COURS DE MATHÉMATIQUES

Seconde

Valère BONNET (postmaster@mathsaulycee.info)

20 décembre 2006

Lycée PONTUS DE TYARD
13 rue des Gaillardons
71100 CHALON SUR SAÔNE
Tél. : (33) 03 85 46 85 40
Fax : (33) 03 85 46 85 59
FRANCE

Table des matières

Chapitre VII

Triangles isométriques, triangles semblables

VII.1 Orientation du plan

Orienter le plan, c'est choisir un sens positif, ou direct, de parcours des cercles du plan. Par convention on choisit le sens trigonométrique, c'est-à-dire le sens contraire des aiguilles d'une montre, comme sens positif.
Ainsi ABC est un triangle de *sens direct* alors que DEF est un triangle de *sens indirect*.

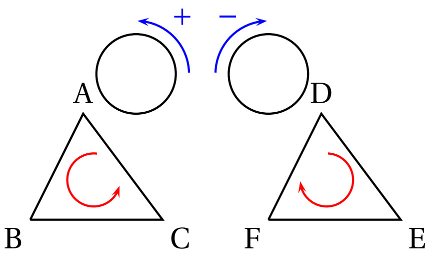


FIG. VII.1 – Orientations du plan

VII.2 Triangles isométriques

VII.2.1 Définition et propriétés

DÉFINITION VII.2.1

Deux triangles *isométriques* sont deux triangles dont les côtés sont deux à deux de même longueur.

Remarques

1. Dire que les triangles ABC et A'B'C' sont isométriques signifie que : $\begin{cases} AB = A'B' \\ BC = B'C' \\ CA = C'A' \end{cases}$.

2. Si les triangles ABC et A'B'C' d'une part et A'B'C' et A"B"C" d'autre part sont isométriques ; alors les triangles ABC et A"B"C" sont isométriques.

Exemples

1. ABC est un triangle isocèle en A, H le milieu de [BC]. Alors ABH et ACH sont isométriques (l'un est image de l'autre par la symétrie d'axe (AH)).

2. DEFG est un parallélogramme de centre I. DIG et FIE sont isométriques.

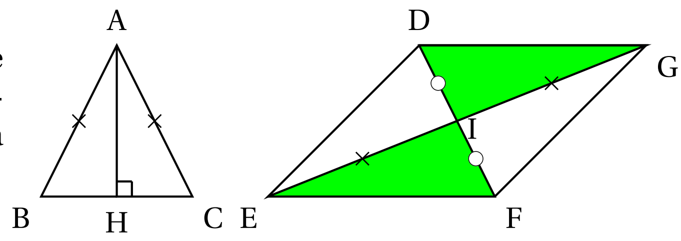


FIG. VII.2 – Exemples de triangles isométriques

Exercice VII.2.1. ***Citer deux autres triangles isométriques apparaissant sur le parallélogramme DEFG de la figure VII.2.***

Remarques

1. Les triangles AHB et AHC sont isométriques et orientés en des sens contraires, on dit qu'ils sont *indirectement isométriques.*

2. Les triangles GID et EIF sont isométriques et orientés dans le même sens, on dit qu'ils sont *directement isométriques.*

Exercice VII.2.2. ***Construire les points G et H tels que, sur la figure VII.3, les triangles ABC et DEG soient directement isométriques; les triangles ABC et DEH soient indirectement isométriques.***

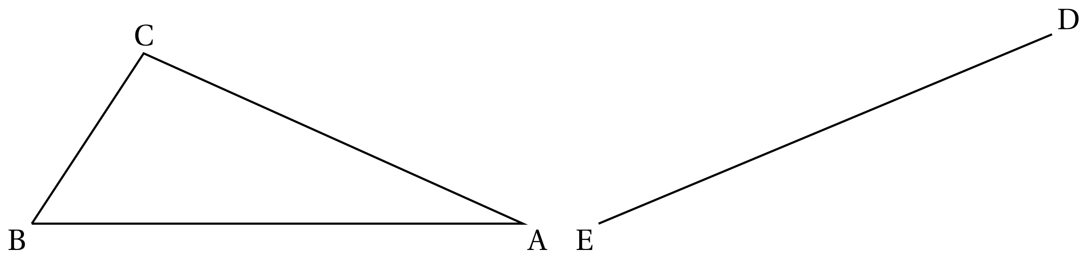


FIG. VII.3 – Construction de triangles isométriques

THÉORÈME VII.2.1 (ADMIS)

