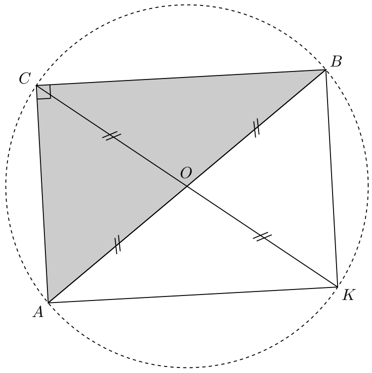
Évaluation de mathématiques, deuxième partie — Correction

Exercice 1. —

1°) Le cercle $\mathscr{C}$ est le cercle circonscrit du triangle ABC. Or, le côté $[AB]$ de ce triangle est un diamètre de $\mathscr{C}$. On peut donc en déduire d'après le théorème du triangle inscrit que ABC est rectangle en C.

> **Commentaires:**
>
> Tant qu'on n'a pas démontré que le triangle est rectangle, on n'a pas le droit d'affirmer que $[AB]$ est l'hypoténuse, ce terme étant spécifique aux triangles rectangles. Il existe de multiples façons de rédiger cette question sans utiliser ce mot.



2°) Appliquons le théorème de Pythagore dans le triangle ABC rectangle en C :
On a $AB^2 = AC^2 + CB^2$, soit encore $CB^2 = AB^2 - AC^2 = 8^2 - 4,8^2 = 40,96$. Comme une longueur est toujours positive, on en déduit que $CB = \sqrt{40,96} = 6,4\,\text{cm}$.

3°) Dans le triangle rectangle ABC, on peut calculer le sinus de l'angle $\widehat{CBA}$:

$$\sin\left(\widehat{CBA}\right) = \frac{AC}{AB} = \frac{4,8}{8} = 0,6$$

On en déduit alors que $\widehat{CBA} = \sin^{-1}(0,6) \simeq 36,9°$.

4°) **a)** Les diagonales du quadrilatère $ACBK$ sont $[AB]$ et $[CK]$. On sait déjà que $[AB]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$. Comme K est un point de la demi-droite $[CO)$, on a $O \in [CK]$, ce qui montre que ce segment est également un diamètre de $\mathscr{C}$.
Les diagonales du quadrilatère $ACBK$ se coupent ainsi en leur milieu O, ce qui montre que c'est un parallélogramme.

> **Commentaires:**
>
> Il ne faut surtout pas faire un étalage de toutes les propriétés visibles sur la figure (qui plus est généralement sans en démontrer aucune).
> Par exemple, pour montrer qu'on a un parallélogramme, on n'affirme pas que les diagonales se coupent en leur milieu, ont même longueur, que les côtés opposés sont parallèles et de même longueur, qu'on a 4 côtés, 4 angles droits et que le capitaine a 47 ans. On garde le **strict nécessaire** pour démontrer la propriété, ni plus, ni moins. S'il y a plusieurs démonstrations possibles, on s'en tient à l'une d'entre elles.
> Si le professeur doit choisir parmi une kyrielle de propositions (qu'elles soient justes ou fausses), il n'acceptera jamais la réponse.

b) Comme $ACBK$ est un parallélogramme et que de plus l'angle $\widehat{ACB}$ est droit, on peut affirmer que $ACBK$ est en fait un rectangle.

> **<u>Commentaires:</u>**
>
> On pouvait *directement* montrer qu'$ACBK$ est un rectangle puisque ces diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu (ce sont des diamètres de $\mathscr{C}$).
> C'est d'ailleurs généralement comme cela que l'on démontre le théorème du triangle inscrit utilisé au début de l'exercice.

5°) Comme $ACBK$ est un parallélogramme, on sait que les points A et B sont symétriques par rapport à O. De même, les points C et K sont symétriques par rapport à O. De plus, le point O est invariant par la symétrie de centre O.

Il découle de ceci que les triangle AOC et BOK sont symétriques par rapport à O. Les symétries conservant les aires, on peut affirmer que ces deux triangles ont la même aire.

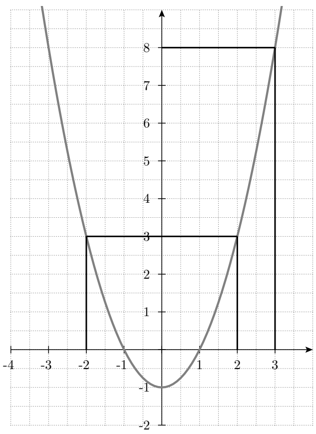
Exercice 2. —

a) L'image de 3 par la fonction g est $g(3) = 8$;

b) $g(-2) = 3$;

c) 3 a exactement 2 antécédents par g : -2 et 2 ;

d) 0 est l'unique antécédent de -1 par g.



