\mathscr{A}$ et g est une application de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{D}$ telle que : $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$. g est-elle la bijection réciproque de f ? il conviendra de justifier la réponse par une démonstration ou par un contre-exemple.

I.7.l. f est une bijection d'un ensemble $\mathscr{D}$ vers un ensemble $\mathscr{A}$ et g est une application de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{D}$ telle que : $f \circ g = \mathrm{Id}_{\mathscr{A}}$. Démontrer que g est la bijection réciproque de f.

I.7.m. f est une bijection d'un ensemble $\mathscr{D}$ vers un ensemble $\mathscr{A}$ et g est une application de $\mathscr{A}$ vers $\mathscr{D}$ telle que : $g \circ f = \mathrm{Id}_{\mathscr{D}}$. Démontrer que g est-elle la bijection réciproque de f.

I.7.n. f est une bijection d'un ensemble $\mathscr{E}$ vers un ensemble $\mathscr{F}$ et g est une bijection de $\mathscr{F}$ vers un ensemble $\mathscr{G}$. Démontrer que $g \circ f$ est une bijection de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{G}$ et déterminer une expression de la bijection réciproque de $g \circ f$ en fonction de f^{-1} et g^{-1}.

I.8 Expressions analytiques de quelques transformations

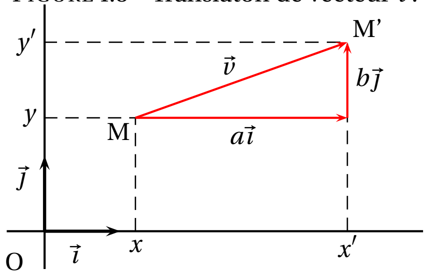
Pour chaque transformation, t, étudiée, $\mathrm{M}'(x', y')$ désignera l'image de $\mathrm{M}(x, y)$. L'expression analytique de t est l'expression de x' et y' en fonction de x et y.

I.8.1 Expression analytique d'une translation

Désignons par $t_{\vec{v}}$ la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. On a pour tout point $\mathrm{M}(x, y)$ d'image $\mathrm{M}'(x', y')$:

$$\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \vec{v}.$$

FIGURE I.8 – Translaton de vecteur $\vec{v}$.



On en déduit en introduisant l'origine O par lar la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}'} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} + \vec{v}.$$

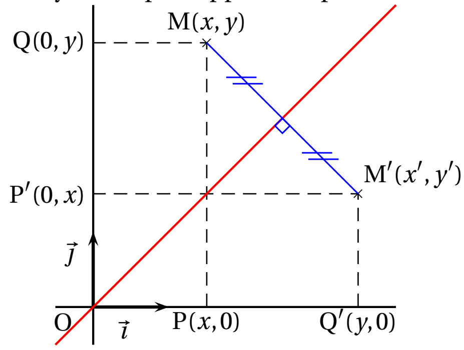
On sait que deux vecteurs sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées on en déduit l'expression analytique de t :

$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \end{cases}.$$

I.8.2 Expression analytique de la symétrie par rapport à la première bissectrice

On suppose ici que le repère $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est orthonormé. Δ désigne la droite d'équation : $y = x$. Δ est l'une des bissectrices des axes $\mathrm{O}x$ et $\mathrm{O}y$. On dit que c'est la première bissectrice. La seconde bissectrice à pour équation : $y = x$.
Désignons par s_Δ la symétrie d'axe Δ. s_Δ transforme $\mathrm{O}x$ en $\mathrm{O}y$ et $\mathrm{O}y$ en $\mathrm{O}x$. Désignons par P et Q les projetés othogonaux respectifs de M sur $\mathrm{O}x$ et $\mathrm{O}y$, ils ont respectivement pour coordonnées $(x, 0)$ et $(0, y)$. Le quadrilatère OPMQ a trois angles droits (en O, P et Q), c'est donc un rectangle. s_Δ est une isométrie elle conserve donc les distances et

FIGURE I.9 – Symétrie par rapport à la première bissectrice.



l'orthogonalité. En particulier elle transformera le rectangle OPMQ en un rectangle OP′M′Q′. P est sur Ox donc P′ est sur Oy, de plus OP′ = OP, donc P′ a pour coordonnées $(0, x)$. De même Q′ a pour coordonnées $(y, 0)$. P′ et Q′ sont les projetés orthogonaux de M′ sur les axes de coordonnées, on en déduit l'expression analytique de s_Δ :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}.$$

I.8.3 Quelques expressions analytiques

Plus généralement, un graphique adapté permet de retrouver les expressions analytiques suivantes :

I.8.4 Exercice résolu

Exercice I.8.1. ***Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On désigne par par $\mathscr{P}$ la parabole d'équation, $y = x^2$, et par $\mathscr{P}'$ son image par la translation, t, de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}$.***
Déterminer une équation de $\mathscr{P}'$.

Solution *La translation a pour expression analytique :*

$$\begin{cases} x' = x + 2 \\ y' = y + 3 \end{cases}$$

Pour tout point $M(x, y)$ *du plan d'image* $M'(x', y')$ *par la trans lation, on a :*

$$M' \in \mathscr{P}' \iff M \in \mathscr{P} \iff y = x^2 \iff y' - 3 = \left(x' - 2\right)^2 \iff y' = \left(x' - 2\right)^2 + 3.$$

$\mathscr{P}'$ *a donc pour équation :*

$$\boxed{\boldsymbol{y = (x-2)^2 + 3}}.$$

□

I.8.5 Exercices

Dans toute cette série, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

I.8.a. Donner une expression analytique de la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$.

I.8.b. Donner une expression analytique de la réflexion d'axe d'équation : $x = 3$.

I.8.c. Donner une expression analytique de la symétrie de centre $A(-2; 3)$.

I.8.d. Donner une expression analytique de l'affinité orthogonale d'axe Ox et de rapport -2.

I.8.e. On désigne par par $\mathscr{P}$ la parabole d'équation, $y = x^2$, et par $\mathscr{P}'$ son image par la symétyrie, s, de centre $A(-1; -2)$.
Déterminer une équation de $\mathscr{P}'$.

I.9 Fonctions associées

Dans toute cette section, u désigne une fonction de référence, c'est-à-dire une fonction que l'on supposera bien connue, $\mathscr{C}_u$ désignera sa représentation graphique, f désignera une fonction définie à partir de u (par exemple par $f(x) = u(x+3) - 4$) et $\mathscr{C}_f$ désignera la représentation graphique de f.
Le but de cette section est de dégager un procédé permettant, sans calcul, de tracer $\mathscr{C}_f$ connaissant $\mathscr{C}_u$.

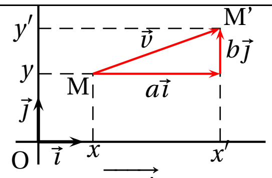
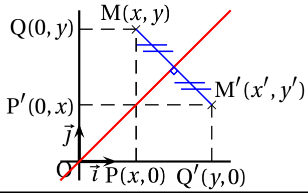
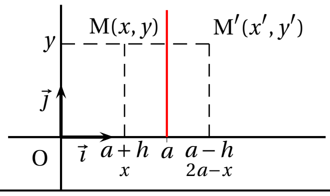
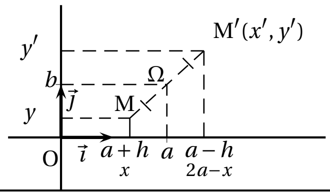
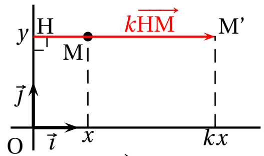
Transformation	**M a pour image M'**	**Expresion analytique**
Translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$	 $\overrightarrow{\mathrm{MM}'} = \vec{v}$	$\begin{cases} x' = x+a \\ y' = y+b \end{cases}$
Symétrie par rapport à la première bissectrice		$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$
Symétrie par rapport à la droite d'équation $x = a$		$\begin{cases} x' = 2a-x \\ y' = y \end{cases}$
Symétrie de centre $\Omega(a,b)$		$\begin{cases} x' = 2a-x \\ y' = 2b-y \end{cases}$
Affinité orthogonale d'axe Oy et de rapport k	 $\overrightarrow{\mathrm{HM}'} = k\overrightarrow{\mathrm{HM}}$	$\begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases}$

TABLE I.2 – Quelques expressions analytiques.

I.9.1 Principaux cas

Les principaux cas d'associations de fonctions sont regroupés dans le tableau I.3. Pour retrouver aisément, à partir de l'expression de $f(x)$, l'expression analytique de l'application du plan dans lui-même par laquelle $\mathscr{C}_f$ est l'image de $\mathscr{C}_u$; il suffit de choisir un point $\mathrm{M}(x,y)$ sur $\mathscr{C}_u$ et de considérer son image $\mathrm{M}'(x',y')$. Dans le cas où f est définie par : $f(x) = u(x-a)+b$; les coordonnées de M' vérifieront :

$$y' = f(x') = \overbrace{u(\underbrace{x'-a}_{x})}^{y}+b;$$

d'où l'on tire l'expression analytique recherchée.

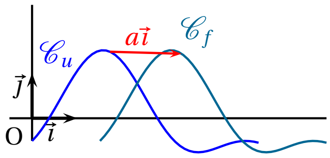
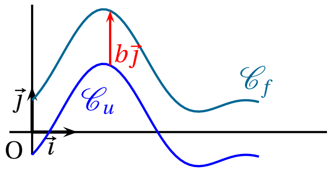
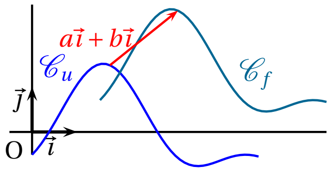
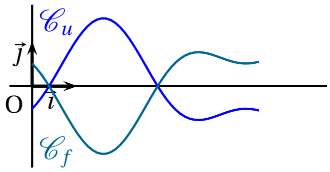
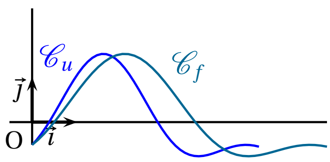
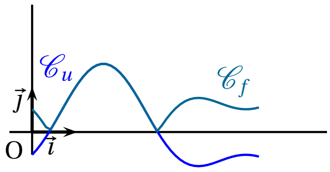
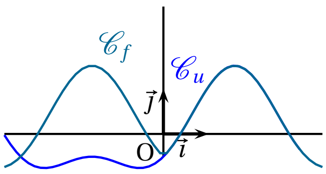
Remarques

1. *Les deux premiers cas sont des cas particuliers du troisième.*

2. *Dans les deux derniers cas l'application du plan dans lui-même employée n'est pas une transformation car elle n'est bijective*[1]*. En effet les points au-dessous de l'axe Ox n'ont pas d'antécédent et les points au-dessus de l'axe des abscisses ont deux antécédents : eux-même et leur symétrique par rapport à l'axe des abscisses.*

1. Une bijection d'un ensemble E dans un ensemble F est une application de E vers F telle que tout élément de F a un antécédent et un seul.

TABLE I.3 – Courbes de quelques fonctions associées.