Si ABC et A'B'C' sont deux triangles isométriques, alors :

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \qquad \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'} \qquad \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$$

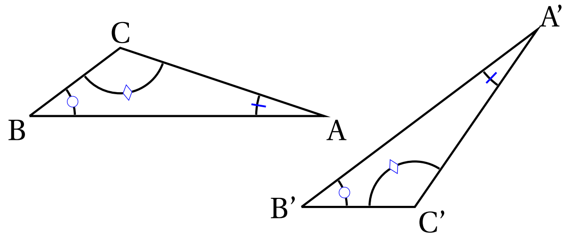


FIG. VII.4 – Deux triangles isométriques ont les mêmes angles

Voir figure VII.4.

THÉORÈME VII.2.2

Si ABC et A'B'C' sont deux triangles isométriques, alors ils ont même aire.

Démonstration

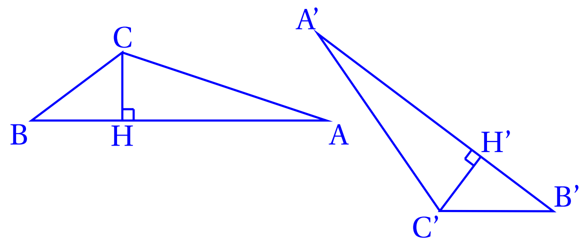


FIG. VII.5 – Deux triangles isométriques ont même aire

Soit ABC et A'B'C' deux triangles isométriques (voir figure VII.5), H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC et H' le pied de la hauteur issue de A' dans le triangle A'B'C'.

On sait que $AB = A'B'$; $AC = A'C'$ et $\widehat{CAH} = \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'} = \widehat{C'A'H'}$;
donc, dans les triangles rectangles ACH et A'C'H', on a :

$$C'H' = A'C' \sin \widehat{C'A'H'} = AC \sin \widehat{CAH} = CH.$$

On en déduit que :

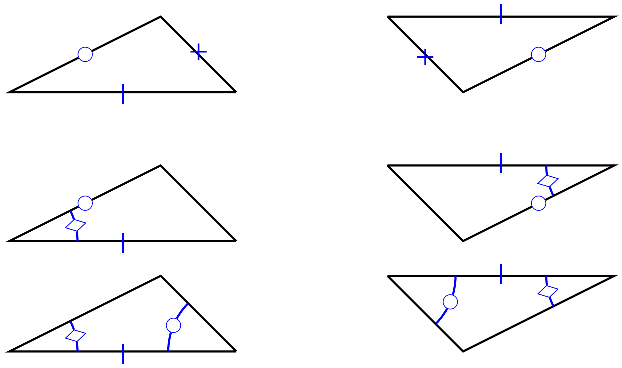
$$\text{aire}\left(A'B'C'\right) = \frac{A'B' \times C'H'}{2} = \frac{AB \times CH}{2} = \text{aire}\,(ABC)$$

□

Remarque Les réciproques des théorèmes VII.2.1 et VII.2.2 sont fausses.

VII.2.2 Cas d'isométries de deux triangles

Théorème VII.2.3 (admis)
Pour démontrer que deux triangles sont isométriques, il suffit d'établir l'une des propositions suivantes.
(1) Chaque côté est de même longueur que son homologue.
(2) L'un des angles est égal à son homologue et les côtés adjacents à cet angle sont chacun de même longueur que son homologue.
(3) Deux angles sont égaux à leur homologue et l'un des côtés est de même longueur que son homologue.



Remarque Le fait d'avoir deux côtés de même longueur que leur côté homologue et un angle égal

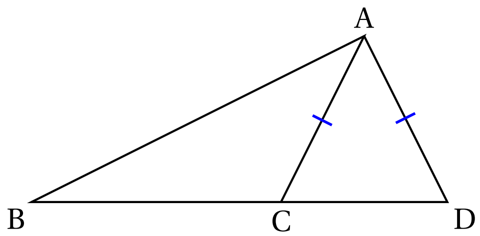


FIG. VII.6 – ABC et ABD ne sont pas isométriques

à son homologue ne suffit pas pour conclure que les deux triangles sont isométriques. Sur la figure VII.6, si on considère les triangles ABC et ABD, les côtés homologues [AB] et [AB] sont de même longueur, les côtés homologues [AC] et [AD] sont de même longueur et les angles homologues $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ABD}$ sont égaux. Pourtant les triangles ABC et ABD ne sont pas isométriques car les côtés homologues [BC] et [BD] ne sont pas de même longueur.

