ANNALES DU BACCALAURÉAT

MATHÉMATIQUES

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Série L

avril 2005 à novembre 2010

Table des matières

L'épreuve se déroule en 3 heures trois (parfois quatre) exercices sont à traiter. Les candidats sont avertis par la mention suivante.

Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Sauf mention contraire, l'usage d'une calculatrice est autorisé.

1 Pondichéry avril 2005

EXERCICE 1 **5 points**

Sophie et Marc s'envoient régulièrement des messages qu'ils codent afin de ne pas en révéler la teneur à n'importe qui. Sophie utilise le procédé suivant :

• Tout d'abord, à chaque lettre de l'alphabet, elle associe son rang dans l'alphabet (ainsi 1 est associé à A, 2 à B, etc.). À chaque lettre, elle associe donc un nombre entier x.

• Elle associe ensuite à x un nouveau nombre entier y, en posant :

$$y \equiv 3x + 5 \quad \text{(modulo 26) avec } 0 \leqslant y \leqslant 25.$$

• Elle envoie enfin le message crypté sous forme d'une suite de lettres en associant de nouveau au nombre y la lettre qui lui correspond dans l'alphabet (à zéro elle associera la lettre Z, à 1 la lettre A, à 2 la lettre B, etc. et à 25 la lettre Y).

1. Vérifier qu'avec la méthode de Sophie :

   a. le nombre y associé à la lettre E est 20,

   b. la lettre P est codée par la lettre A.

2. Compléter le tableau de la feuille annexe n$^{\text{o}}$1 à rendre avec la copie (aucune justification n'est demandée).

3. Décrypter ensuite à l'aide de cette méthode le message :

S F S T O T J R H M C T R H M F D P T J.

EXERCICE 2 **7 points**

Partie I

Sur la feuille annexe n$^{\text{o}}$2 à rendre avec la copie, la figure 1 représente un triangle ABD rectangle isocèle en A. Construire sur cette figure le point C tel que ABCD soit un carré, le point E symétrique de C par rapport à D et le point J milieu du segment [AD].

Partie II Sur la figure 2 de la feuille annexe n$^{\text{o}}$2, sont représentés le tracé en perspective à points de fuite du triangle ABD rectangle isocèle en A et la ligne d'horizon Δ du plan de ce triangle.

Toutes les constructions demandées devront être effectuées sur cette feuille et justifiées sur la copie.

1. Placer le point de fuite F_1, de la direction de la droite (AB), le point de fuite F_2 de la direction de (BD) et F_3, celui de la direction de (AD).

2. Construire le point C tel que ABCD soit un carré.

3. Construire le point E, symétrique du point C par rapport au point D.

4. Construire le point J, milieu du segment [AD].

EXERCICE 3 **8 points**

Le but de cet exercice est l'étude du comportement d'une balle de golf en fonction de sa vitesse, de la résistance de l'air, de la texture de la balle. Les mesures ont été faites avec un champion, d'où la nature exceptionnelle des réponses.

Partie A

On appelle t le temps (en secondes) écoulé depuis la frappe de la balle par le joueur, et $h(t)$ la hauteur (en mètres) de la balle par rapport au sol à l'instant t, avant qu'elle ne retombe. Dans un premier temps, on considère que la fonction h est définie pour t réel positif ou nul, de la manière suivante

$$h(t) = -0,008t^2 + t.$$

1. À quel instant t la balle retombera-t-elle sur le sol ?

2. Sur quel intervalle est-il utile d'étudier la fonction h ? Justifier la réponse.

3. Calculer la fonction dérivée de la fonction h.

4. En déduire le tableau de variations de h sur l'intervalle $[0\,;\,125]$.

5. À quel instant la balle atteint-elle sa hauteur maximale ? Quelle est cette hauteur ?

Partie B

Si on tient compte de la résistance de l'air et de la nature de la balle, la hauteur de la balle en fonction du temps est exprimée plus précisément par la fonction g définie pour t réel positif ou nul, par :

$$g(t) = -0,008t^2 + t - \ln(t+1).$$

1. Calculer $g(0)$. Donner la signification du résultat.

2. En utilisant le fait que la dérivée de la fonction $t \longmapsto \ln(t+1)$ est la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{t+1}$, montrer que la dérivée de g est donnée par :

$$g'(t) = \frac{-0,016t^2 - 0,016t + t}{t+1}.$$

3. **a.** Étudier les variations de la fonction g.

b. À quel instant t la balle atteint-elle sa hauteur maximale ? Donner une valeur approchée de la hauteur atteinte, arrondie au mètre.

4. À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée, arrondie à la seconde, de l'instant où la balle retombe sur le sol.