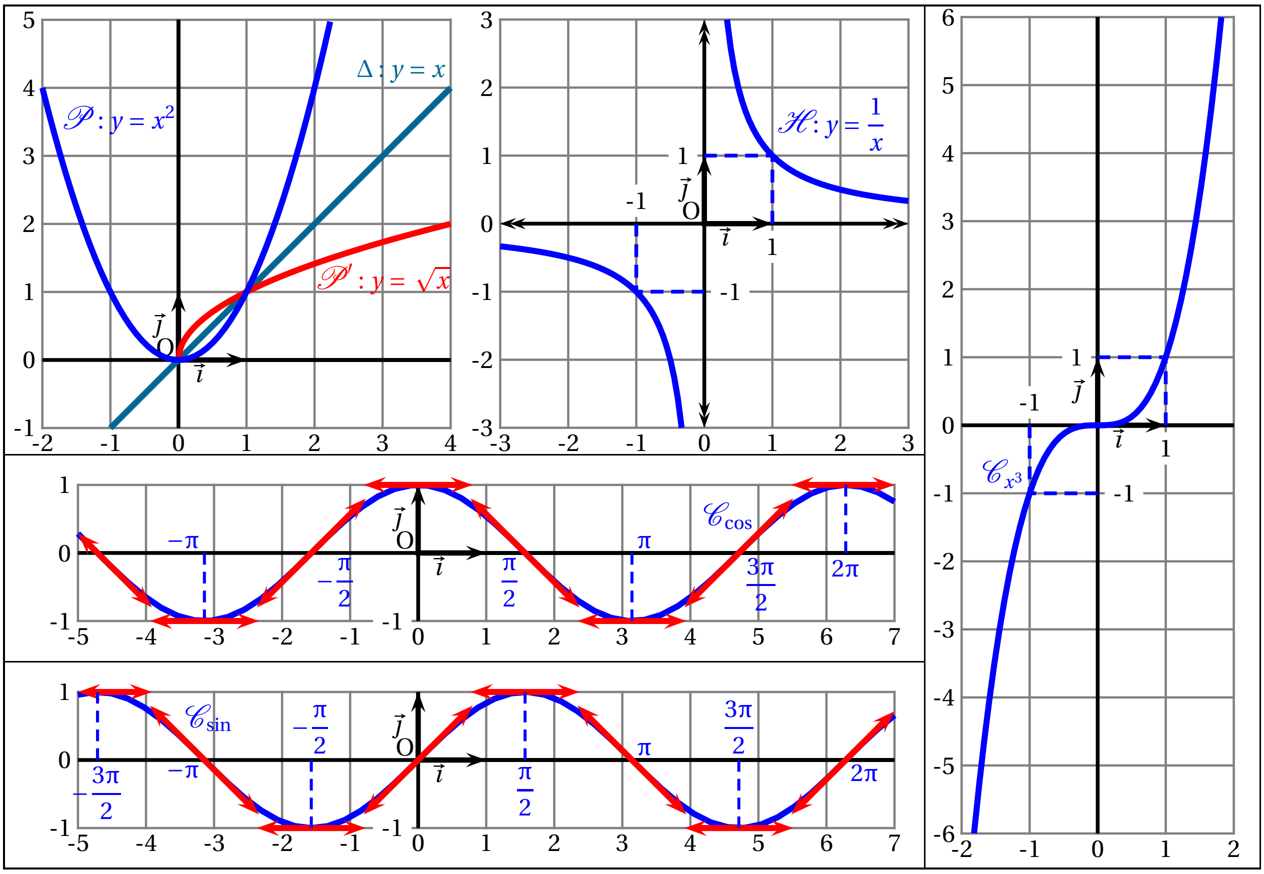
Expresion de $f(x)$	**$\mathscr{C}_u$ a pour image $\mathscr{C}_f$**	**Expresion analytique**	**Transformation**
$f(x) = u(x-a)$		$\begin{cases} x' = x+a \\ y' = y \end{cases}$	Translation de vecteur $a\vec{\imath}$
$f(x) = u(x)+b$		$\begin{cases} x' = x \\ y' = y+b \end{cases}$	Translation de vecteur $b\vec{\jmath}$
$f(x) = u(x-a)+b$		$\begin{cases} x' = x+a \\ y' = y+b \end{cases}$	Translation de vecteur $a\vec{\imath}+b\vec{\jmath}$
$f(x) = -u(x)$		$\begin{cases} x' = x \\ y' = -y \end{cases}$	Réflexion d'axe Ox
$f(x) = u(ax)$		$\begin{cases} x' = \dfrac{1}{a}x \\ y' = y \end{cases}$	Affinité orthogonale d'axe Oy et de rapport $\dfrac{1}{a}$
$f(x) = \|u(x)\|$		$\begin{cases} x' = x \\ y' = \|y\| \end{cases}$	
$f(x) = u(\|x\|)$			

I.9.2 Quelques courbes de référence

En 6e, il convient de savoir représenter graphiquement une fonction affine (ce qui a été dans les classes précédentes) et tracer l'allure des représentations graphiques des fonctions suivantes, dont les courbes dans un repère orthonormé direct sont données dans la table I.4 : $x \longmapsto x^2$; $x \longmapsto x^3$; $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$; $x \longmapsto \sqrt{x}$; $x \longmapsto \sin x$; $x \longmapsto \cos x$.
On entend ici par allure, un tracé qui respecte les contraintes suivantes : points où la tangente est horizontale ; points d'inflexions[2] ; éléments de symétries ; autre particularités graphiques.
Les applications $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto x^2$ de $\mathbb{R}^+$ dans lui-même sont des bijections réciproques l'une de l'autre. On en déduit que la $\mathscr{P}'$ et l'intersection de $\mathscr{P}$ avec le premier quadrant sont symétriques par rapport à la première bissectrice. On sait que $\mathscr{P}$ est une parabole de sommet O et d'axe Oy, Ox est donc tangent en O à $\mathscr{P}$. On en déduit que $\mathscr{P}'$ est arc de parabole de sommet O, d'axe Ox présentant une demi-tangente verticale en O.

2. Un point d'inflexion est un point où la courbe traverse sa tangente.

TABLE I.4 – Courbes de référence.



La courbe $\mathscr{H}$ est une hyperbole équilatère[3] dont les asymptotes sont les axes de coordonnées, elle a un centre de symétrie, l'origine, et deux axes de symétrie, les deux bissectrices de axes de coordonnées. La courbe $\mathscr{H}$ coupe la première bissectrice perpendiculairement.

Les représentations graphiques des fonctions cosinus et sinus sont des sinusoïdes dont les points d'inflexions sont les points d'intersection avec l'axe des abscisses. En ces points la tangente à la courbe a pour coefficient directeur -1 ou 1. Le maximum de ces fonctions est 1 et le minimum, -1.

I.9.3 Exercices résolus

Exercice I.9.1. ***Le plan est muni d'un repère othonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).***
On se propose de tracer la courbe $\mathscr{H}$ représentant graphiquement la fonction $f : x \mapsto \frac{2x+1}{x+1}$.
1. Donner l'ensemble de définition, D_f, de f et démontrer que pour tout élément, x, de cet ensemble :

$$f(x) = 2 - \frac{1}{x+1}. \tag{I.3}$$

2. Déduire de (I.3) que $\mathscr{H}$ est l'image par une transformation simple d'une courbe connue et tracer $\mathscr{H}$.

Solution

1. $\boxed{D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}}$.

Pour tout $x \in D_f$:

$$\boxed{2 - \frac{1}{x+1} = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = \frac{2x+2-1}{x+1} = \frac{2x+1}{x+1} = f(x)}.$$

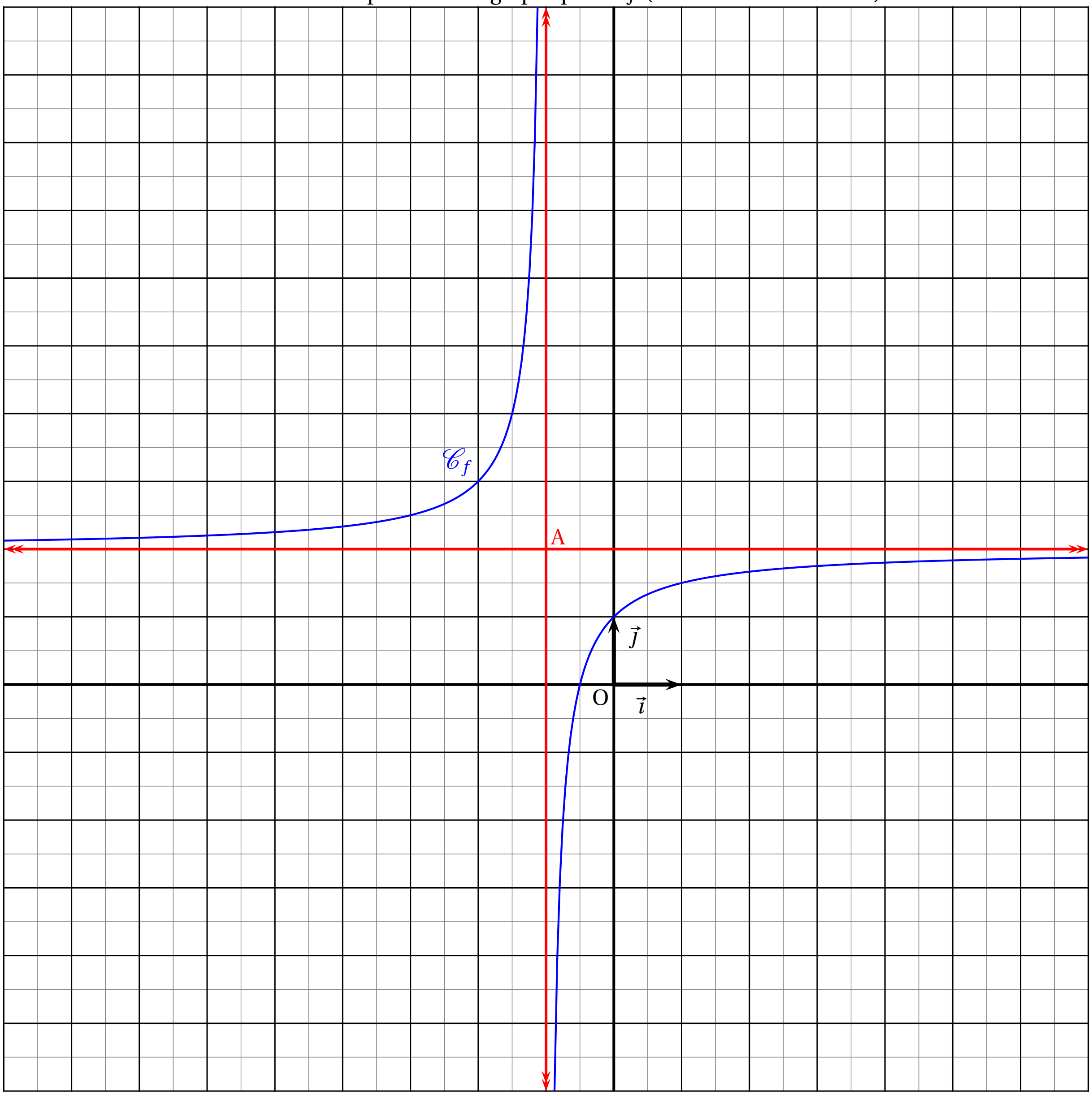
2. *D'après (I.3) :*

$$\boxed{\mathscr{H} \text{ est l'image de la courbe d'équation : } y = -\frac{1}{x} \text{ ; par la translation, } t\text{, de vecteur : } \vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}.}$$

Introduisons l'image A de l'origine, O, par t. $\mathscr{H}$ est la représentation graphique de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x}$ dans le repère $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. On en déduit la courbe de la figure I.10. □

3. Une hyperbole équilatère est une hyperbole dont les asymptotes sont perpendiculaires.

FIGURE I.10 – Repésentation graphique de f (exercices I.9.1. et I.9.2.).



Exercice I.9.2. ***Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm). Représenter graphiquement la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+1}$.***

Solution *L'ensemble de définition de f est $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$. On a :*

$$\begin{array}{r|l} 2x+1 & x+1 \\ \cline{2-2} -1 & 2 \end{array}$$

Donc pour tout $x \in \mathrm{D}_f$:

$$f(x) = \frac{2(x+1)-1}{x+1} = -\frac{1}{x+1} + 2.$$

On en déduit que la courbe représentative de f, $\mathscr{C}_f$, est l'image de l'hyperbole $\mathscr{H}$ d'équation : $y = -\dfrac{1}{x}$; par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$. On en déduit le graphique de la figure I.10. □

Pour représenter graphiquement une fonction homographique, on peut transformer son écriture en utilisant une division de fonctions affines puis en déduire la courbe par un argument de fonctions associées.

