Devoir passerelle, mathématiques — Correction

`A1 : 2` Pour trouver l'antécédent de $\frac{21}{5}$ par la fonction affine $f : x \longmapsto \frac{3}{5}x + 3$, on doit résoudre l'équation $f(x) = \frac{21}{5}$:

$$\begin{aligned} f(x) = \frac{21}{5} &\iff \frac{3}{5}x + 3 = \frac{21}{5} \\ &\iff 3x + 15 = 21 \\ &\iff 3x = 21 - 15 = 6 \\ &\iff x = \frac{6}{3} = 2 \end{aligned}$$

Cela prouve qu'il y a un unique antécédent : 2.

`D1 : 3` Dans l'équation proposée, on reconnaît une identité remarquable :

$$\begin{aligned} (x-1)^2 - 4 = 0 &\iff (x-1)^2 - 2^2 = 0 \\ &\iff \Big[(x-1) - 2\Big] \times \Big[(x-1) + 2\Big] = 0 \\ &\iff (x-3)(x+1) = 0 \end{aligned}$$

C'est une équation produit, qui équivaut à $x - 3 = 0$ ou $x + 1 = 0$, c'est-à-dire $x = 3$ ou $x = -1$. La solution à conserver est donc $x = 3$.

`F1 : 8` La somme des 21 nombres est $S = 168$. La moyenne est alors $m = \frac{168}{21} = 8$.

`I1 : 9` Pour déterminer la médiane de la série de 13 nombres, il faut les ranger par ordre croissant :

$$6\,;\,7\,;\,7\,;\,8\,;\,9\,;\,9\,;\,\underline{\mathbf{9}}\,;\,10\,;\,12\,;\,12\,;\,13\,;\,14\,;\,15$$

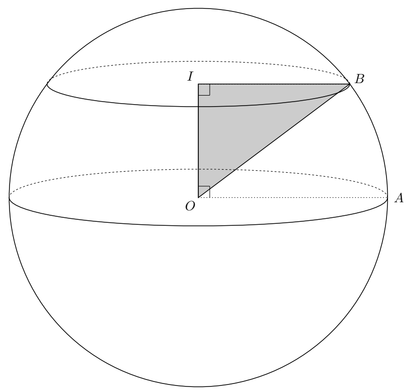
La médiane est le 7ème nombre, c'est-à-dire 9, puisqu'il y a 50 % des nombres qui lui sont inférieurs et 50 % qui lui sont supérieurs.

`B2 : 7` Comme pour la médiane, il faut ranger les 24 nombres par ordre croissant :

$$1\,;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,7\,;\,7\,;\,8\,;\,8\,;\,9\,;\,9\,;\,10\,;\,10\,;\,10\,;\,11\,;\,12\,;\,13\,;\,13\,;\,14\,;\,15\,;\,17\,;\,18$$

Comme $6 \times 4 = 24$, le premier quartile se trouve entre la 6ème et la 7ème valeur. Comme il s'agit d'un 7 dans les deux cas, on en déduit que le premier quartile vaut 7.

`H2 : 3` Dans la figure ci-dessous, on considère le triangle rectangle OIB.



On sait que $IB = 4$ puisque c'est le rayon du cercle de coupe centré en I. De plus, $OB = 5$, c'est le rayon de la sphère. On peut alors appliquer le théorème de Pythagore, et on obtient facilement $OI^2 = OB^2 - IB^2 = 25 - 16 = 9$, ce qui nous donne $OI = 3$.

$\boxed{\texttt{E3 : 6}}$ Simplifions l'expression proposée :

$$\begin{aligned}\frac{3\times\left(10^2\right)^3\times 49\times 10^{-5}\times 10^8}{0,07\times 10^6} &= \frac{3\times 7^2}{7}\times\frac{10^{2\times 3}\times 10^{-5}\times 10^8}{10^4}\\ &= 21\times 10^{6-5+8-4}\\ &= 21\times 10^5\\ &= 2,1\times 10^6\end{aligned}$$

L'exposant de la puissance de 10 dans cette écriture scientifique est ainsi 6.

$\boxed{\texttt{A4 : 1}}$ Lorsqu'on lance au hasard un dé à 6 faces (que l'on va supposé équilibré, bien que ce ne soit pas précisé dans la question), la probabilité d'obtenir le nombre 4 est de $p_4 = \frac{1}{6} = 0,1\overline{6}$. Le chiffre des dixième est donc 1.

$\boxed{\texttt{D4 : 4}}$ Pour calculer le coefficient directeur de la fonction affine $f : x \longmapsto ax+b$, on utilise la formule (valable pour n'importe quels réels $u \neq v$) :

$$a = \frac{f(u)-f(v)}{u-v} = \frac{f(5)-f(-2)}{5-(-2)} = \frac{17-(-11)}{5+2} = \frac{28}{7} = 4$$

$\boxed{\texttt{F4 : 7}}$ Le prix du tee-shirt après le rabais de 30 % est de $15-15\times\frac{30}{100} = 15-15\times 0,3 = 15\times(1-0,3) = 15\times 0,7 = 10,5$. Comme il me manque 3,5 €, j'en déduis que j'ai 7 € en poche.