FEUILLE ANNEXE N$^{\text{o}}$ 1 À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 1

lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
rang x dans l'alphabet	1	2	3	4	5								
nombre y associé					20								
lettre envoyée													

lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
rang x dans l'alphabet			16	4	5								
nombre y associé													
lettre envoyée			A										

FEUILLE ANNEXE N^o 2 À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 2

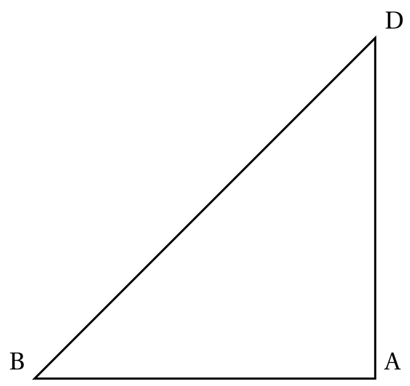


Figure 1

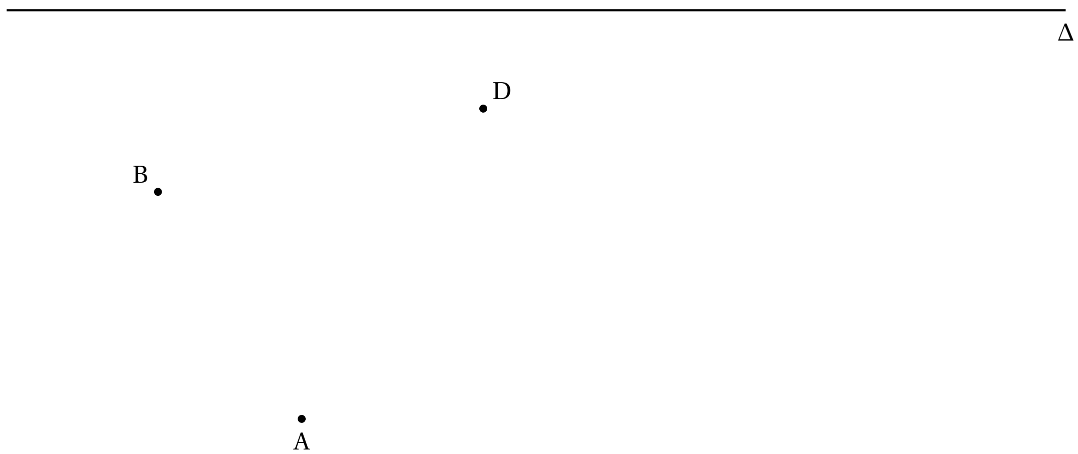


Figure 2

2 France juin 2005

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré

Exercice 1 obligatoire **3 points**

Arthur et Wilson sont deux jumeaux qui ont l'habitude de communiquer à l'aide de messages codés. Ils réalisent toujours leur cryptage de la façon suivante :
Chaque lettre de l'alphabet munie de son numéro d'ordre n est remplacée par la lettre de l'alphabet munie du numéro d'ordre p $(1 \leqslant p \leqslant 26)$ obtenu à l'aide de la formule

$$p \equiv 3 \times n + 7 \quad (\text{modulo } 26).$$

Par exemple la forme cryptée de L est Q car $3 \times 12 + 7 = 43$ et $43 \equiv 17 \quad (\text{modulo } 26)$.

1. Compléter la table de cryptage donnée sur la feuille annexe à rendre avec la copie (aucune justification n'est demandée).
2. Arthur a envoyé le message suivant à Wilson : MIJUZ CZRI OJ IVRLLHOV.
   Retrouver la forme décryptée du message.
3. Wilson désire lui répondre : MERCI.
   Donner la forme cryptée de ce message.

Exercice 2 obligatoire **5 points**

On rappelle que le nombre d'or noté Φ est tel que $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
On appelle rectangle d'or tout rectangle dont le rapport de la longueur sur la largeur est égal au nombre d'or.
Soit ABCD un carré. On considère :

- le milieu I du segment [DC],
- le cercle $\mathscr{C}$ de centre l et de rayon [lA],
- le point d'intersection E de la demi-droite [DC) et du cercle $\mathscr{C}$,
- le point F tel que AFED soit un rectangle.

1. Compléter la figure donnée sur la feuille annexe à rendre avec la copie.
2. Exprimer DI en fonction de AD.
3. Montrer que $\text{IA}^2 = \dfrac{5}{4}\text{AD}^2$, et en déduire l'expression de IE en fonction de AD.
4. Déduire des deux questions précédentes que $\text{DE} = \Phi \cdot \text{AD}$, et que le rectangle AFED est un rectangle d'or.

Exercice 3 obligatoire **6 points**

Soit la fonction t définie sur $\mathbb{R}$ par $t(x) = 4x^2 - 5x + 1$.

1. Montrer que, pour tout réel x, $t(x) = (4x-1)(x-1)$. En déduire le signe de $t(x)$.
2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = x(2x-5) + \ln x$.
   a. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et la limite de f en 0.
   b. Déterminer $f'(x)$ et vérifier que $f'(x) = \dfrac{t(x)}{x}$.
   c. En déduire le tableau des variations de f sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.
   d. Sur une feuille de papier millimétré, tracer la courbe $\mathscr{C}$ représentant la fonction f dans un repère orthonormé d'unité 2 cm.

Exercice 4 obligatoire **6 points**

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats arrondis à 10^{-4}.

Les résultats d'une enquête concernant les véhicules circulant en France montrent que :

- 88 % des véhicules contrôlés ont des freins en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins en bon état, 92 % ont un éclairage en bon état ;
- parmi les véhicules contrôlés ayant des freins défectueux, 80 % ont un éclairage en bon état.

On choisit au hasard un des véhicules concernés par l'enquête. Il y a équiprobabilité des choix.
On note F l'évènement « le véhicule contrôlé a des freins en bon état ».
On note E l'évènement « le véhicule contrôlé a un éclairage en bon état ».
$\overline{\text{E}}$ et $\overline{\text{F}}$ désignent les évènements contraires de E et de F.