Exercice I.9.3. ***Conjecturer des fonctions f_1, f_2, f_3 dont les représentations graphiques respectives sont $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$.***

Solution *Introduisons le point* $\mathrm{A}(2;3)$*.*

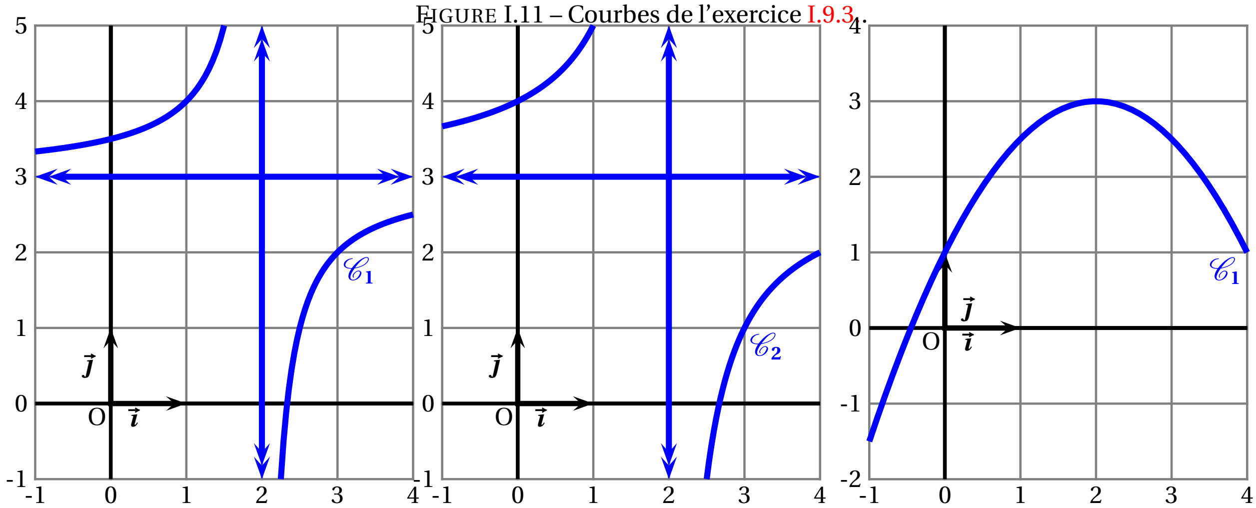


FIGURE I.11 – Courbes de l'exercice I.9.3.

Dans le repère $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\mathscr{C}_1$ *semble avoir pour équation :* $Y=-\frac{1}{X}$. *On propose donc la fonction* f_1 *définie par :*

$$f_1(x)=-\frac{1}{x-2}+3=\frac{3x-7}{x-2}.$$

Dans le repère $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\mathscr{C}_2$ *semble avoir pour équation :* $Y=-\frac{2}{X}$. *On propose donc la fonction* f_2 *définie par :*

$$f_2(x)=-\frac{2}{x-2}+3=\frac{3x-8}{x-2}.$$

Dans le repère $(A;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, $\mathscr{C}_3$ *semble avoir pour équation :* $Y=-\frac{1}{2}X^2$. *On propose donc la fonction* f_3 *définie par :*

$$f_3(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+3=-\frac{1}{2}x^2+2x+1.$$

□

Exercice I.9.4. ***m désigne un nombre réel. On considère les fonctions $f_m : x \mapsto mx+5m+3$ et $h : x \mapsto \frac{-x-2}{x+3}$ ainsi que leurs représentations graphiques respectives $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$.***

1. Déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre de points d'intersection des courbes $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$.

2. Démontrer que les droites $\mathscr{D}_m$ concourent en un point A dont il conviendra de préciser les coordonnées.

3. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).

Tracer $\mathscr{H}$, $\mathscr{D}_{-4}$, $\mathscr{D}_{-1}$ et $\mathscr{D}_0$.

Solution **1.** *Pour tout réel m, les abscisses des points d'intersection des courbes $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$ sont les solutions de l'équation :*

$$f_m(x)=h(x) \qquad (E_m)$$

dont l'ensemble de validité est $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$.
Les courbes $\mathscr{D}_m$ et $\mathscr{H}$ ont autant de points d'intersection que (E_m) a de solutions.

$$\begin{aligned}(E_m) &\iff mx+5m+3=\frac{-x-2}{x+3}\\ &\iff mx^2+3mx+5mx+15m+3x+9=-x-2\\ &\iff mx^2+(8m+4)x+15m+11=0.\end{aligned}$$

(E_0) *n'est pas une équation du second degré et :*

$$(E_0) \iff 4x+11=0 \iff x=-\frac{11}{4}.$$

Donc, pour $m=0$, (E_m) n'a qu'une solution et donc $\mathscr{H}$ et $\mathscr{D}_0$ n'ont qu'un point d'intersection.
Pour $m\neq 0$, (E_m) est une équation du second degré et le nombre de ses solutions est déterminé par le signe de son discriminant :

$$\Delta_m=(8m+4)^2-4m(15m+11)=4\left((4m+2)^2-15m^2-11m\right)=4\left(m^2+5m+4\right).$$

Δ_m *est du signe de $\left(m^2+5m+4\right)$. $\Delta=25-4\times4=9$, donc Δ_m a deux racines : $m_1=\frac{-5-3}{2}=-4$ et $m_1=\frac{-5+3}{2}=-1$.*
On en déduit le signe de Δ_m suivant les valeurs de m :

m		-4		-1		0	
Δ_m	$+$	0	$-$	0	$+$	$\|$	$+$

D'où l'on tire que :

- ***pour** $m \in \{-4;-1;0\}$, $\mathscr{H}$ **et** $\mathscr{D}_m$ **n'ont qu'un point d'intersection ;***
- ***pour** $m \in]-4;-1[$, $\mathscr{H}$ **et** $\mathscr{D}_m$ **n'ont pas de point d'intersection ;***
- ***pour** $m \in]-\infty;-4[\cup]-1;0[\cup]0;+\infty[$, $\mathscr{H}$ **et** $\mathscr{D}_m$ **ont deux points d'intersection.***

Un point $\mathrm{A}(x,y)$ *appartient à toutes les droites* $\mathscr{D}_m$ *si, et seulement si pour tout* $m \in \mathbb{R}$ *:* $y = mx+5m+3$*. Or :*

$$y = mx+5m+3 \quad \Longleftrightarrow \quad (x+5)m+3-y=0.$$

On cherche donc x *et* y *pour que le polynôme en* m *:* $(x+5)m+3-y$ *; soit le polynôme nul. Cette condition est réalisée uniquement lorsque :*

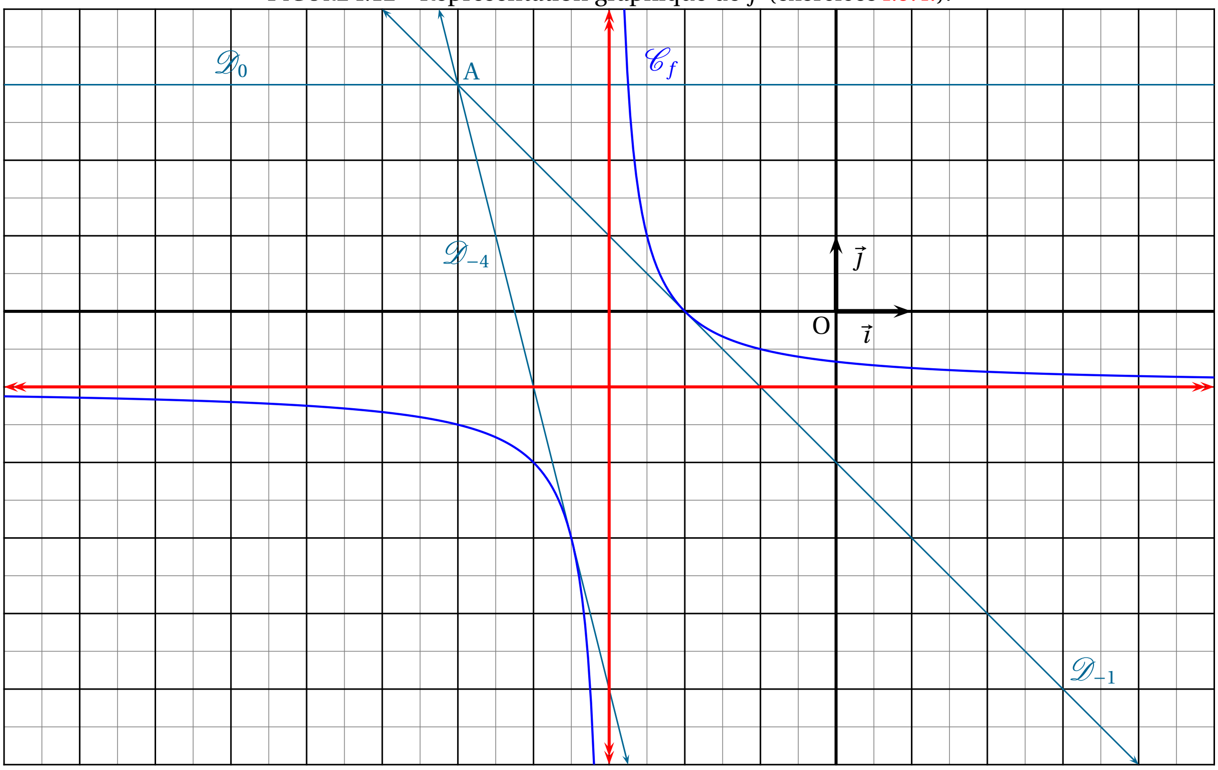
$$\begin{cases} x+5=0 \\ 3-y=0 \end{cases}$$

C'est-à-dire lorsque : $(x;y) = (-5;3)$.

$$\boxed{\textbf{\textit{Les droites }} \mathscr{D}_m \textbf{\textit{ concourent en }} \mathrm{A}(-5;3)}$$

2. $\mathscr{D}_{-4}$, $\mathscr{D}_{-1}$ et $\mathscr{D}_0$ *sont les droites d'équations respectives :* $y=-4x-17$, $y=-x-2$ et $y=3$.
De plus, pour tout $x \in \mathrm{D}_h$*, on a :* $h(x) = \dfrac{-x-2}{x+3} = \dfrac{-x-3+1}{x+3} = 1+\dfrac{1}{x+3}$*. Donc* $\mathscr{H}$ *est l'image de l'hyperbole d'équation* $y = \dfrac{1}{x}$ *par la translation de vecteur* $-3\vec{\imath}+\vec{\jmath}$*. On déduit de cette étude la figure I.12.* □

FIGURE I.12 – Représentation graphique de f (exercices I.9.4.).



Exercice I.9.5. ***Le plan est muni d'un repère orthonormé*** $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ ***(unité graphique : 1 cm).***
On considère les fonctions $f : x \mapsto 2x+3$ ***et*** $h : x \mapsto \dfrac{1}{x+3}$ ***ainsi que leurs représentations graphiques respectives*** $\mathscr{D}$ ***et*** $\mathscr{H}$***.***
Déterminer algébriquement la position relative des courbes $\mathscr{D}$ ***et*** $\mathscr{H}$ ***puis tracer ces deux courbes.***

Solution *La position relative des courbes* $\mathscr{D}$ *et* $\mathscr{H}$ *est déterminée par le signe de la fonction* $f-h$ *dont l'ensemble de définition est :* $\mathbb{R}\setminus\{-3\}$*. Pour tout réel* x *:*

$$(f-h)(x) = 2x+3-\frac{1}{x+3} = \frac{(2x+3)(x+3)-1}{x+3} = \frac{2x^2+9x+8}{x+3}.$$

Calculons le discriminant du numérateur : $\Delta = 81 - 4 \times 16 = 17$.
Donc le numérateur a deux racines :

$$x_1 = \frac{-9-\sqrt{17}}{4} \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{-9+\sqrt{17}}{4}.$$

