À rendre le vendredi 26 septembre 2008

DEVOIR EN TEMPS LIBRE N$^{\text{o}}$ 1

EXERCICE I Définition bifocale d'une l'hyperbole équilatère
Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Unité graphique : 1 cm.

1. Déterminer les valeurs exactes des coordonnées des points d'intersection, F et F′, du cercle, $\mathscr{C}$, de centre O et de rayon 2 et de la première bissectrice[1], Δ, (F′ est le point d'abscisse positive).

2. **a.** Démontrer que pour tout point $\mathrm{M}(x\,;y)$ du plan :

$$\mathrm{MF}' = \sqrt{x^2 + y^2 + 4 - 2\sqrt{2}(x+y)}.$$

b. Donner, pour tout point $\mathrm{M}(x\,;y)$ du plan, la distance MF en fonction de x et y.

c. Déterminer une équation de la médiatrice, Δ', du segment $[\mathrm{FF}']$. Puis donner une inéquation du demi-plan ouvert, (P), de frontière Δ' contenenat le point F′, et une caractérisation (P) par une inégalité entre des distances.

3. On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des points M du plan qui vérifient :

$$\left|\mathrm{MF} - \mathrm{MF}'\right| = 2\sqrt{2}$$

a. Démontrer que $\mathscr{H}$ est symétrique par rapport à O et par rapport à Δ.

b. Déterminer une équation de $\mathscr{H}$ la plus simple possible, puis tracer $\mathscr{H}$
(*on pourra justifier que $\mathscr{H}$ n'a aucun point d'intersection avec* $\mathrm{O}y$).

4. On désigne par $\mathscr{H}'$ l'ensemble des points M du plan qui vérifient :

$$\mathrm{MF} - \mathrm{MF}' = 2\sqrt{2}$$

a. Démontrer que : $\mathscr{H}' = \mathscr{H} \cap (\mathrm{P})$. Quelle relation lie les ensembles de points $\mathscr{H}'$ et $\mathscr{H}$?
Repasser en rouge $\mathscr{H}'$ sur le même graphique.

b. Soit (P') le demi-plan d'inéquation : $x > 0$.
Démontrer que pour tout point M de $\mathscr{H}$:

$$\mathrm{M} \in \mathscr{H}' \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{M} \in (\mathrm{P}').$$

En déduire une relation entre les ensembles $\mathscr{H}'$ et $\mathscr{H} \cap (\mathrm{P}')$.

5. Soit $\mathrm{M}_0\left(x_0\,;\dfrac{1}{x_0}\right)$ un point de $\mathscr{H}'$ (avec $x_0 > 0$), A le symétrique de O par rapport à M_0 et B et C les projetés orthogonaux respectifs de A sur les axes $\mathrm{O}x$ et $\mathrm{O}y$.

a. Donner les coordonnées des points A, B, C et l'équation réduite de la droite (BC).

b. Étudier la position de $\mathscr{H}'$ par rapport à (BC).

c. Que représente la droite (BC) pour la courbe $\mathscr{H}'$?

[1] Dans le plan muni d'un repère orthonormé, la première bissectrice est la droite d'équation : $y = x$.