1. Décrire cette situation à l'aide d'un arbre.

2. **a.** Déterminer la probabilité $P\left(\overline{\text{F}}\right)$ de l'évènement $\overline{\text{F}}$.

b. Quelle est la probabilité $P_{\overline{\text{F}}}\left(\overline{\text{E}}\right)$, probabilité que l'éclairage ne soit pas en bon état, sachant que les freins ne sont pas en bon état.

c. Montrer que la probabilité $P(\text{E} \cap \text{F})$ de l'évènement $\text{E} \cap \text{F}$ est égale à 0,809 6.

d. Quelle est la probabilité pour que le véhicule ait un éclairage en bon état ?

Tout conducteur d'un véhicule concerné par l'enquête ayant des freins ou un éclairage défectueux, doit faire réparer son véhicule. Calculer la probabilité pour qu'un conducteur ait des réparations à effectuer sur ses freins ou son éclairage.

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Exercice 1

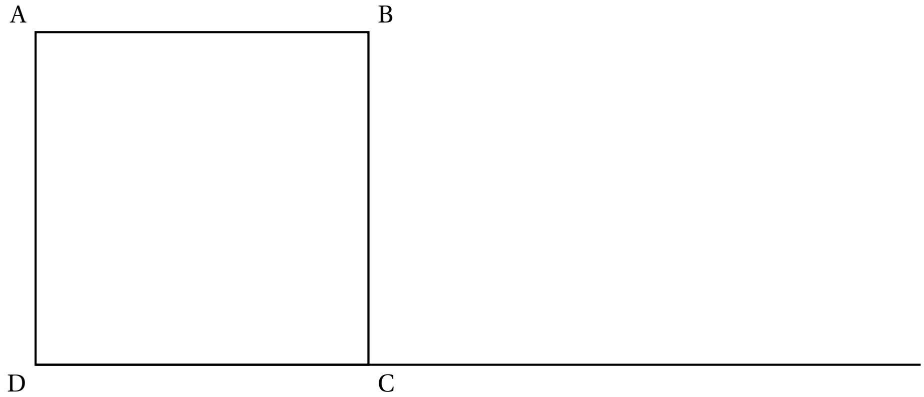
Table de cryptage à compléter :

lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
p	10											17	
forme cryptée	J											Q	

lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
p											1		
forme cryptée											A		

Exercice 2

Figure à compléter :



3 La Réunion juin 2005

Exercice 1 **5 points**

Dans cet exercice, aucune justification n'est demandée.
Pour chacune des questions, une seule des réponses proposées est exacte.
Une bonne réponse rapporte 1 *point. Une mauvaise réponse enlève* 0,5 *point.*
L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.
Si le total des points est négatif, la note globale attribuée à l'exercice est 0.

N°	Questions	A	B	C
1	f est une fonction dérivable en -1 telle que $f(-1) = 3$ et $f'(-1) = -2$. Une équation de la tangente à la courbe représentant f au point d'abscisse -1 est	$y = 2x+3$	$y = 3x+1$	$y = -2x+1$
2	$\ln 54 - 2\ln 3$ est égal à	$\ln 9$	$\ln 3$	$\ln 6$
3	Dire que deux évènements A et B sont indépendants signifie que	$P(A\cap B) = P(A) + P(B)$	$P(A\cap B) = 0$	$P(A\cap B) = P(A) \times P(B)$
4	À une tombola, 100 billets sont mis en vente parmi lesquels un billet sur deux est gagnant. Xavier achète 2 billets. La probabilité qu'il achète au moins 1 billet gagnant est	$\dfrac{1}{50}$	$\dfrac{149}{198}$	$\dfrac{4949}{4950}$
5	A et B sont deux évènements tels que $P(A) \neq 0$. Alors $P(A\cap B) =$	$P_A(B) \times P(A)$	$P_A(B) \times P(B)$	$P_B(A) \times P(A)$

Exercice 2 **7 points**

Pierre et Jean collectionnent des cartes postales.
À ce jour Pierre en possède 5 000 et Jean 3 000.
Pierre a remarqué que sa collection augmentait de 500 chaque année, et Jean pense qu'il peut voir sa collection augmenter de 15 % annuellement.

Dans toute la suite de l'exercice, on désigne par n un entier naturel non nul.

1. On note a_n le nombre de cartes postales que possédera Pierre dans n années,

a. Justifier que la suite (a_n) est une suite arithmétique de premier terme $a_0 = 5000$ et de raison 500.

b. Exprimer a_n en fonction de n.

c. Représenter graphiquement cette suite pour $0 \leqslant n \leqslant 10$. On prendra un repère orthogonal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ dans lequel 1 cm représente une année sur l'axe (Ox) et 1 cm représente 1 000 cartes postales sur l'axe (Oy).

2. On note b_n le nombre de cartes postales que possédera Jean dans n années.

a. Démontrer que la suite (b_n) est une suite géométrique de premier terme $b_0 = 3000$ et préciser sa raison.

b. Exprimer b_n en fonction de n.

c. Représenter graphiquement cette suite pour $0 \leqslant n \leqslant 10$ sur le graphique précédent.

3. À partir de quelle année, la collection de Jean est-elle plus importante que celle de Pierre ?

Exercice 3 **8 points**

Construction du nombre d'or

1. On appelle nombre d'or le réel noté $\Phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
Démontrer que ce nombre vérifie la relation (1) : $\Phi^2 = \Phi + 1$.