VII.2.3 Exercices résolus

VII.2.3.a Démontrer que deux triangles sont isométriques

Exercice VII.2.3. ***ABC est un triangle isocèle en A. B' et C' sont les milieux respectifs des côtés [AC] et [AB]. Démontrer, par trois méthodes différentes, que les triangles ABB' et ACC' sont isométriques.***

Solution *On introduit le point A' milieu de [BC]. Le triangle ABC est isocèle en A, donc (AA') est la médiatrice du segment [BC] ; par conséquent la symétrie,* $\mathrm{S}_{\mathrm{AA}'}$*, d'axe (AA') transforme B en C.*

1^re^ méthode

De plus $\mathrm{S}_{\mathrm{AA}'}(\mathrm{A}) = \mathrm{A}$ *et les symétries conservent le milieu, donc* $\mathrm{S}_{\mathrm{AA}'}(\mathrm{B}') = \mathrm{C}'$*. On a démontré que* $\mathrm{S}_{\mathrm{AA}'}$ *transforme A en A, B en C et B' en C' ; nous savons de plus que les réflexions conservent la distance entre deux points, donc :*
AB = AC, AB' = AC', BB' = CC'.
Par conséquent les triangles ABB' et ACC' sont isométriques.

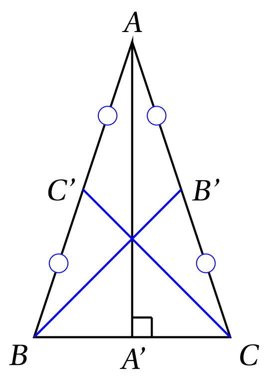


FIG. *VII.7* –

2^e^ méthode

Les angles homologues $\widehat{\mathrm{BAB}'}$ *et* $\widehat{\mathrm{CAC}'}$ *sont égaux et les côtés adjacents à* $\widehat{\mathrm{BAB}'}$*, [AB] et [AB'] sont de même longueur que leurs côtés homologues respectifs [AC] et [AC'] ; donc les triangles ABB' et ACC' sont isométriques.*

3^e^ méthode

Les angles homologues $\widehat{\mathrm{BAB}'}$ *et* $\widehat{\mathrm{CAC}'}$ *sont égaux. Les angles homologues* $\widehat{\mathrm{ABB}'}$ *et* $\widehat{\mathrm{ACC}'}$ *sont égaux car les réflexions conservent les angles et* $S_{\mathrm{AA}'}$ *transforme A en A, B en C et B' en C'. Les côtés homologues AB et AC sont de même longueur. Les triangles ABB' et ACC' ont deux angles égaux a leur homologue et un côté de même longueur que son homologue, ils sont donc isométriques.* □

VII.2.3.b Des triangles isométriques pour démontrer

Exercice VII.2.4. ***On reprend les données de l'exercice précédent. Démontrer que :*** $\mathrm{BB}' = \mathrm{CC}'$***.***

Solution *On a démontrer que les triangles ABB' et ACC' sont isométriques ; donc les cotés homologues [BB'] et [CC'] sont de même longueur.* □

VII.3 Triangles semblables

VII.3.1 Exemple fondamental

Sur la figure VII.8, les triangles ABC et AB'C' sont en situation de THALÈS.
On a : $\widehat{AB'C'} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{AC'B'} = \widehat{ACB}$, comme angles correspondants. Dans les triangles ABC et AB'C' les angles homologues sont égaux. On dit que triangles ABC et AB'C' sont semblables (on dit aussi qu'ils ont la même forme). D'après le théorème de Thalès, il existe un nombre réel positif k tel que :

$$\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k.$$

Les côtés homologues des triangles ABC et A'B'C' sont proportionnels.

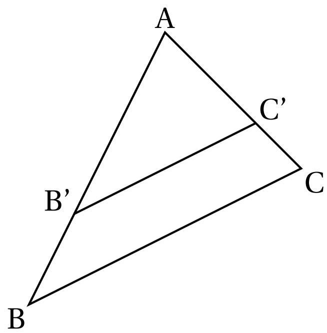


FIG. VII.8 – Exemple fondamental

VII.3.2 Définition et propriétés

DÉFINITION VII.3.1

Deux triangles semblables sont deux triangles tel que tout angle de l'un est égal à son homologue dans l'autre.