On en déduit le signe de $f - h$ *:*

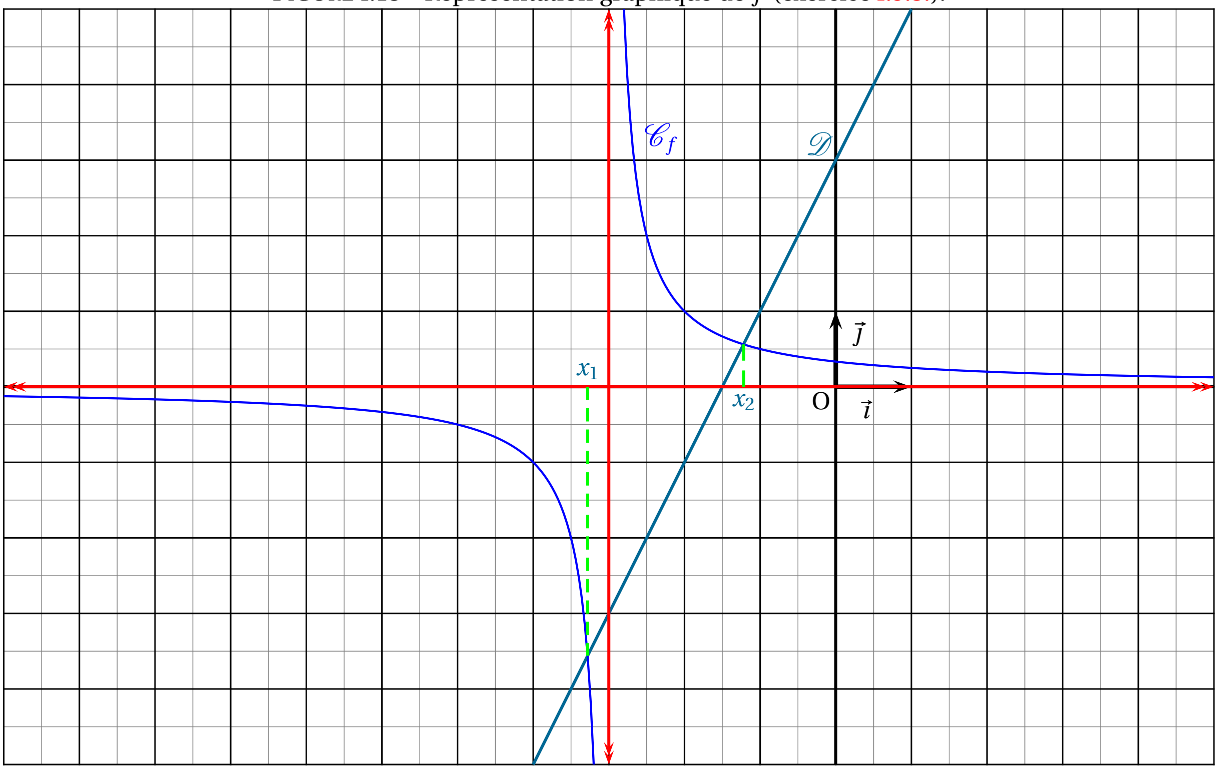
x		$\frac{-9-\sqrt{17}}{4}$		-3		$\frac{-9+\sqrt{17}}{4}$	
$2x^2+9x+8$	$+$	0	$-$		$+$	0	$+$
$x+3$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$(f-h)(x)$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$

D'où l'on tire que :

- ***$\mathscr{D}$ et $\mathscr{H}$ se coupent aux points d'abscisse $\frac{-9-\sqrt{17}}{4}$ et $\frac{-9+\sqrt{17}}{4}$.***
- ***pour $x \in \left]\frac{-9-\sqrt{17}}{4}; -3\right[\cup \left]\frac{-9+\sqrt{17}}{4}; +\infty\right[$, $\mathscr{D}$ est au-dessus de $\mathscr{H}$;***
- ***pour $x \in \left]-\infty; \frac{-9-\sqrt{17}}{4}\right[\cup \left]-3; \frac{-9+\sqrt{17}}{4}\right[$, $\mathscr{D}$ est au-dessous de $\mathscr{H}$.***

De plus $\mathscr{H}$ est l'image de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ par la translation de vecteur $-3\vec{\imath}$. On déduit de cette étude la figure I.13. □

FIGURE I.13 – Représentation graphique de f (exercice I.9.5.).



I.9.4 Exercices

I.9.a. Tracer la courbe d'équation : $y = x^2 - 1$.
I.9.b. Tracer la courbe d'équation : $y = (x-2)^2 - 3$.
I.9.c. Tracer la courbe d'équation : $y = \frac{2}{x}$.

I.9.d. Tracer la courbe d'équation : $y = \frac{2}{x+3} - 1$.
I.9.e. Tracer la courbe d'équation : $y = \frac{2x}{x+3}$.
I.9.f. Tracer la courbe d'équation : $y = \frac{x^2}{2} + 3x + \frac{1}{2}$.

Chapitre II

Logarithmes

II.1 Une première approche

II.1.1 Activité introductive

Calculer à 10^{-2} près : 2^{π}.
Plus généralement, on admet que pour tout nombre réel, x, le nombre réel, 2^x, est défini. La fonction ainsi définie, $x \longmapsto 2^x$, est appelée *exponentielle de base 2*.
Visualiser sur l'écran de la calculatrice la représentation graphique de l'exponentielle de base 2.
Dresser le tableau de variation de cette fonction.
Que suggère ce tableau du point de vue de la bijectivité ?
La bijection réciproque de $x \longmapsto 2^x$ est appelée *logarithme de base* 2 et est notée $\log_2$.
Préciser les ensembles de départ et d'arrivée de $\log_2$, puis tracer sur un même graphique (unité : 1 cm) la première bissectrice, ainsi que les représentations graphiques des fonctions exponentielle et logarithme de base 2.
Dresser le tableau de variation de $\log_2$.

II.1.2 Définitions

Plus généralement, on a les définitions suivantes.

DÉFINITIONS II.1.1
Soit $a \in]0;1[\cup]1;+\infty[$.

(1) L'exponentielle de base a est l'application de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}^{+\star}$, $x \longmapsto a^x$.

(2) Le logarithme de base a est la bijection réciproque de l'exponentielle de base a.

Notations et vocabulaire

1. *Le logarithme de base a est noté* $\log_a$.
2. *Le logarithme de base* 10 *est appelé logarithme décimal, on le note* log *plutôt que* $\log_{10}$.
3. *L'image d'un réel strictement positif, x, par* $\log_a$ *peut être notée,* $\log_a(x)$ *ou* $\log_a x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+\star}$ et tout $y \in \mathbb{R}$, on a donc : $y = \log_a x \iff x = a^y$; $\quad a^{\log_a x} = x$; $\quad \log_a\left(a^y\right) = y$.

Exemples

1. $\log\left(10^3\right) = 3$, $\log_2 64 = 6$, $\log_4 64 = 3$ *et* $\log_3 81 = 4$.
2. $\log\sqrt{10} = \frac{1}{2}$, $\log_3\left(9\sqrt{3}\right) = \frac{5}{2}$, $\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$.

Remarque *On peut calculer le logarithme décimal d'un nombre en utilisant la touche* $\boxed{log}$ *d'une calculatrice scientifique. En utilisant la touche* $\boxed{log}$ *d'une TI N'spire, on calcule un logarithme en base a.*

Exemple $\log 5 = 0,69\cdots$; $\log_2 3 = 1,584\cdots$.

Exercice II.1.1. ***Résoudre :*** $\boldsymbol{2^x = \pi}$.
Solution *On a :*

$$2^x = \pi \iff x = \log_2 \pi$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \{\log_2 \pi\}}.$$

Avec : $\log_2 \pi = 1,651\cdots$ □

II.1.3 Exercices

II.1.a. Simplifier : $\log_2 4$; $\log_5 125$; $\log_3 81$.
II.1.b. Simplifier : $\log 1$; $\log 1000000$; $\log 0{,}00000001$.
II.1.c. Déterminer x et arrondir, le cas échéant, le résultat à deux décimales.
$3\times 10^x = 2$; $3\times 10^x - 5 = 0$; $\frac{1}{2}\times 10^{3x} = 4$; $10^{x+1} = 7$
II.1.d. Écrire les exposants des nombres suivants sous la forme d'un logarithme : $z = a^v$; $u = b^t$; $3s = r^b$; $d^p = \sqrt{g}$.

II.1.e. Déterminer x dans chacun des cas suivants :
$x = \log_a 1$; $x = \log_a a$; $x = \log_a \sqrt{a}$; $x = \log_a\left(\frac{1}{a}\right)$; $\log x = 3$; $\log_3 x = 1$; $\log_a x = \frac{1}{2}$; $\log_a(3x) = 2$.

II.2 Propriétés et applications

II.2.1 Propriétés

L'activité introductive suggère le théorème suivant, qui est admis.

Théorème II.2.1
Pour tout nombre réel, a, tel que $a > 1$, les fonctions exponentielle et logarithme de base a sont strictement croissantes sur leur ensemble de définition.

Le théorème suivant est également admis.

Théorème II.2.2
Pour tous nombres réels $a > 0$ et $a' > 0$ et tous nombres réels b et b' :
(1) $1^b = 1$;
(2) $a^b a^{b'} = a^{b+b'}$; $\dfrac{a^b}{a^{b'}} = a^{b-b'}$; $\left(a^b\right)^{b'} = a^{bb'}$;
(3) $\left(aa'\right)^b = a^b a'^b$; $\dfrac{a^b}{a'^b} = \left(\dfrac{a}{a'}\right)^b$.

La propriété de (2) de ce théorème signifie que les exponentielles transforment les sommes en produits.

Théorème II.2.3
Pour tous nombres réels strictement positifs a, b et b' ($a \neq 1$) et tout nombre réel α :
(1) $\log_a 1 = 0$;
(2) $\log_a\left(bb'\right) = \log_a(b) + \log_a\left(b'\right)$;
(3) $\log_a\left(\dfrac{1}{b}\right) = -\log_a b$; $\log_a\left(\dfrac{b}{b'}\right) = \log_a b - \log_a b'$;
(4) $\log_a\left(b^\alpha\right) = \alpha \log_a b$.

Démonstration (1) on a, $a^0 = 1$, donc : $\log_a 1 = 0$;
(2) on a : $\log_a\left(bb'\right) = \log_a\left(a^{\log_a b} a^{\log_a b'}\right) = \log_a\left(a^{\log_a b + \log_a b'}\right) = \log_a b + \log_a b'$.
(3) on a, $\log_a b + \log_a \frac{1}{b} = \log_a\left(b\times\frac{1}{b}\right) = \log_a 1 = 0$, donc : $\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = -\log_a b$;
$\log_a\left(\frac{b}{b'}\right) = \log_a\left(b\times\frac{1}{b'}\right) = \log_a b + \log_a\left(\frac{1}{b'}\right) = \log_a b - \log_a b'$;
(4) on a : $\log_a\left(b^\alpha\right) = \log_a\left(\left(a^{\log_a b}\right)^\alpha\right) = \log_a\left(a^{\alpha\log_a b}\right) = \alpha\log_a b$. □

La propriété (2) de ce théorème signifie que les logarithmes transforment les produits en sommes.
Exemple $\log_2 648 = \log_2\left(2^3\times 3^4\right) = \log_2\left(2^3\right) + \log_2\left(3^4\right) = 3 + 4\log_2 3$.

Dans l'exemple ci-dessus, on sait que, $\log_2 648 = 3 + 4\log_2 3$, mais on ne connaît aucune valeur approchée de ce nombre si on ne dispose pas d'une calculatrice munie des logarithmes de base a. Le théorème suivant pallie à ce problème.

Théorème II.2.4 Loi de changement de base
Pour tous nombres réels strictement positifs a, a' et x (avec $a \neq 1$ et $a' \neq 1$) : $\log_{a'} x = \dfrac{\log_a x}{\log_a a'}$.

Démonstration $\dfrac{\log_a x}{\log_a a'} = \log_a\left(x^{\frac{1}{\log_a a'}}\right) = \log_a\left(\left(a'^{\log_{a'} x}\right)^{\frac{1}{\log_a a'}}\right) = \log_a\left(\left(\left(a^{\log_a a'}\right)^{\log_{a'} x}\right)^{\frac{1}{\log_a a'}}\right) = \log_a\left(a^{\log_{a'} x}\right) = \log_{a'} x$. □

En particulier, pour $a = 10$, il vient : $\log_{a'} x = \dfrac{\log x}{\log a'}$.

Exemple $\log_2 648 = \dfrac{\log 648}{\log 2} = \dfrac{2{,}811\cdots}{0{,}301\cdots} = 9{,}339\cdots$.