2. On appelle rectangle d'or, un rectangle dont le quotient de la longueur par la largeur est égal au nombre Φ.
On donne quatre points A, B, C et D tels que le rectangle ABCD soit un rectangle d'or. (voir figure ci-dessous).
On appelle respectivement E et F les point des segments [BC] et [AD] tels que le quadrilatère ABEF soit un carré.
On pose AB = ℓ.

a. Exprimer la longueur AD en fonction de jet de ℓ et de Φ.

b. Montrer que $\dfrac{\text{EF}}{\text{FD}} = \dfrac{1}{\Phi - 1}$.

c. En utilisant la relation (1), montrer que $\Phi(\Phi - 1) = 1$, puis que $\dfrac{1}{\Phi - 1} = \Phi$.

d. Que peut-on en déduire pour le rectangle grisé FDCE ?

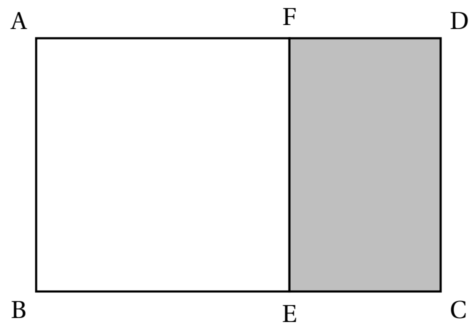
3. Soil K le milieu de [BE].

a. Exprimer KF en fonction de ℓ.

b. Montrer que $\text{KC} = \left(\Phi - \dfrac{1}{2}\right) \times \ell$.

c. En déduire que KF = KC.

d. En déduire une construction géométrique d'un segment dont la longueur est le nombre d'or Φ (faire une figure et expliquer les étapes de la construction).



4 Liban juin 2005

EXERCICE 1 **7 points**

Partie A

La production d'une entreprise peut être modélisée par une suite arithmétique (u_n) telle que, pour tout entier naturel non nul n, u_n désigne le nombre d'appareils produits l'année n.
La 1^{re} année, la production est de 7500 appareils ; on a donc $u_1 = 7500$.
La 6^{e} année, la production est de 12000 appareils ; on a donc $u_6 = 12000$.

1. Montrer que la raison de la suite (u_n) est 900.
2. Pour tout entier naturel non nul n, exprimer u_n en fonction de n.
3. Au bout de combien d'années la production aura-t-elle dépassé le triple de la production initiale ?

Partie B

Une autre entreprise produit la 1^{re} année 7500 appareils. On notera, pour tout entier naturel non nul n, v_n, le nombre d'appareils produits l'année n. On a donc $v_1 = 7500$. La production annuelle de cette entreprise augmente de 10 % chaque année.

1. Calculer v_2 et v_3.
2. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique. Donner sa raison.
3. Pour tout entier naturel non nul n, exprimer v_n en fonction de n.
4. Au bout de combien d'années la production aura-t-elle dépassé le triple de la production initiale ?
5. Combien d'appareils l'entreprise aura-t-elle produit en 13 ans ?

Rappel : pour $q \neq 1$, $\quad 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

EXERCICE 2 **7 points**

Pour engager du personnel, une entreprise organise des tests de sélection.
Parmi les candidats qui se présentent aux épreuves, il y a 60 % d'hommes.
Une étude statistique montre que l'entreprise engage 70 % des hommes candidats et 80 % des femmes candidates.
RAPPEL : La probabilité conditionnelle de A sachant B est $P_{\text{B}}(\text{A}) = \dfrac{P(\text{A} \cap \text{B})}{P(\text{B})}$.

Partie A

À l'issue des tests, on interroge une personne au hasard parmi tous tes candidats.
On note

- H l'évènement « la personne est un homme » ;
- F l'évènement « la personne est une femme » ;
- E l'évènement « la personne est engagée » ;
- $\overline{\text{E}}$ l'évènement complémentaire (ou contraire) de E.

1. a. Quelle est la probabilité $p(\text{F})$ que la personne interrogée soit une femme ?
   b. Quelle est la probabilité que la personne interrogée ne soit pas engagée, sachant que c'est une femme ?
2. Construire un arbre de probabilité illustrant cette situation.
3. Calculer la probabilité $p\left(\overline{\text{E}} \cap \text{F}\right)$ que la personne interrogée soit une femme et qu'elle ne soit pas engagée.
4. Montrer que $p\left(\overline{\text{E}}\right) = 0,26$.

Partie B

Dans celle partie les résultats seront donnés sous forme de valeurs approchées arrondies au millième.
À l'issue des tests on interroge 4 personnes au hasard. On considérera que ces 4 choix sont deux à deux indépendants.

1. Quelle est la probabilité qu'aucune des 4 personnes ne soit engagée ?

2. Quelle est la probabilité qu'au moins une des 4 personnes ne soit pas engagée ?
3. Quelle est la probabilité que 2 personnes exactement soient engagées ?

EXERCICE 3 **6 points**

1. Quel est le reste de la division euclidienne de 5 par 8 ?
   Quel est le reste de la division euclidienne de 5^2 par 8 ?
2. Quel est. le reste de la division euclidienne de 5^{86} par 8 ?
   Quel est le reste de la division euclidienne de 5^{87} par 8 ?
3. Quel est le reste de la division euclidienne de 965^{87} par 8 ?
4. Soit n un entier naturel.
   Montrer que $5^{2n+1}+5^{2n}+2$ est un multiple de 8.