Remarques

1. Dire que les triangles ABC et A'B'C' sont semblables

signifie que : $\begin{cases} \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \\ \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'} \\ \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'} \end{cases}$

2. Des triangles isométriques sont des triangles semblables puisque leurs angles sont égaux deux à deux. Mais des triangles semblables ne sont pas nécessairement isométriques.

3. Si les triangles ABC et A'B'C' d'une part et A'B'C' et A"B"C" d'autre part sont semblables ; alors les triangles ABC et A"B"C" sont semblables.

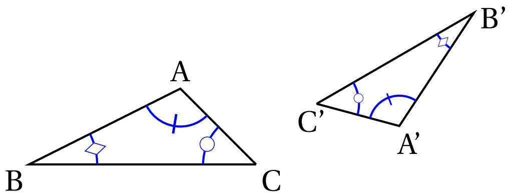


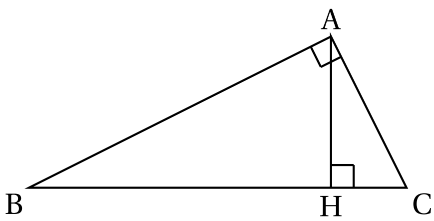
FIG. VII.9 – Triangles semblables

THÉORÈME VII.3.1

Pour que deux triangles soient semblables il suffit qu'il y ait deux angles égaux à leur homologue.

Démonstration On sait que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° donc si deux triangles ont deux angles égaux à leur homologue, alors le troisième angle est lui aussi égal à son homologue □

Exemple



$$\begin{array}{|c|}\hline H \\ B \\ A \\ \hline\end{array} \begin{array}{c} \longmapsto \\ \longmapsto \\ \longmapsto \end{array} \begin{array}{|c|}\hline A \\ B \\ C \\ \hline\end{array} \begin{array}{c} \longmapsto \\ \longmapsto \\ \longmapsto \end{array} \begin{array}{|c|}\hline H \\ A \\ C \\ \hline\end{array}$$

FIG. VII.10 – Configuration clef

Sur la figure VII.10, dans le triangle ABC, rectangle en A,
H est le pied de la hauteur issue de A.
On a : $\widehat{\text{ABH}} = \widehat{\text{CBA}}$ et $\widehat{\text{BHA}} = \widehat{\text{BAC}}$.

Dans le triangle HBA les angles $\widehat{\text{ABH}}$ et $\widehat{\text{BHA}}$ sont égaux à leur homologue dans le triangle ABC ; les triangles HBA et ABC sont donc semblables.
On a : $\widehat{\text{BCA}} = \widehat{\text{ACH}}$ et $\widehat{\text{BAC}} = \widehat{\text{AHC}}$.

Dans le triangle ABC les angles $\widehat{\text{BCA}}$ et $\widehat{\text{BAC}}$ sont égaux à leur homologue dans le triangle HAC ; les triangles ABC et HAC sont donc semblables.
Les triangles HBA et HAC sont tous deux semblables aux triangles ABC, ils sont donc semblables.

Remarques
1. Les triangles HBA et ABC sont semblables et orientés en des sens contraires, on dit qu'ils sont *indirectement semblables*.
2. Les triangles HBA et HAC sont semblables et orientés dans le même sens, on dit qu'ils sont *directement semblables*.

Exercice VII.3.1. ***Construire les points D et E tels que les triangles ABC et DAC soient directement semblables ; les triangles ABC et EAC soient indirectement semblables.***

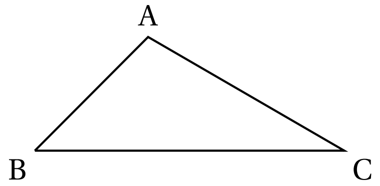


FIG. VII.11 – Construction de triangles semblables

VII.3.3 Proportionnalité

THÉORÈME VII.3.2
Deux triangles ABC et A'B'C' sont semblables si et seulement il existe un nombre réel strictement positif k tel que :

$$\frac{\text{A}'\text{B}'}{\text{AB}} = \frac{\text{A}'\text{C}'}{\text{AC}} = \frac{\text{B}'\text{C}'}{\text{BC}} = k.$$