$\boxed{\texttt{I4 : 2}}$ Simplifions l'expression proposée :

$$\begin{aligned}-2\sqrt{27}+3\sqrt{48}-2\sqrt{12} &= -2\sqrt{9\times 3}+3\sqrt{16\times 3}-2\sqrt{4\times 3}\\ &= -2\times 3\sqrt{3}+3\times 4\sqrt{3}-2\times 2\sqrt{3}\\ &= (-6+12-4)\sqrt{3}\\ &= 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

Le nombre recherché est donc 2.

$\boxed{\texttt{C5 : 8}}$ Résolvons l'équation proposée :

$$\begin{aligned}2(x+4)-5 = 3\left(x-\frac{5}{3}\right) &\iff 2x+8-5 = 3x-5\\ &\iff 2x-3x = -5-8+5\\ &\iff -x = -8\\ &\iff x = 8\end{aligned}$$

$\boxed{\texttt{E5 : 2}}$ Résolvons l'équation proposée, en la factorisant pour obtenir une équation produit (**Attention :** il ne faut surtout pas développer, sinon on se retrouve avec une équation qu'on n'est pas capable de résoudre en début de seconde) :

$$\begin{aligned}(2x-4)(5x+1)-(2x-4)(3x+4) = 0 &\iff (2x-4)\Big[(5x+1)-(3x+4)\Big] = 0\\ &\iff (2x-4)\Big[5x+1-3x-4\Big] = 0\\ &\iff (2x-4)(2x-3) = 0\\ &\iff 2x-4 = 0 \text{ ou } 2x-3 = 0\\ &\iff x = 2 \text{ ou } x = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

Des deux solutions, on garde uniquement celle qui est entière : 2.

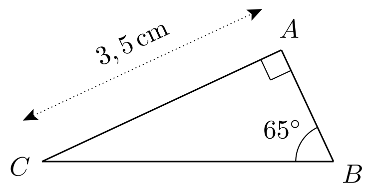
$\boxed{\texttt{G5 : 1}}$ La fonction affine $f : x \longmapsto ax + b$ vérifie $f(2) = 5$ et $f(-4) = 7$. On commence par calculer son coefficient directeur (comme pour la case D4) :

$$a = \frac{f(u) - f(v)}{u - v} = \frac{f(2) - f(-4)}{2 - (-4)} = \frac{5 - (-7)}{2 + 4} = \frac{12}{6} = 2$$

À présent, on sait que $f(x) = 2x + b$. On a alors $b = f(x) - 2x$. En prenant par exemple $x = 2$, on trouve :

$$b = f(2) - 2 \times 2 = 5 - 4 = 1$$

$\boxed{\texttt{A6 : 3}}$ On a un triangle ABC rectangle en A. On suppose que $\widehat{ABC} = 65°$ et que $AC = 3,5\,\text{cm}$, ce qui correspond aux données de l'énoncé.



On a alors :

$$\sin\left(\widehat{ABC}\right) = \frac{AC}{BC}$$

ce qui nous amène (par exemple grâce à un produit en croix) à :

$$BC = \frac{AC}{\sin\left(\widehat{ABC}\right)} = \frac{3,5}{\sin(65°)} \simeq 3,86$$

La partie entière de cette hypoténuse est alors 3.

$\boxed{\texttt{D6 : 9}}$ Une pyramide régulière a base octogonale est constituée :

- De la base, qui est un octogone régulier (8 sommets) ;
- Des faces latérales, qui sont toutes des triangles isocèles de mêmes dimensions. Tous ces triangles se rejoignent au sommet de la pyramide.

Il y a donc exactement 9 sommets.

$\boxed{\texttt{F6 : 5}}$ Pour simplifier la fraction, on doit trouver le PGCD du numérateur et du dénominateur (c'est-à-dire le plus grand entier qui divise à la fois 7 735 et 13 923). On utilise pour cela l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 13\,923 &= 1 \times 7\,735 + 6\,188 \\ 7\,735 &= 1 \times 6\,188 + 1\,547 \\ 6\,188 &= 4 \times 1\,547 + 0 \end{aligned}$$

Le dernier reste non nul est 1 547, c'est donc le PGCD recherché. En effet :

$$\frac{7\,735}{13\,923} = \frac{5 \times 1\,547}{9 \times 1\,547} = \frac{5}{9}$$

Le numérateur recherché est donc 5.