5 Polynésie juin 2005

EXERCICE 1 **3 points**

Pour chacune des questions suivantes, parmi les réponses proposées, ii y a toujours une réponse exacte et une seule.
Le candidat répond sur sa copie en rappelant le numéro de la question et la lettre qui correspond selon lui, à la bonne réponse. Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte 0,5 point et chaque mauvaise réponse enlève 0,25 point ; la note totale de l'exercice ne pouvant être inférieure à 0.

On rappelle que le nombre d'or, noté φ, est défini par $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

1. Le nombre d'or φ vérifie une des 4 propositions suivantes, laquelle ?

$$\text{A : } \varphi^3 = \varphi^2 + 1 \quad \text{B : } \varphi = \varphi^2 + 1 \quad \text{C : } \varphi^2 = \varphi + 1 \quad \text{D : } \sqrt{\varphi} = \varphi - 1.$$

2. Dans un dessin en perspective **cavalière**.

A : Les droites perpendiculaires sont toujours représentées par des droites perpendiculaires.	B : Les droites parallèles sont toujours représentées par des droites parallèles.	C : Les lignes de fuite se coupent.	D : Les longueurs des segments sont toujours conservées

3. Dans un dessin en perspective à **points de fuite** :

A : Sur les plans frontaux, les parallèles sont concourantes.	B : Les points de fuite sont sur la ligne d'horizon.	C : Sur les lignes de fuite les proportions sont respectées.	D : Un angle droit est toujours représenté par un angle droit.

4. Dans un triangle équilatéral MNP de centre O :
   A : $\widehat{\text{MON}} = 115^{\circ}$
   B : les médianes sont les bissectrices intérieures
   C : $\widehat{\text{MNP}} = 72^{\circ}$
5. L'angle de deux côtés consécutifs d'un pentagone régulier vaut
   A : 100° B : 108° C :116° D : 122°
6. Si ABCDE est un pentagone régulier :
   A : AB/DE $= \varphi$ B : AB/AC $= \varphi$ C : AD/BC $= \varphi$ D : AC/AD $= \varphi$

EXERCICE 2 **5 points**

Gaston hésite entre deux contrats d'embauche pour lesquels le salaire du premier mois est de 1600 euros.
Contrat n°1 : chaque mois à partir du deuxième mois le salaire mensuel augmente de 10 euros.
Contrat n°2 : chaque mois à partir du deuxième mois le salaire augmente de 0,6 % par rapport au mois précédent.

1. Pour chacun des deux contrats, déterminer la nature de la suite des salaires mensuels, préciser le premier terme et la raison.
2. Pour chacun des deux contrats, calculer le total des salaires perçus pendant la première année.
3. À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quel mois le salaire mensuel correspondant au contrat n°2 devient supérieur à celui du contrat n°1 Justifier correctement la réponse.

On rappelle que :
• La somme S des n premiers termes d'une suite géométrique (u_n) de raison q $(q \neq 1)$ est :

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1 \frac{1-q^n}{1-q}.$$

• La somme S' des n premiers termes d'une suite arithmétique (v_n) de raison r :

$$S' = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = nv_1 + r\frac{n(n-1)}{2}.$$

EXERCICE 3 **6 points**

Voici les premiers vers d'un poème de Jacques Prévert : « Le cancre ».

Il dit non avec la tête
Mais il dit oui avec le cœur
Il dit oui à ce qu'il aime
Il dit non au professeur

Chacun des 26 mots de ces vers est inscrit sur une carte. On obtient ainsi la répartition suivante :

mots	il	dit	non	avec	la	tête	mais	oui
effectif	5	4	2	2	1	1	1	2
mots	le	cœur	à	ce	qu	aime	au	professeur
effectif	1	1	1	1	1	1	1	1

On a ainsi un jeu de 26 cartes.
Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On tire successivement trois cartes au hasard parmi les 26.

a. Les tirages s'effectuent sans remise, calculer la probabilité d'obtenir, dans l'ordre « il dit non ».

b. Les tirages s'effectuent avec remise, calculer la probabilité d'obtenir exactement une fois le mot « non ».

2. On tire au hasard et simultanément trois cartes au hasard parmi les 26.

a. Calculer la probabilité d'obtenir trois verbes.

b. Calculer la probabilité d'obtenir ensemble les trois mots « il », « dit » et « non ».

c. Calculer la probabilité d'obtenir au moins une fois le mot « non ».

EXERCICE 4 **6 points**

Les parties A et B sont indépendantes

PARTIE A

Pour effectuer un examen médical, on injecte par piqûre intramusculaire une dose de 3 cm^3 d'une substance médicamenteuse dans le sang d'un malade à l'instant $t = 0$ (t est exprimé en heures). Celle-ci passe alors progressivement dans le sang. La diffusion atteint son maximum au bout d'une heure.
La courbe de l'annexe représente la quantité de substance présente dans le sang à l'instant t.

1. Construire sur la feuille annexe la tangente à la courbe au point d'abscisse 2, sachant que son coefficient directeur est égal à $(-0,9)$.

2. À partir du graphique commenter l'évolution de la quantité de substance médicamenteuse contenue dans le sang.

3. Pour pouvoir effectuer l'examen, il faut que la quantité de substance médicamenteuse présente dans le sang soit supérieure ou égale à 0,5 cm^3. Déterminer graphiquement de combien de temps on dispose pour faire cet examen.