Démonstration

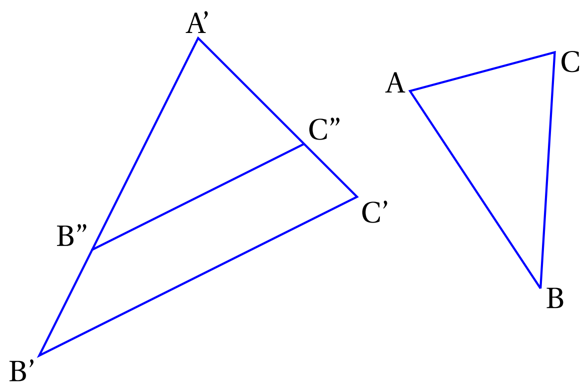


FIG. VII.12 – Triangles semblables et proportionnalité

Soit ABC et A'B'C' deux triangles (voir figure VII.12).
On construit sur la demi-droite [A'B') le point B" tel que : $\text{A}'\text{B}'' = \text{AB}$; et sur la demi-droite [A'C') le point C" tel que : $\text{A}'\text{C}'' = \text{AC}$.

Théorème direct

Si ABC et A'B'C' sont semblables, alors : $\widehat{B''A'C''} = \widehat{BAC}$; $A'B'' = AB$ et $A'C'' = AC$; donc les triangles ABC et A'B"C" sont également semblables. On en déduit que les triangles A'B"C" et A'B'C' sont semblables. Ils sont de plus orientés dans le même sens (car $B'' \in [A'B')$ et $C'' \in [A'C')$), ils sont donc directement semblables. Par conséquent les droites (B'C') et (B"C") sont parallèles. Les triangles A'B'C' et A'B"C" sont en situation de THALÈS donc d'après le théorème de THALÈS, il existe un nombre réel positif k tel que : $\dfrac{A'B'}{A'B''} = \dfrac{A'C'}{A'C''} = \dfrac{B'C'}{B''C''} = k$. C'est-à-dire : $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC} = k$.

Théorème réciproque

S'il existe un nombre réel positif k tel que : $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC} = k$; alors on a : $\dfrac{A'B'}{A'B''} = \dfrac{A'C'}{A'C''} = k$; donc, d'après la réciproque du théorème de THALÈS, les triangles A'B'C' et A'B"C" sont en situation de THALÈS (donc semblables) et on déduit que : $\dfrac{A'B'}{A'B''} = \dfrac{A'C'}{A'C''} = \dfrac{B'C'}{B''C''} = k$.
En faisant le quotient membre à membre avec : $\dfrac{A'B'}{AB} = \dfrac{A'C'}{AC} = \dfrac{B'C'}{BC} = k$; on obtient :
$\dfrac{A'B'}{A'B''} \times \dfrac{AB}{AB'} = \dfrac{A'C'}{A'C''} \times \dfrac{AC}{AC'} = \dfrac{B'C'}{B''C''} \times \dfrac{BC}{B'C'} = k \times \dfrac{1}{k}$; C'est-à-dire : $\dfrac{AB}{A'B''} = \dfrac{AC}{A'C''} = \dfrac{BC}{B''C''} = 1$.
Donc les triangles ABC et A'B"C" sont isométriques et par suite semblables. Les triangles ABC et A'B'C' sont semblables à A'B"C", ils sont donc semblables. □

Notations et vocabulaire Le nombre k est appelé rapport de similitude qui transforme ABC en A'B'C'.

THÉORÈME VII.3.3
Si ABC et A'B'C' sont deux triangles semblables et si k est le rapport de similitude qui transforme ABC en A'B'C', alors : $\text{aire}\left(A'B'C'\right) = k^2\,\text{aire}\,(ABC)$.

Démonstration

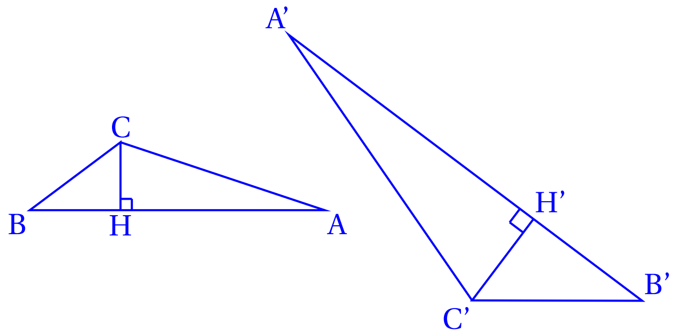


FIG. VII.13 – Si les longueurs sont multipliées par k, alors les aires le sont par k^2.