II.2.2 Applications

II.2.2.a Nombres de chiffres d'un nombre écrit dans le système décimal

Choisissons un nombre à 4 chiffres, par exemple, 4 567. On a : $10^3 \leqslant 4567 < 10^4$. D'après le théorème II.2.1 la fonction log est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+\star}$, on en déduit que : $3 \leqslant \log 4567 < 4$.

Plus généralement, si x est entier qui s'écrit avec n chiffres dans le système de numération décimal alors, $10^{n-1} \leqslant x < 10^n$, d'où l'on tire que : $n-1 \leqslant \log x < n$. On en déduit le théorème ci-dessous.

Théorème II.2.5

Pour tout nombre entier naturel non nul, x, le nombre de chiffres avec lequel s'écrit x dans le système de numération décimal est, $\lfloor \log x \rfloor + 1$, où $\lfloor \log x \rfloor$ désigne la partie entière du logarithme décimal de x.

Remarque *De même, le nombre de chiffres avec lequel s'écrit x dans le système de numération en base a où a est un entier supérieur ou égal à 2 est :* $\lfloor \log_a x \rfloor + 1$

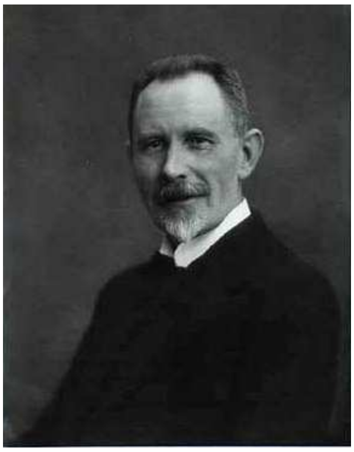
Exercice II.2.1. ***Avec combien de chiffres le nombre 2011^{2012}, s'écrit-il dans le système de numération décimal ?***

Solution *D'après le théorème II.2.5, le nombre cherché est :* $\lfloor \log 2011^{2012} \rfloor + 1 = \lfloor 2012 \log 2011 \rfloor + 1 = 6647$ □

Exercice II.2.2. ***Combien faut-il d'octets pour coder le nombre 2011^{2012} ?***

Solution *Les octets codent les nombres de* 0 *à* 255*, donc coder les entiers en octets revient à les écrire en base* 256 *où chaque octet représente un chiffre. Le nombre d'octets cherché est donc :*
$\lfloor \log_{256} 2011^{2012} \rfloor + 1 = \lfloor 2012 \log_{256} 2011 \rfloor + 1 = 2560$ □

II.2.2.b pH d'une solution chimique



Cette notion, du latin « potentia Hydrogenii » (force de l'hydrogène) a été introduite en 1909 par Peter Lauritz Soerensen[1] pour caractériser l'acidité d'une solution par un nombre simple. Comme la concentration des ions H^+ (remplacés par $H3O^+$ dans la théorie de Broensted-Lowry de 1923), généralement très faible, s'exprime par une puissance négative de 10, Soerensen proposa de caractériser l'acidité d'une solution par la valeur opposée du logarithme décimal de la concentration en H^+. Dans le contexte de la théorie de Broensted-Lowry, on définit pour les solutions diluées $\mathrm{pH} = -\log[\mathrm{H3O+}]$ et de façon analogue $\mathrm{pOH} = -\log[\mathrm{OH}^-]$. À partir de l'équilibre d'autoprotolyse de l'eau, on déduit le produit ionique de l'eau, valable pour toute solution aqueuse : $[\mathrm{H3O}^+][\mathrm{OH}^-] = 10^{-14}\ \mathrm{mol}^2/\mathrm{l}^2$ (à 25 °C) d'où l'on déduit : $\mathrm{pH} + \mathrm{pOH} = 14$ (à 25 °C). Il en résulte que :

- dans l'eau pure, $H3O^+$ et OH^- sont produits en nombre égal, donc $[\mathrm{H3O}^+] = [\mathrm{OH}^-] = 10^{-7}\ \mathrm{mol\cdot l^{-1}}$, d'où : $\mathrm{pH} = \mathrm{pOH} = 7$;
- dans une solution acide, l'acide dissous fournit un excès de $H3O^+$, donc $[\mathrm{H3O}^+] > 10^{-7}\ \mathrm{mol\cdot l^{-1}}$, d'où $\mathrm{pH} < 7$ et $[\mathrm{OH}^-] < 10^{-7}\ \mathrm{mol\cdot l^{-1}}$, d'où $\mathrm{pOH} > 7$;
- dans une solution basique, la base dissoute neutralise des $H3O^+$ fournis par l'eau, donc $[\mathrm{H3O}^+] < 10^{-7}\ \mathrm{mol\cdot l^{-1}}$, d'où $\mathrm{pH} > 7$ et $[\mathrm{OH}^-] > 10^{-7}\ \mathrm{mol\cdot l^{-1}}$, d'où $\mathrm{pOH} < 7$.

L'échelle pratique des pH est limitée par des concentrations maximales de $1\ \mathrm{mol\cdot l^{-1}}$ en $H3O^+$ ou OH^- et s'étend donc de 0 à 14 (à 25 °C). Des valeurs négatives ou supérieures à 14 sont toutefois envisageables pour des concentrations plus élevées.

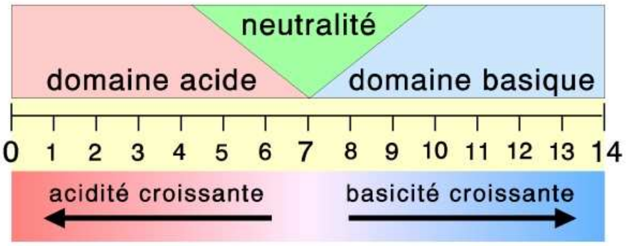
Remarque *La propriété du logarithme décimal évoquée dans la démonstration* ($\log(10^p) = p$) *conduit à l'observation suivante : une concentration dix fois plus forte en acide (respectivement en base) conduit à un* pH *inférieur d'une unité et un* pOH *supérieur d'une unité (respectivement un* pH *supérieur d'une unité et un* pOH *inférieur d'une unité).*

II.2.2.c Le décibel

Le décibel (symbole : dB) est un dixième de bel (symbole : B). Le bel est une unité de mesure logarithmique du rapport entre deux puissances, connue notamment pour exprimer la puissance du son. Cette grandeur sans dimension

1. Sørensen Søren Peter Lauritz chimiste danois 1868-1939.

TABLE II.1 – Tableau récapitulatif.



Extrait de http://www.al.lu/chemistry/stuff1/EX1/notions/ph.htm

n'appartient pas au système international de mesures. Le gain en bel est le nombre : $\log\left(\frac{P_1}{P_0}\right)$.
Par exemple si un amplificateur double une puissance, le gain est : $\log 2$ B.
Or, $\log 2 = 0,301\cdots$, on a donc un gain de 3 dB.
Pour en savoir plus, voir : http ://fr.wikipedia.org/wiki/Décibel

II.2.3 Exercices

II.2.a. Calculer sans calculatrice : $\log_7 343$; $\log_8 32$; $\log_{25} 125$.

II.2.b. Exprimer, $\log(10!)$, comme combinaison linéaire à coefficients entiers de logarithmes décimaux de nombres premiers.

II.2.c. Tracer sur un même écran, les courbes représentatives des fonctions exponentielles de base 2 et $\frac{1}{2}$. Que remarque-t'on ? expliquer.

II.2.d. Tracer sur un même écran, les courbes représentatives des fonctions logarithmes de base 2 et $\frac{1}{2}$. Que remarque-t'on ? expliquer.

II.2.e. **1.** Pour chacune des fonctions suivantes, préciser son ensemble de définition, l'ensemble de ses valeurs et sa fonction réciproque.

a. $f_1(x) = a^x$
b. $f_2(x) = 2 - a^x$
c. $f_3(x) = a^{x-3}$
d. $f_4(x) = \frac{1}{2}a^{2-x}$

2. Pour chacun des cas ci-dessus, tracer la courbe représentative correspondant à $a = 2$ ainsi que celle de la fonction réciproque. Vérifier les propositions faites en 1).

II.2.f. On considère la fonction, $f : x \longmapsto \log_a x$, et $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique. Déterminer a.

a. Sachant que $\mathscr{C}_f$ passe par $P\left(2;\frac{1}{2}\right)$.

b. Sachant que $\mathscr{C}_f$ passe par $P(0,64;2)$.

Chapitre III

Suites numériques

III.1 Définitions

III.1.1 Introduction

DÉFINITION III.1.1 SUITE NUMÉRIQUE

Une *suite numérique* est une fonction d'une partie de $\mathbb{N}$ dans un ensemble de nombres (généralement $\mathbb{R}$).

Exemples
1. *On peut considérer la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $u_n = n^2$.
On a alors : $u_0 = 0$; $u_1 = 1$; $u_2 = 4$; $u_3 = 9$; $u_4 = 16\ldots$
Pour chaque terme u_n *on a :* $u_n = f(n)$; *où* f *est la fonction* $x \mapsto x^2$.
On dit que la suite (u_n) ***est définie explicitement****.*
On peut calculer directement des termes de « grands indices » ($u_{100} = 10\,000$).
2. *On peut considérer la suite* $(v_n)_{n\geqslant 2}$ *définie par :* $\begin{cases} v_2 = \dfrac{1}{2} \\ v_{n+1} = v_n^2 \end{cases}$.
On a alors : $v_2 = \dfrac{1}{2}$; $v_3 = \dfrac{1}{4}$; $v_4 = \dfrac{1}{16} \cdots$
v_0 *et* v_1 *ne sont pas définis.*
Pour chaque terme on a : $v_{n+1} = f(v_n)$; *où* f *est la fonction* $x \mapsto x^2$.
On dit que la suite (v_n) ***est définie par récurrence****.*
Pour calculer un terme il faut connaître les termes précédents.
La suite (v_n) *peut cependant être définie explicitement, pour tout entier naturel* $n \geqslant 2$: $v_n = \dfrac{1}{2^{(2^{n-2})}}$.
3. *On peut également considérer la suite* $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $\begin{cases} w_0 = w_1 = 1 \\ w_{n+1} = w_{n+1} + w_n - n \end{cases}$.
Déterminer les cinq premiers termes de cette suite.

Remarques
1. *Toutes les suites étudiées en classe de Sixième et Septième seront définies sur* $\mathbb{N}$ *ou à partir d'un certain indice.*
2. *Le rang d'un terme est son numéro d'ordre. Par exemple pour une suite* $(u_n)_{n\geqslant 2}$*, le premier terme est* u_2*, donc* u_2 *est le terme de rang* 1*. De même,* u_9 *est le terme de rang* 8*.*

III.1.2 Opérations

De même que pour les fonctions, on définit la somme, le produit … de suites numériques.
Exemples *Considérons les suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définies par :* $u_n = n^3$ *et* $v_n = n^2 + 1$.
On peut considérer les $(u_n + v_n)$ *ou* $(u_n v_n)$ *de termes généraux*

III.1.3 Composée d'une suite par une fonction

DÉFINITION III.1.2
Soit f une fonction et (v_n) une suite d'éléments de l'ensemble de définition de f.
La composée de (v_n) par f est la suite (u_n) de terme général : $u_n = f(v_n)$.

Exemple *Si $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et f sont définies par : $v_n = n^2$ et $f(x) = 2x-3$; alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par : $u_n = 2n^2-3$.*

III.1.4 Exercices

III.1.a. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_n = 4n^2 - n + 1$.

III.1.b. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$; $u_n = u_{n-1}^2 + 1$.

III.1.c. Calculer les cinq premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, composée de la suite (u_n) de l'exercice précédent par la fonction $f : x \mapsto x^2 - 1$.

III.1.d. On considère la suite (u_n) telle que, $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel, n : $u_{n+1} = u_n^2 + 2n - 5$.

1. Calculer les sept premier termes de cette suite.

2. Placer sur un graphique les points de coordonnées $(n ; u_n)$ qui se déduisent de la question précédente.

3. Conjecturer une expression explicite du terme général de la suite (u_n).

III.2 Représentation graphique d'une suite

III.2.1 Représentation graphique d'une suite définie explicitement

Pour représenter graphiquement une suite définie explicitement (par une relation du type $u_n = f(n)$), il suffit de représenter graphiquement la fonction f sur la partie positive de son ensemble de définition.