PARTIE B

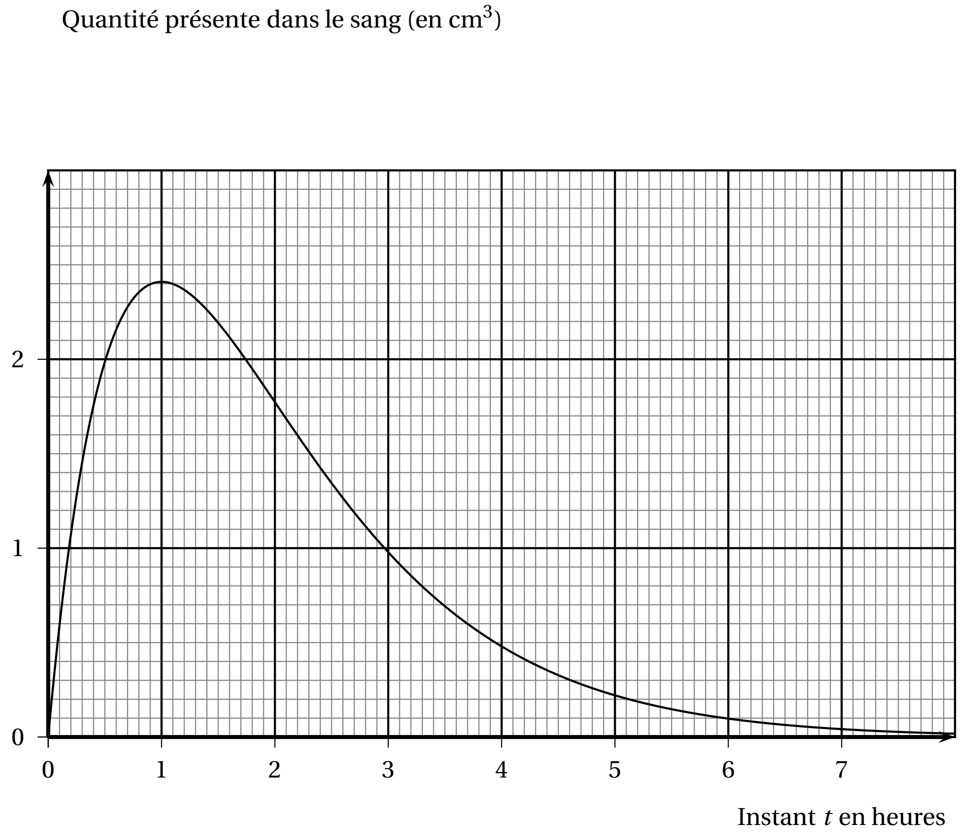
On a injecté par piqûre intraveineuse 1 cm^3 de médicament à un malade à l'instant $t = 0$. La substance se répartit immédiatement dans le sang et elle est ensuite progressivement éliminée. Expérimentalement, on montre que la quantité $q(t)$ de substance présente dans le sang à l'instant t est donnée par la relation $q(t) = \mathrm{e}^{-0,15t}$ où t est exprimée en heures.

1. Quel volume de ce produit reste-t-il au bout de 90 minutes ?

2. Quel volume de ce produit le malade a-t-il éliminé au bout d'une demi-heure ? d'une heure ?

3. On donne $q'(t) = -0,15e^{-0,15t}$ où q' désigne la fonction dérivée de la fonction q.
Étudier les variations de la fonction q sur l'intervalle $[0 ; 9]$ puis tracer sa représentation graphique dans un repère orthogonal en prenant pour unités 2 cm en abscisses et 10 cm en ordonnées.

FEUILLE ANNEXE à rendre avec la copie



6 Centres étrangers juin 2005

EXERCICE 1 **4 points**

Pour chaque question de cet exercice, il s'agit d'indiquer sur votre copie la lettre correspondant á l'unique bonne réponse : aucune justification n'est á rédiger.
Chaque bonne réponse rapporte 0,3 *point. Chaque mauvaise réponse enlève* 0,25 *point. En cas de total négatif, la note de l'exercice est ramenée á zéro.*

1. 49359 est congru á :	**a.**	1 modulo 11
	b.	2 modulo 11
	c.	3 modulo 11
2. Si x est congru á 4 modulo 5 et si y est congru á 6 modulo 5 alors $x+y$ est congru á	**a.**	0 modulo 5
	b.	4 modulo 5
	c.	10 modulo 10
3. $6^{19}+4$	**a.**	est divisible par3
	b.	n'est pas un multiple de 5
	c.	est divisible par 5
4. 10^{11} est congru á :	**a.**	1 modulo 9
	b.	9 modulo 10
	c.	11 modulo 9
5. Si $U_1 = 2$ et si pour tout n $U_{n+1} = U_n + 3$, alors :	**a.**	$U_{16} = 50$
	b.	$U_{16} = 86093442$
	c.	$U_{16} = 47$
6. La limite de la suite définie par $U_n = 0,9^n + 2$ est égale à :	**a.**	0
	b.	2
	c.	$+\infty$
7. La suite définie par $U_0 = 5$ et $U_{n+1} = 3U_n + 2$ est :	**a.**	arithmétique
	b.	géométrique
	c.	ni géométrique nii arithmétique
8. La population d'un pays augmente de 3 % par an, cette progression est :	**a.**	géométrique de raison $0,03$
	b.	arithmétique de raison 3
	c.	géométrique de raison supérieure á 1.