Soit ABC et A'B'C' deux triangles semblables (voir figure VII.13), k est le rapport de similitude qui transforme ABC en A'B'C', H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC et H' le pied de la hauteur issue de A' dans le triangle A'B'C'.
On sait que $A'B' = k AB$; $A'C' = k AC$ et $\widehat{CAH} = \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'} = \widehat{C'A'H'}$;
donc, dans les triangles rectangles ACH et A'C'H', on a :

$$C'H' = A'C' \sin \widehat{C'A'H'} = k\, AC \sin \widehat{CAH} = k\, CH.$$

On en déduit que :

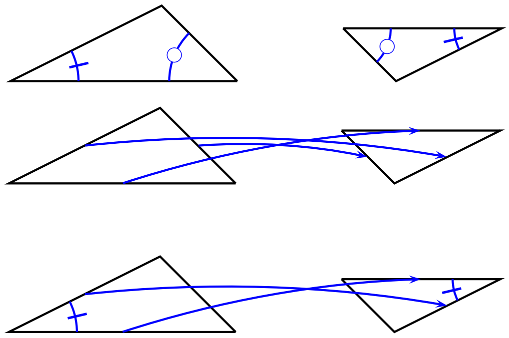
$$\text{aire}\left(A'B'C'\right) = \frac{A'B' \times C'H'}{2} = \frac{k\, AB \times k\, CH}{2} = k^2\ \text{aire}\,(ABC)$$

□

VII.3.4 Cas de similitude de deux triangles

THÉORÈME VII.3.4 (ADMIS)
Pour démontrer que deux triangles sont semblables, il suffit d'établir l'une des propositions suivantes.
(1) Deux angles sont égaux à leur homologue.

(2) Les longueurs des côté de l'un sont proportionnelles à leurs homologues
(3) L'un des angles est égal à son homologue et les longueurs des côté adjacents à cet angle sont proportionnelles aux longueurs des côtés homologues.



VII.3.5 Exercice résolu

Exercice VII.3.2. ***ABCD est un parallélogramme, N un point du segment [DC] distinct de D et C. La droite (AN) coupe (BC) en M.***

1. Démontrer que les triangles ADN et MBA sont des triangles semblables.

2. En déduire que **DN × MB = BA × AD.**

Solution

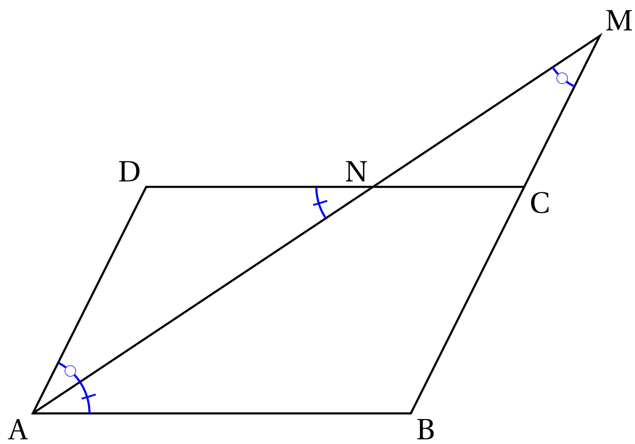


FIG. VII.14 – Exercice VII.3.2.

1. *Dans les triangles ADN et MBA, les angles homologues* $\widehat{\text{AND}}$ *et* $\widehat{\text{MAB}}$ *sont égaux car alternes internes ; les angles homologues* $\widehat{\text{DAN}}$ *et* $\widehat{\text{BMA}}$ *sont égaux car alternes internes. Donc les triangles ADN et MBA sont semblables.*

Autre méthode *On a (AD)//(MC), donc les triangles ADN et MCN sont en situation de* THALÈS *et donc semblables. On a (NC)//(AB), donc les triangles MCN et MBA sont en situation de* THALÈS *et donc semblables. Donc les triangles ADN et MBA sont semblables.*

2. *On a donc :* $\frac{\text{AD}}{\text{MB}} = \frac{\text{DN}}{\text{BA}}$ *; d'où l'on tire :* DN × MB = BA × AD. □