Exemple *Pour représenter graphiquement la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par : $u_n = 2 - \dfrac{2}{n}$; il suffit de tracer la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto 2 - \dfrac{2}{x}$; pour chaque indice n, u_n est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse n.*

Les termes de la suite apparaissent alors sur l'axe des ordonnées (voir figure III.1).

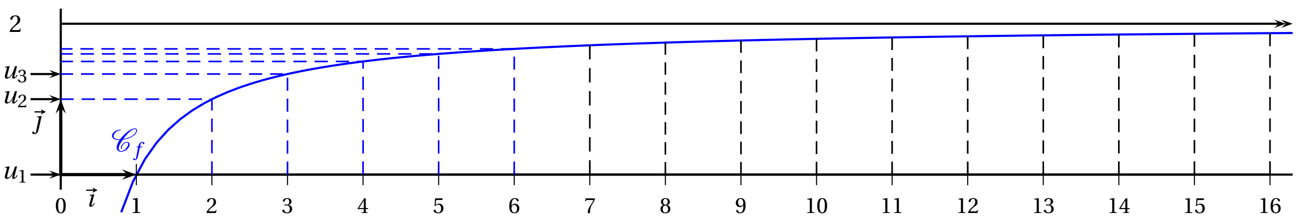


FIGURE III.1 – Représentation graphique d'une suite définie explicitement.

III.2.2 Représentation graphique d'une suite définie par récurrence

Pour représenter graphiquement une suite définie par récurrence (par une relation du type $u_{n+1} = f(u_n)$), on représente graphiquement la fonction f sur un intervalle contenant tous les termes de la suite et on trace la première bissectrice [1]. On place le premier terme puis les autres de proche en proche par la méthode suivante.

Méthode pour placer u_{n+1} sur l'axe des abscisses lorsque u_n est placé

- On place sur la courbe le point A_n d'abscisse u_n. Ce point a donc pour ordonnées $f(u_n)$, c'est-à-dire u_{n+1}.
- On place sur la première bissectrice le point B_n de même ordonnée que A_n. B_n est le point d'intersection des droites d'équations $y = x$ et $y = u_{n+1}$, B_n a donc pour abscisse u_{n+1}.
- Il ne reste plus qu'à placer u_{n+1} sur l'axe des abscisses.

Exemple *Pour représenter graphiquement la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :* $\begin{cases} u_0 = 10 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{2}{u_n} \end{cases}$;

on trace sur $[0 ; +\infty]$ la représentation graphique de la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$ et la droite Δ d'équation : $y = x$.

1. La première bissectrice est la droite d'équation $y = x$.

Les termes de la suite apparaissent alors sur l'axe des abscisses (voir figure III.2).

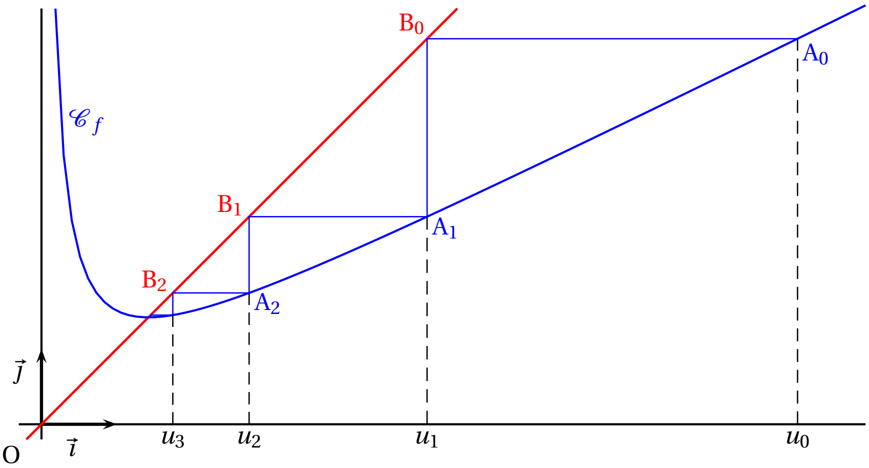


FIGURE III.2 – Représentation graphique d'une suite définie par récurrence.

III.2.3 Exercices

III.2.a. f désigne la fonction $x \mapsto x^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $u_n = f(n)$.
Représenter graphiquement la suite (u_n) et déterminer sa limite.

III.2.b. f désigne la fonction $x \mapsto x^2$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite définie par : $u_0 = 0,5$ et pour tout entier naturel non nul, n, $u_n = f(u_{n-1})$.
Représenter graphiquement la suite (u_n) (unité graphique : 20 cm) et conjecturer sa limite.

III.2.c. Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 2cm). f est la fonction : $x \mapsto 3 - \dfrac{2}{x}$.
$\mathscr{C}_f$ est la représentation graphique de f. (u_n) est la suite vérifiant, $u_0 = 5$, et pour tout entier naturel non nul, n : $u_n = f(u_{n-1})$.

1. Déterminer les éventuelles asymptotes de $\mathscr{C}_f$.

2. Déterminer les points fixes[2] de f.

3. Représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n) puis conjecturer sa limite éventuelle.

III.3 Suites arithmétiques - suites géométriques

III.3.1 Suites arithmétiques

III.3.1.a Définition

DÉFINITION III.3.1
Une suite *arithmétique* de *raison* r est une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ telle que pour tout entier $n \geqslant n_o$: $u_{n+1} = u_n + r$.

Remarque *Une suite arithmétique est entièrement déterminée par sa raison et son premier terme.*

Exemple *Pour la suite arithmétique de raison* -2 *et de premier terme* $u_3 = 5$, *on a :* $u_4 = 3$; $u_5 = 1$; $u_6 = -1\ldots$

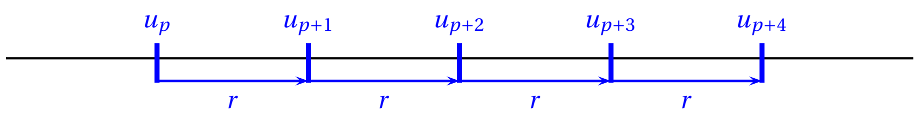


FIGURE III.3 – Suite arithmétique.

La figure III.3 suggère que pour une suite arithmétique de raison r : $u_{p+4} = u_p + 4r$.
En posant : $n = p+4$; il vient : $4 = n - p$ et $u_n = u_p + (n-p)r$.
Plus généralement, on a le théorème suivant.

THÉORÈME III.3.1
Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite arithmétique de raison r.
Pour tous nombres entiers n et p supérieurs ou égaux à n_0 on a :

$$u_n = u_p + (n-p)r.$$

2. Les points fixes de f sont les solutions de l'équation : $f(x) = x$.

Démonstration Procédons par disjonction des cas.

1er cas $n = p$ On a : $u_p + (n-p)r = u_n + 0 \times r = u_n$; donc le théorème est vérifié.

2e cas $n > p$ On a : $u_{p+1} = u_p + r$; $u_{p+2} = u_{p+1} + r$; $u_{p+3} = u_{p+2} + r$;...
plus généralement, à chaque étape on passe d'un terme au suivant en ajoutant r. On passe de u_p à u_n en $n-p$ étapes, c'est-à-dire en ajoutant $n-p$ fois r, d'où : $u_n = u_p + (n-p)r$.

3e cas $n < p$ On a : $p > n$; donc, d'après le cas précédent (en permutant n et p), il vient : $u_p = u_n + (p-n)r$; d'où : $u_n = u_p + (n-p)r$.

Dans les trois cas la formule est vérifiée. □

Exemple *Si* (u_n) *est une suite arithmétique de raison* -5 *et si* $u_{13} = 52$ *alors :* $u_{121} = u_{13} - 5(121-13) = -488$.

Lorsque $p = n_0$, on en déduit le corollaire suivant.

COROLLAIRE III.3.2

Si (u_n) est la suite arithmétique de raison r et de premier terme u_{n_0}, alors pour tout nombre entier n (avec $n \geqslant n_0$), on a :

$$u_n = r(n-n_0) + u_{n_0}.$$

Exemple *La suite arithmétique* (u_n) *de raison* 3 *et de premier terme* $u_2 = -1$ *est définie par :* $u_n = 3(n-2) - 1 = 3n - 7$.

Remarques

1. *L'expression obtenue dans le corollaire III.3.2 fournit une définition explicite d'une suite arithmétique.*

2. *le terme général d'une suite arithmétique est une fonction affine de l'indice dont le coefficient de degré* 1 *est la raison.*

III.3.1.b Propriétés

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la définition III.3.1.

THÉORÈME III.3.3

(1) Une suite arithmétique est croissante si, et seulement si, sa raison est positive.

(2) Une suite arithmétique est décroissante si, et seulement si, sa raison est négative.

DÉFINITION III.3.2

La moyenne arithmétique de deux nombres réels a et b est le nombre : $\dfrac{a+b}{2}$.

THÉORÈME III.3.4

Si a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors b est la moyenne arithmétique de a et c.

Démonstration Soit (u_n) la suite arithmétique, r sa raison et k l'indice de b.

On a : $\begin{cases} a = u_{k-1} \\ b = u_k = u_{k-1} + r = a + r \\ c = u_{k+1} = u_k + r = b + r \end{cases}$; donc : $\dfrac{a+c}{2} = \dfrac{b-r+b+r}{2} = b$. □

III.3.1.c Somme de termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_o}$ une suite arithmétique et m et p deux entiers tels que : $n_0 \leqslant m \leqslant p$.

On se propose de calculer la somme : $S = \underbrace{u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p}_{p-m+1 \text{ termes}} = \sum\limits_{n=m}^{p} u_n$.

On a donc : $\begin{cases} S = & u_m & + & (u_m + r) & + & \cdots & + & (u_m + (p-m)r) \\ S = & (u_m + (p-m)r) & + & (u_m + (p-m-1)r) & + & \cdots & + & u_m \end{cases}$

puis par somme : $2S = (u_m + u_m + (p-m)r) + (u_m + u_m + (p-m)r) + \cdots + (u_m + u_m + (p-m)r)$; d'où finalement :

$$u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p = (p-m+1)\frac{u_m + u_p}{2}.$$

THÉORÈME III.3.5

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite arithmétique et m et p des nombres entiers naturels tels que : $n_0 \leqslant m \leqslant p$. On a :

$$\sum_{k=m}^{p} u_k = (p-m+1)\frac{u_m + u_p}{2}.$$

On peut retenir cette formule en remarquant qu'une somme de termes consécutifs d'une suite **arithmétique** s'obtient en effectuant le produit du nombre de termes par la moyenne des termes extrêmes.

Exercice III.3.1. ***Calculer la somme des n premiers nombres entiers naturels non nuls.***

Solution *Les n premiers nombres entiers naturels non nuls sont les n premiers de la suite arithmétique de raison* 1 *et de premier terme, $u_1 = 1$, donc :*

$$\sum_{k=1}^{n} k = n\frac{u_1+u_n}{2} = n\frac{1+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

□

Exercice III.3.2. ***Calculer la somme des n premiers nombres entiers naturels impairs.***

Solution *Les n premiers nombres entiers naturels impairs sont les nombres de la forme $2k-1$, pour k variant de* 1 *à n ; ce sont donc les n premiers termes de la suite arithmétique de raison* 2 *et de premier terme : $u_1 = 1$. On a : $u_n = 2n-1$. On en déduit la somme : $S = n\frac{u_1+u_n}{2} = n\frac{1+2n-1}{2} = n^2$* □

III.3.2 Suites géométriques

III.3.2.a Définition

DÉFINITION III.3.3

Une suite *géométrique* de *raison* q est une suite $(u_n)_{n\geqslant n_o}$ telle que pour tout entier $n \geqslant n_o$: $u_{n+1} = qu_n$.

Exemples *Considérons les suites géométriques (u_n), (v_n) et (w_n), définies sur $\mathbb{N}$, de raisons respectives 2, -3, $\frac{1}{2}$ et de premiers termes respectifs 3, 2, -4. Les cinq premiers termes de chaque suite sont représentés dans la tableau III.1.*

n	0	1	2	3	4
u_n	3	6	12	24	48
v_n	2	-6	18	-54	162
w_n	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$

TABLE III.1 – Cinq premiers termes de suites géométriques (u_n), (v_n) et (w_n).