$\boxed{\texttt{I6 : 4}}$ Recherchons le PGCD de 516 et de 112 grâce à l'algorithme d'Euclide :

$$\begin{aligned} 516 &= 4 \times 112 + 68 \\ 112 &= 1 \times 68 + 44 \\ 68 &= 1 \times 44 + 24 \\ 44 &= 1 \times 24 + 20 \\ 24 &= 1 \times 20 + 4 \\ 20 &= 5 \times 4 + 0 \end{aligned}$$

Le PGCD recherché est le dernier reste non nul, à savoir 4.

$\boxed{\texttt{E7 : 4}}$ Résolvons le système proposé par substitution :

$$\begin{cases} 2x+y=-2 \\ 5x+3y=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-2-2x \\ 5x+3(-2-2x)=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y=-2-2x \\ 5x-6-6x=0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y=-2-2x \\ -x=6 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x=-6 \\ y=-2-2\times(-6)=-2+12=10 \end{cases}$$

La somme des deux nombres solutions du système est alors $-6+10=4$.

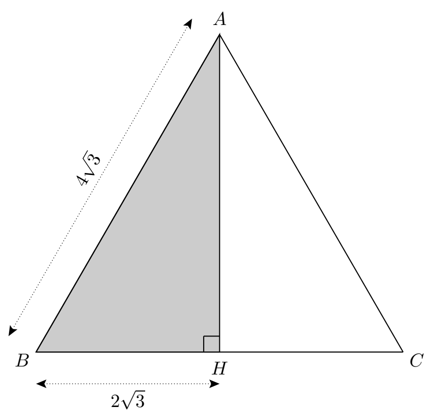
$\boxed{\texttt{B8 : 9}}$ Simplifions l'expression proposée :

$$\begin{aligned} \frac{8\sqrt{3}+2\sqrt{75}}{\sqrt{12}} &= \frac{8\sqrt{3}+2\sqrt{25\times 3}}{\sqrt{4\times 3}} \\ &= \frac{8\sqrt{3}+2\times 5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{(8+10)\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} \\ &= \frac{18}{2} \\ &= 9 \end{aligned}$$

$\boxed{\texttt{H8 : 5}}$ Simplifions l'expression proposée :

$$\frac{3+\frac{7}{6}}{\frac{4}{3}-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{18}{6}+\frac{7}{6}}{\frac{8}{6}-\frac{3}{6}} = \frac{\frac{25}{6}}{\frac{5}{6}} = \frac{25}{6}\times\frac{6}{5} = 5$$

$\boxed{\texttt{A9 : 6}}$ Soit ABC un triangle équilatéral de côté $a=4\sqrt{3}$. On considère H le pied de la hauteur issue de A. Comme une hauteur est aussi une médiane dans un tel triangle, on sait que $BH=HC=\frac{a}{2}=2\sqrt{3}$.



À présent, on peut appliquer le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle ABH, et on trouve

$$AH^2 = AB^2 - BH^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 - \left(2\sqrt{3}\right)^2 = 16\times 3 - 4\times 3 = 12\times 3 = 36$$

On en conclut donc que la hauteur du triangle vaut $AH = 6$.

`D9 : 7` Si on augmente 4 de 75 %, on obtient :

$$4 + 4 \times \frac{75}{100} = 4 \times \left(1 + \frac{75}{100}\right) = 4 \times 1,75 = 7$$

`F9 : 2` Posons $f(x) = 2 - x - x^2$. On a alors

$$f(-1) = 2 - (-1) - (-1)^2 = 2 + 1 - 1 = 2$$

`I9 : 8` La pyramide de Khéops est une pyramide régulière à base carrée. Elle a donc 5 faces : 1 carré (4 arêtes), et 4 triangles isocèles (3 arêtes chacun). Le nombre d'arêtes est alors $1 \times 4 + 4 \times 3 = 16$. Mais il faut tenir compte du fait que chaque arête appartient à 2 faces simultanément, il faut donc diviser par 2 : la pyramide possède 8 arêtes.

Il ne reste plus qu'à résoudre le `sudoku` :

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$\boxed{2}$	6	5	$\boxed{3}$	7	$\boxed{8}$	4	1	$\boxed{9}$
2	8	$\boxed{7}$	1	2	9	4	5	$\boxed{3}$	6
3	9	3	$\boxed{4}$	5	$\boxed{6}$	1	$\boxed{8}$	2	7
4	$\boxed{1}$	5	9	$\boxed{4}$	8	$\boxed{7}$	3	6	$\boxed{2}$
5	7	4	$\boxed{8}$	6	$\boxed{2}$	3	$\boxed{1}$	9	5
6	$\boxed{3}$	2	6	$\boxed{9}$	1	$\boxed{5}$	7	8	$\boxed{4}$
7	5	8	$\boxed{2}$	1	$\boxed{4}$	9	$\boxed{6}$	7	3
8	4	$\boxed{9}$	7	8	3	6	2	$\boxed{5}$	1
9	$\boxed{6}$	1	3	$\boxed{7}$	5	$\boxed{2}$	9	4	$\boxed{8}$