Exercice 3. —

a)
- Seules les 3 premières réponses sont des fonctions affines ;
- L'ordonnée à l'origine de la droite (d) est 1, ce qui élimine la réponse $x \longmapsto x + 3$.
- La droite (d) étant croissante, son coefficient directeur est positif.

On déduit de tout ceci que l'unique bonne réponse est $x \longmapsto 3x + 1$.

b) Comme la fonction f est du type $x \longmapsto ax + b$, il s'agit d'une fonction affine. On peut calculer son coefficient directeur a par :

$$a = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{f(1) - f(4)}{1 - 4} = \frac{2}{3}$$

Contrairement à ce qu'affirme l'énoncé, seule la première réponse est fausse.

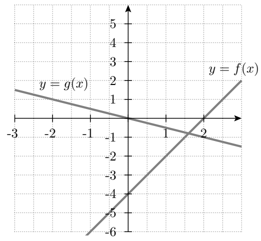
Exercice 4. —

a) L'image de 3 par la fonction f est $f(3) = 2 \times 3 - 4 = 2$.

b) Pour chercher le ou les antécédents de 3 par g, on doit résoudre l'équation $g(x) = 3$, c'est-à-dire $-\frac{1}{2}x = 3$. On trouve $x = -2 \times 3 = -6$.

c) Pour tracer les deux fonctions affines proposées, on calcule quelques images :

- $f(0) = -4$: la droite $\mathscr{D}_f$ passe par le point de coordonnées $(0; -4)$;
- $f(3) = 2$: la droite $\mathscr{D}_f$ passe par le point de coordonnées $(3; 2)$;
- La droite $\mathscr{D}_g$ passe par l'origine du repère puisqu'il s'agit d'une fonction linéaire ;
- $g(2) = -1$: la droite $\mathscr{D}_g$ passe par le point de coordonnées $(2; -1)$;



Exercice 5. —

a) Droites parallèles :

- Les droites (AB) et (EH) ne sont pas parallèles : l'une est verticale alors que l'autre est horizontale ;
- Les droites (ED) et (BG) ne sont pas parallèles : en effet, (BG) est parallèle à (AH), mais cette dernière coupe (ED). Or, la règle disant que « si $(d_1) /\!/ (d_2)$ et $(d_2) /\!/ (d_3)$ alors $(d_1) /\!/ (d_3)$ » reste valable même dans l'espace ;
- Les droites (ED) et (FC) sont parallèles : elles sont toutes les deux dans le plan $(EDFC)$, et ne se coupent pas.

> **Commentaires:**
>
> Dans l'espace, il ne suffit pas que deux droites ne soient pas sécantes pour qu'elles soient parallèles, il faut en plus qu'elles soient dans un même plan. Sinon les droites (AB) et (EH) précédentes auraient été parallèles.

b) Droites perpendiculaires :

- On a $(AD) \perp (DH)$, puisqu'il s'agit de deux côtés consécutifs du carré $ADHE$;
- Contrairement à ce que beaucoup ont affirmé, on a bien $(AD) \perp (DG)$. Ce n'est pas si évident que cela à visualiser, mais cela relève du même argument que $(AB) \perp (BG)$ qui semble bien plus naturel. Pour s'en convaincre, prendre un coin d'une pièce et poser une équerre dont l'un des côtés de l'angle droit longe (AB) et l'autre repose sur le plan $(BCGF)$;
- Les droites (BG) et (FC) sont perpendiculaires, puisque diagonales du carré $BCGF$.

c) Droites sécantes :

- Les droites (AE) et (GH) ne sont pas sécantes : en effet, la droite (HG) est parallèle au plan $(AEFB)$ qui contient la droite (AE). Donc la droite (HG) ne peut pas couper ce plan, et à fortiori ne peut pas couper (AE) ;
- Les droites (AD) et (DG) se coupent évidemment au point D ;
- Les droites (EC) et (BH) sont deux des quatre diagonales du cube, elles se coupent donc en son centre.

Exercice 6. —

a) $p\,(\text{« la boule tirée est rouge et porte le numéro 2 »}) = \frac{1}{5}$;

b) $p\,(\text{« la boule tirée est blanche et porte le numéro 2 »}) = \frac{1}{5}$;

c) $p\,(\text{« la boule tirée est blanche »}) = \frac{2}{5}$;

d) $p\,(\text{« la boule tirée porte le numéro 1 »}) = \frac{2}{5}$;

e) $p\,(\text{« la boule tirée porte un numéro inférieur à 4 »}) = \frac{5}{5} = 1$;

f) $p\,(\text{« la boule tirée est blanche et porte le numéro 3 »}) = \frac{0}{5} = 0$;