Remarques

1. *Lorsque $q = 0$, la suite est nulle à partir du deuxième terme, elle est donc stationnaire.*
2. *Lorsque $q = 1$, la suite est constante.*
3. *Une suite géométrique est entièrement déterminée par sa raison et son premier terme.*
4. *Lorsque la raison est strictement négative et le premier terme non nul, la suite est de signe alterné, elle est donc non monotone (ni croissante ni décroissante).*
5. *Lorsque la raison est strictement positive, la suite géométrique est du signe de son premier terme.*

THÉORÈME III.3.6

Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison q.
Pour tous nombres entiers n et p supérieurs ou égaux à n_0 on a :

$$u_n = u_p q^{n-p}.$$

Démonstration Procédons par disjonction des cas.

1^er^ cas $n = p$ On a : $u_p q^{n-p} = u_p q^0 = u_p = u_n$; donc le théorème est vérifié.

2^e^ cas $n > p$ On a : $u_{p+1} = u_p q$; $u_{p+2} = u_{p+1} q$; $u_{p+3} = u_{p+2} q$;...
plus généralement, à chaque étape on passe d'un terme au suivant en multipliant par q. On passe de u_p à u_n en $n-p$ étapes, c'est-à-dire en multipliant $n-p$ fois par q, d'où : $u_n = u_p q^{n-p}$.

3^e^ cas $n < p$ On a : $p > n$; donc, d'après le cas précédent (en permutant n et p), il vient : $u_p = u_n q^{p-n}$; d'où : $u_n = u_p q^{n-p}$.

Dans les trois cas la formule est vérifiée. □

Exemple *Si (u_n) est une suite géométrique de raison* 3 *et si $u_4 = -\frac{1}{27}$, alors : $u_{12} = -\frac{1}{27} \times 3^8 = -243$.*

Lorsque $p = n_0$, on déduit du théorème III.3.6 le corollaire suivant.

COROLLAIRE III.3.7

Si (u_n) est la suite géométrique de raison q et de premier terme u_{n_0}, alors pour tout nombre entier n (avec $n \geqslant n_0$), on a :

$$u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}.$$

Remarques

1. *L'expression obtenue dans le corollaire III.3.7 fournit une définition explicite d'une suite géométrique.*

2. *Lorsque $q \neq 0$, une suite géométrique admet une définition explicite de la forme : $u_n = k\,q^n$ avec $k = u_{n_0} q^{-n_0}$.*

Exemples

1. *La suite géométrique, (u_n), de raison 3 et de premier terme $u_2 = -1$ est définie par : $u_n = -\frac{1}{9} \times 3^n$.*

2. *La suite géométrique, (v_n), de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $u_3 = 128$ est définie par : $u_n = -\frac{1024}{(-2)^n}$.*

III.3.2.b Propriétés

Le théorème suivant est une conséquence immédiate de la définition III.3.3.

Théorème III.3.8

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_0}$ une suite géométrique de raison q.
Le sens de variation de (u_n) est donné dans le tableau ci-dessous.

(u_n)	$q \in]1\,;+\infty[$	$q \in]0\,;1[$	$q \in]-\infty\,;0[$	$q = 0$	$q = 1$
$u_{n_0} > 0$	croissante	décroissante	non monotone	stationnaire	constante
$u_{n_0} < 0$	décroissante	croissante	non monotone	stationnaire	constante
$u_{n_0} = 0$	constante				

Définition III.3.4

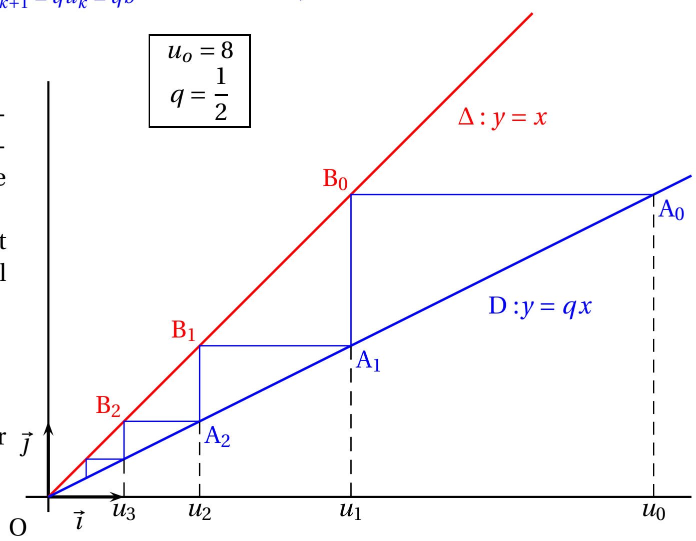
La moyenne géométrique de deux nombres réels strictement positifs a et b est le nombre : $\sqrt{ab}$.

Théorème III.3.9

Si a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique à termes strictement positifs, alors b est la moyenne géométrique de a et c.

Démonstration Soit (u_n) la suite géométrique, q sa raison et k l'indice de b.
La suite est à termes strictement positifs donc : $q \neq 0$. On a : $\begin{cases} a = u_{k-1} \\ b = u_k = qu_{k-1} = qa \\ c = u_{k+1} = qu_k = qb \end{cases}$; donc : $\sqrt{ac} = \sqrt{\frac{b}{q} \times qb} = |b| = b$. □

Représentation graphique d'une suite géométrique
Pour représenter graphiquement une suite géométrique de raison q, on peut tracer les droites d'équations $y = x$ et $y = qx$ puis utiliser la méthode proposée §III.2.2 page 38.
Désignons par h l'homothétie de centre O et de rapport q. Sur la figure ci-contre, on a pour tout entier naturel n :
$\overrightarrow{OB}_{n+1} = u_{n+2}\vec{\imath} + u_{n+2}\vec{\jmath} = q(u_{n+1}\vec{\imath} + u_{n+1}\vec{\jmath})$
c'est-à-dire : $\overrightarrow{OB}_{n+1} = q\,\overrightarrow{OB}_n$.
Donc B_{n+1} est l'image de B_n par h.
On démontre de même que A_{n+1} est l'image de A_n par h.



III.3.2.c Somme de termes consécutifs

Soit $(u_n)_{n \geqslant n_o}$ une suite géométrique de raison q (avec $q \neq 1$) et m et p deux entiers tels que : $n_0 \leqslant m \leqslant p$.

On se propose de calculer la somme : $S = \underbrace{u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p}_{p-m+1 \text{ termes}} = \sum_{n=m}^{p} u_n$.

On a donc : $\begin{cases} S = & u_m & +qu_m & +q^2u_m & +\cdots & +u_m q^{p-m} & \\ qS = & & qu_m & +q^2u_m & +\cdots & +u_m q^{p-m} & +u_m q^{p-m+1} \end{cases}$

puis par différence : $qS - S = u_m q^{p-m+1} - u_m$; d'où finalement :

$$u_m + u_{m+1} + \cdots + u_p = \frac{u_m - u_{p+1}}{1-q}$$

On peut retenir cette formule en remarquant qu'une somme de termes consécutifs d'une suite **géométrique** s'obtient en effectuant le quotient : $\dfrac{\text{premier terme} - \text{suivant du dernier}}{1 - \text{raison}}$.

Remarque *En particulier on a, pour tout entier naturel non nul n : $1 + q + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.*

Exercice III.3.3. ***Démontrer que pour tout $x \in [0\,;1[$ et tout $n \in \mathbb{N}^\star$; on a : $1 + x + \cdots + x^n \leqslant \dfrac{1}{1-x}$***

Solution *$1 + x + \cdots + x^n$ est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison x, donc :*

$$1 + x + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Or $1 - x$ est strictement positif et : $1 - x^{n+1} \leqslant 1$ (car x est positif) ; donc par quotient :

$$\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \leqslant \frac{1}{1 - x}\,;$$

c'est-à-dire :

$$1 + x + \cdots + x^n \leqslant \frac{1}{1 - x}.$$

□

COROLLAIRE III.3.10 $\mathscr{C}_f$

Pour tous nombres réels a, b et pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$a^n - b^n = (a - b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

Démonstration Pour $a = 0$, l'égalité devient : $-b^n = -b \times b^{n-1}$; qui est vraie.

Pour $a = b$, l'égalité devient : $0 = 0 \times na^{n-1}$; qui est vraie.

Lorsque $a \neq 0$ et $a \neq b$, le second facteur du second membre de l'égalité est la somme des termes consécutifs d'un suite géométrique de raison $\frac{b}{a}$, on en déduit que :

$a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1} = \dfrac{a^{n-1} - \frac{b^n}{a}}{1 - \frac{b}{a}} = \dfrac{a^n - b^n}{b - a}$.

En multipliant les membres extrêmes par $b - a$, on en déduit l'identité désirée. □

Remarques

1. *Lorsque $n = 2$, on retrouve l'identité* **??** *et lorsque $n = 3$, on retrouve l'identité* **??**.

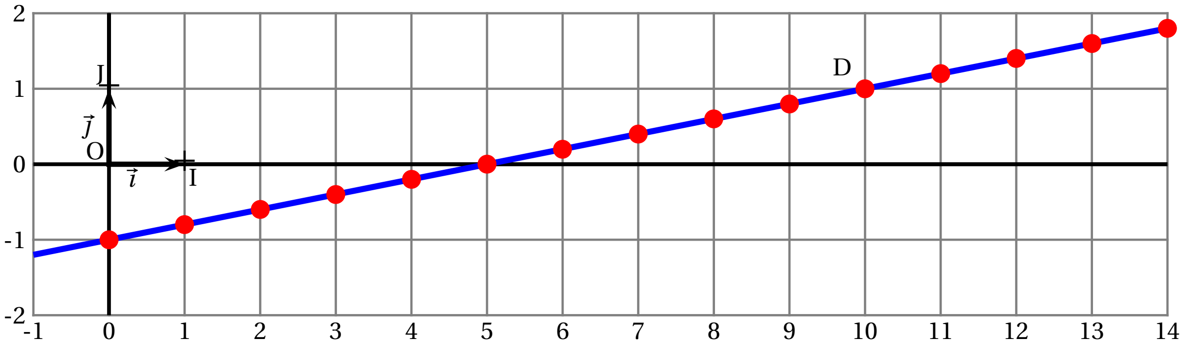
2. *Lorsque n est* impaire, *en remplaçant b par $-b$, on obtient :*

$$a^n + b^n = (a + b)\left(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \cdots + ab^{n-2} - b^{n-1}\right)$$

Lorsque $n = 3$, on retrouve l'identité **??**.

III.3.3 Limites de suites arithmétiques

Considérons la fonction affine, $f : x \longmapsto ax + b$, et D sa représentation graphique.



Sur la figure ci-dessus, la droite D est tracée dans un cas où, $a > 0$. Soit M_x le point d'abscisse x de la droite D. On constate que lorsque x tend vers $+\infty$, l'ordonnée de M_x tend vers $+\infty$. Or l'ordonnée de M_x est, $ax + b$, on écrit donc :

$$\lim_{x \to +\infty} (ax + b) = +\infty.$$

Considérons la suite arithmétique, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison a et de premier terme, $u_0 = b$. Pour tout entier naturel, n, on a donc : $u_n = an + b$. Sur le graphique ci-dessus, la suite (u_n) est représentée par des points rouges. On constate sur le graphique que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$. Avec, $a < 0$, on aurait eu : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.
On en déduit le théorème suivant.

THÉORÈME III.3.11
Soit (u_n) une suite arithmétique de raison, a, et dont le premier terme vaut b.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } a > 0 \\ b & \text{si } a = 0 \\ -\infty & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

III.3.4 Limites de suites géométriques

Calculons 2^n pour les premières valeurs entières de n. On obtient le tableau ci-dessous.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
2^n	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096

Ce tableau suggère et on admet que : $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^n = +\infty$.