EXERCICE 2 **6 points**

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = 2x + 5 - \mathrm{e}^x.$$

On note f' la fonction dérivée de f.
On appelle Γ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation d'inconnue x :

$$2 - \mathrm{e}^x > 0.$$

2. **a.** Calculer la valeur exacte de $f(\ln 2)$.

b. Determiner les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

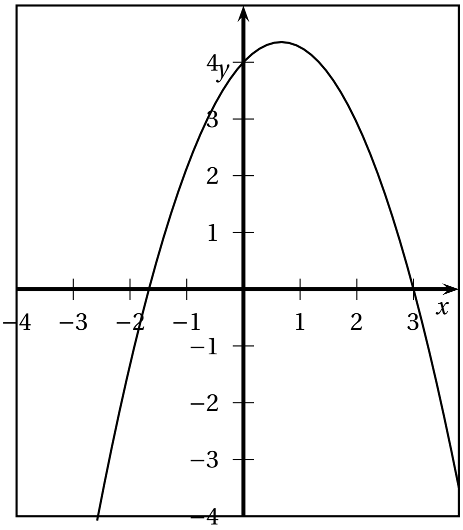
c. Calculer $f'(x)$.

d. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.

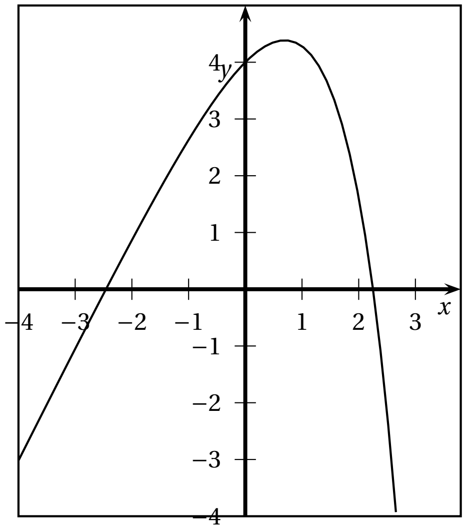
e. Montrer que la courbe Γ admet pour asymptote en $-\infty$ la droite Δ d'équation $y = 2x + 5$.

3. Déterminer une équation de la tangente á la courbe Γ au point d'abscisse 0.

4. Parmi les deux courbes tracées ci-dessous, une seule représente la fonction f. Indiquer laquelle en justifiant votre choix.



Courbe n° 1



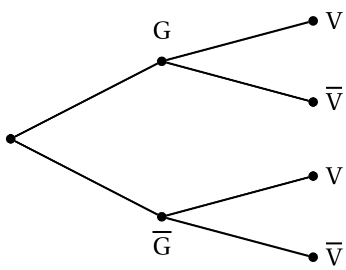
Courbe n° 2

EXERCICE 3 **6 points**

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis á 10^{-3} *près.*

58 % des élèves d'une école sont des garçons.
Parmi les garçons, 25 % viennent á l'école á vélo.
Cette proportion tombe á 15 % chez les filles.

1. On choisit au hasard un élève de l'école, on considère les évènements :
   G : « l'élève choisi est un garçon » ;
   V : « l'élève choisi vient á vélo ».
   L'évènement contraire de l'évènement A est noté $\overline{A}$.
   a. Reproduire et compléter l'arbre probabiliste :

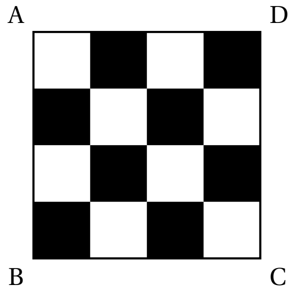


   b. Montrer que P(V) = 0,208.
   c. Calculer la probabilité conditionnelle $P_V(G)$.
2. On choit trois élèves au hasard dans l'école. On suppose que le nombre d'élèves est suffisamment grand pour que ce choix soit assimilable á trois tirages indépendants avec remise.
   a. Calculer la probabilité que les trois élèves soient des garçons.
   b. Calculer la probabilité qu'il y ait au moins une fille parmi les trois élèves.
   c. Calculer la probabilité qu'au moins deux élèves soient venus á vélo.

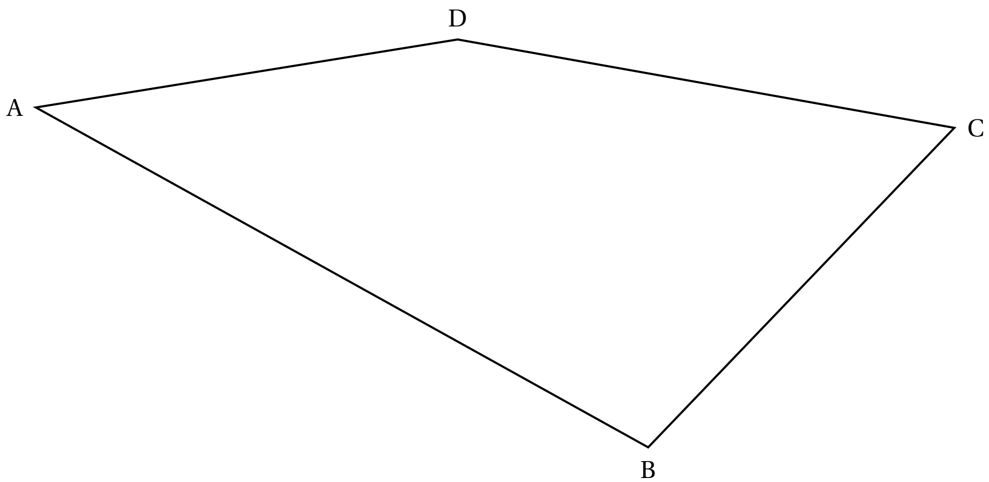
EXERCICE 4 **4 points**

Une plaque carrée AI3CD a été dessinée en perspective á deux points de fuites sur l'annexe jointe.