On peut de même calculer les premières valeurs de $\dfrac{1}{2^n}$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\frac{1}{2^n}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{1}{128}$	$\frac{1}{256}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{1}{2048}$	$\frac{1}{4096}$

Ce tableau suggère et on admet que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} = 0$.
Ou les premières valeurs de $(-2)^n$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$(-2)^n$	1	-2	4	-8	16	-32	64	-128	256	-512	1024	-2048	4096

Ce tableau suggère et on admet que $(-2)^{-n}$ n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.
Plus généralement, on admet le théorème suivant.

THÉORÈME III.3.12
Soit q un nombre réel.

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } 1 < q \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ 0 & \text{si } |q| < 1 \end{cases}$$

Si, $q \leqslant -1$, alors q^n n'a pas de limite lorsque n tend vers $+\infty$.

Par produit des limites, on endéduit le théorème suivant.

THÉORÈME III.3.13

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme a. La limite de (u_n) est donnée par le tableau suivant.

	$q \leqslant -1$	$\lvert q\rvert < 1$	$q = 1$	$1 < q$
$a > 0$	pas de limite		a	$+\infty$
$a = 0$		0		
$a < 0$	pas de limite		a	$-\infty$

Démonstration

1[er] **cas : $a = 0$ ou $q = 1$** Le résultat est immédiat car la suite est constante.

2[e] **cas : $a > 0$ et $q \neq 1$**

si $|q| < 1$ On a vu (§ **??**) qu'il suffit de démontrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 0| = 0$.
Or pour tout indice n : $|u_n - 0| = a|q|^n$; de plus, d'après le lemme **??** : $\lim\limits_{n\to+\infty} |q|^n =$, donc par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$.

si $1 < q$ On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ or (u_n) est une suite à termes positifs, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

si $q \leqslant -1$ On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ ou $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 1$; or les termes u_n changent de signe avec la parité de n, donc (u_n) n'a pas de limite.

3e cas : $a < 0$ et $q \neq 1$ On déduit les résultats désirés des résultats obtenus au cas précédent en multipliant par -1.

□

III.3.5 Exercices résolus

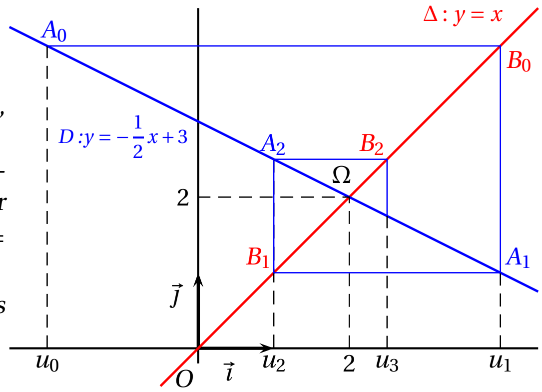
III.3.5.a Suite arithmético-géométrique

Exercice III.3.4. ***On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :*** $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}u_n + 3 \end{cases}$.

1. Déterminer un réel a tel que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = u_n - a$; soit géométrique.

2. Exprimer explicitement le terme général de la suite (v_n) ; en déduire celui de la suite (u_n).

Solution *Pour se faire une idée, entreprenons une étude graphique.*



On trace les droites D et Δ d'équations respectives :
$y = -\dfrac{1}{2}x + 3$ *et* $y = x$.
Les coordonnées du point $\Omega(2;2)$ vérifient les équations de D et Δ, donc Ω est le point d'intersection de ces deux droites sécantes.
Il semble sur le graphique (on pourrait aisément le démontrer géométriquement) qu'une homothétie h, de centre Ω, transforme (pour tout n) A_n en A_{n+1}. Ce qui suggère une relation du type : $\overrightarrow{\Omega A}_{n+1} = k\overrightarrow{\Omega A}_n$.
Or les vecteurs $\overrightarrow{\Omega A}_{n+1}$ et $\overrightarrow{\Omega A}_n$ ont respectivement pour abscisses $u_{n+1} - 2$ et $u_n - 2$.

On aurait donc : $u_{n+1} - 2 = k(u_n - 2)$.
Ces observations graphiques nous conduisent à examiner si pour $a = 2$, la suite (v_n) est géométrique.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = -\dfrac{1}{2}u_n + 3 - 2 = -\dfrac{1}{2}u_n + 1 = -\dfrac{1}{2}(u_n - 2) = -\dfrac{1}{2}v_n$.
Donc, pour $a = 2$, la suite (v_n) est la suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = -4$.
Par conséquent la suite (v_n) est définie par : $v_n = -4\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $u_n = v_n + 2$;
donc la suite (u_n) est définie par : $u_n = -4\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + 2$. □

Pour deviner le comportement d'une suite, une étude graphique (lorsqu'elle est envisageable) est souvent fructueuse.

Pour démontrer qu'une suite (v_n) est géométrique, on peut exprimer v_{n+1} en fonction de v_n de façon à exhiber une relation du type : $v_{n+1} = qv_n$.

III.3.6 Exercices

III.3.a. (u_n) est la suite arithmétique de premier terme, $u_2 = -3$ et de raison 2.
Déterminer une expression explicite du terme général de (u_n) et calculer u_{100}. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

III.3.b. (u_n) est la suite arithmétique de premier terme, $u_2 = -2$ et de raison 3.
Déterminer une expression explicite du terme général de (u_n) et calculer u_{100}. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

III.3.c. (u_n) est la suite géométrique de premier terme, $u_2 = -0,125$ et de raison 2.

1. Déterminer une expression explicite du terme général de (u_n) et calculer u_{10}. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

2. Calculer la somme des huit premiers termes de la suite (u_n).

III.3.d. (u_n) est la suite géométrique de premier terme, $u_2 = 729$ et de raison $-\dfrac{1}{3}$.

1. Déterminer une expression explicite du terme général de (u_n) et calculer u_9. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

2. Calculer la somme des sept premiers termes de la suite (u_n).

III.3.e. Calculer : $\sum\limits_{n=1}^{9}(2n+3)$ et $\sum\limits_{n=1}^{9} 2n + 3$.

III.3.f. Calculer : $\sum_{n=1}^{100}(3n-2)$ et $\sum_{i=1}^{n}(3i-2)$.

III.3.g. **1.** Calculer : $\sum_{n=1}^{10}\left(3\times 2^n\right)$ et $\sum_{i=1}^{n}\left(3\times 2^n\right)$

2. Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n}\left(3\times 2^n\right)$.

III.3.h. **1.** Calculer : $\sum_{n=0}^{10}6\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\sum_{i=0}^{n}6\left(\frac{1}{3}\right)^i$.

2. Calculer : $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}6\left(\frac{1}{3}\right)^i$.

III.3.i. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{c} u_0=0 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+2 \end{array}\right. \quad \text{et } \forall n\in\mathbb{N}, v_n=u_n-3$$

1. Démontre que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison, puis d'éterminer des expressions explicites des termes généraux des suites (u_n) et (v_n).

2. Calculer : $\sum_{i=0}^{n}u_i$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}u_i$.

III.3.j. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\left\{\begin{array}{c} u_0=2 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=-2u_n+3 \end{array}\right.$$

Calculer : $\sum_{i=0}^{n}u_i$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{i=0}^{n}u_i$.

III.4 Exercices

III.1. **1.** Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O};\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique : 2cm). On considère la fonction $f : x\mapsto \frac{4x-6}{x-1}$.

a. Préciser l'ensemble de définition, D_f, de la fonction f.

b. Déterminer deux nombres réels a et b tels que pour tout élément, x, de D_f :

$$\frac{4x-6}{x-1}=a+\frac{b}{x-1}.$$

c. Étudier les variations de f.

d. Déterminer les points fixes de f.

e. Déterminer l'équation réduite de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 3.

f. Tracer $\mathscr{C}_f$.

2. Représenter sur le graphique établi en **1.f.** les quatre premiers termes de la suite (u_n) vérifiant, $u_0=7$, et pour tout entier naturel non nul, n : $u_n=f(u_{n-1})$.
Conjecturer la limite éventuelle de la suite (u_n).

III.2. Suite homographique

Soit f la fonction définie par $f(x)=\frac{4x-1}{x+2}$.
On considère la suite (u_n) définie par $u_0=5$ et pour tout nombre entier naturel n, par : $u_{n+1}=\frac{4u_n-1}{u_n+2}=f(u_n)$.

1. a. Représenter graphiquement les quatre premiers temes de la suite (u_n). On laissera apparents les traits de construction.

b. Quelles conjectures peut-on émettre sur le sens de variation et sur la convergence de la suite (u_n) ?

2. Dans cette question, on se propose d'étudier la suite (u_n) par une autre méthode, en déterminant une expression de u_n en fonction de n.

Pour tout nombre entier naturel n, on pose :

$$v_n=\frac{1}{u_n-1}.$$

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\frac{1}{3}$.

b. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

III.3. Suite de Fibonacci

La suite de Fibonacci est la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$u_0=0$; $u_1=1$ et pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$, $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$.
On se propose de déterminer une expression explicite du terme général de la suite.

1. Donner les dix premiers termes de la suite.

2. (a_n) et (b_n) sont deux suites géométriques de premier terme : $a_0=b_0=1$. La raison de (a_n) est positive et celle de (b_n) est négative. Elles vérifient pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$: $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ et $b_{n+1}=b_n+b_{n-1}$.

a. Démontrer que les raisons des suites (a_n) et (b_n) sont les solutions de l'équation :

$$q^2=q+1 \qquad \text{(E)}$$

b. En déduire les expressions explicites des suites (a_n) et (b_n).

3. Déterminer le couple (α,β) de nombres réels solution du système : $\left\{\begin{array}{l}\alpha a_0+\beta b_0=u_0\\ \alpha a_1+\beta b_1=u_1\end{array}\right.$.

4. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :
$v_n=\alpha a_n+\beta b_n$.
Démontrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^\star$: $v_{n+1}=v_n+v_{n-1}$

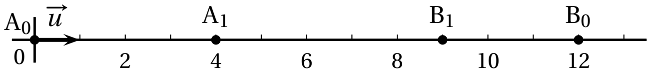
5. Conclure.

Sujets de Baccalauréat

III.4.

Partie A

On considère les suites de points A_n et B_n définies pour tout entier naturel n de la manière suivante : sur un axe orienté $\left(O; \vec{u}\right)$ donné ci-dessous.



Le point A_0 a pour abscisse 0 et le point B_0 a pour abscisse 12. Le point A_{n+1} est le barycentre des points $(A_n, 2)$ et $(B_n, 1)$, le point B_{n+1} est le barycentre des points pondérés $(A_n, 1)$ et $(B_n, 3)$.

1. Sur le graphique placer les points A_2, B_2.

2. On définit les suites (a_n) et (b_n) des abscisses respectives des points A_n et B_n. Montrer que :

$$a_{n+1} = \frac{2a_n + b_n}{3}.$$

On admet de même que $b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4}$.

Partie B

1. On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n, par $u_n = b_n - a_n$.

a. Montrer que la suite (u_n) est géométrique. En préciser la raison.

b. Donner l'expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.

c. Déterminer la limite de (u_n). Interpréter géométriquement ce résultat.

2. a. Démontrer que la suite (a_n) est croissante (on pourra utiliser le signe de u_n).

b. Étudier les variations de la suite (b_n).

3. Que peut-on déduire des résultats précédents quand à la convergence des suites (a_n) et (b_n) ?

Partie C

1. On considère la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par : $v_n = 3a_n + 4b_n$.
Montrer que la suite (v_n) est constante.

2. Déterminer la limite des suites (a_n) et (b_n).

D'après Antilles-Guyanne juin 2006

III.5. Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

1. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et, pour tout nombre entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 4.$$

On pose, pour tout nombre entier naturel n, $v_n = u_n - 6$.

a. Pour tout nombre entier naturel n, calculer v_{n+1} en fonction de v_n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. Démontrer que pour tout nombre entier naturel n, $u_n = -5\left(\dfrac{1}{3}\right)^n + 6$

c. Étudier la convergence de la suite (u_n).

2. On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$:

$$n w_n = (n+1) w_{n-1} + 1 \quad \text{et} \quad w_0 = 1.$$

Le tableau suivant donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

a. Détailler le calcul permettant d'obtenir w_{10}.

b. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Donner la nature de la suite (w_n). Calculer w_{2009}.

D'après France juin 2009

Index