1. Faire apparaitre sur le dessin de l'annexe la ligne d'horizon de cette perspective.
2. Dessiner sur cette plaque un damier de huit cases carrées comme indiqué sur la figure suivante (on pourra s'aider du point d'intersection des diagonales du carré ABCD et des deux points de fuite).


A
D
B
C

ANNEXE DE L'EXERCICE 4 (à rendre avec la copie)



7 France septembre 2005

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré

EXERCICE 1 **6 points**

Hector a participé de très nombreuses fois à une compétition qui se déroule en deux manches. Il a enregistré sur cassette vidéo chacune des compétitions auxquelles il a participé, et il a constaté les faits suivants :

- il a gagné la première manche dans 95 % des cas ;
- quand il a perdu la première manche, il a aussi perdu la deuxième 3 fois sur 10 ;
- quand il a gagné la première manche, il a aussi gagné la deuxième dans 90 % des cas.

On choisit au hasard une des cassettes vidéo enregistrées par Hector et on la visionne. Il y a équiprobabilité des choix. On note :

- M_1 l'évènement « sur cette cassette, on voit Hector gagner la première manche » ;
- M_2 l'évènement « sur cette cassette, on voit Hector gagner la deuxième manche ».

On notera $\overline{M_1}$ l'évènement contraire de M_1 et $\overline{M_2}$ l'évènement contraire de M_2.

1. À l'aide de l'énoncé donner :
   a. $P(M_1)$ la probabilité de l'évènement M_1,
   b. $P_{M_1}(M_2)$ la probabilité de l'évènement M_2 sachant que M_1 est réalisé.
2. Traduire la situation à l'aide d'un arbre de probabilité et compléter cet arbre.
3. a. Montrer que la probabilité de voir Hector gagner les deux manches est de 0,855.
   b. Quelle est la probabilité de l'évènement M_2 sachant que M_1 n'est pas réalisé ?
4. a. Calculer la probabilité de l'évènement M_2.
   b. Achille, arrivé en retard, voit Hector gagner la deuxième manche. Calculer à 10^{-2} près la probabilité que sur cette cassette, Hector ait aussi gagné la première manche.

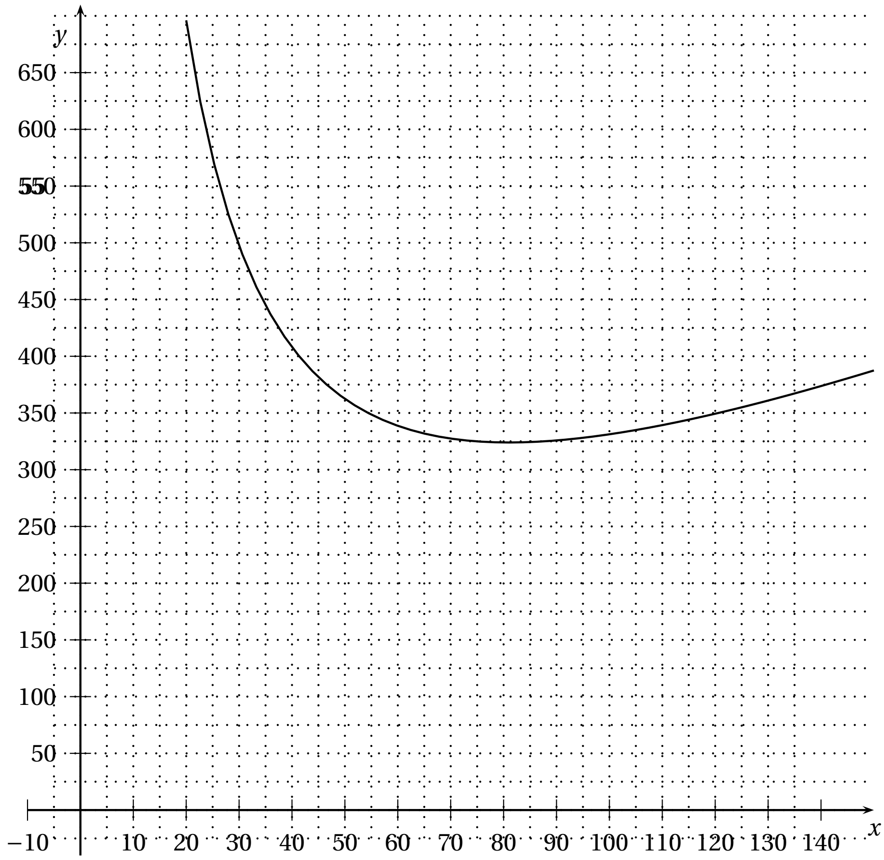
EXERCICE 2 **7 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle I = [20 ; 150] par

$$f(x) = 2x + \frac{13\,122}{x}.$$

1. Montrer que sur l'intervalle I , $f'(x) = \dfrac{2}{x^2}(x-81)(x+81)$. En déduire que sur l'intervalle I, $f'(x)$ est du signe de $(x-81)$.
2. Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle I.
3. La représentation graphique de la fonction f est donnée ci-dessous :



Déterminer avec la précision permise par le graphique, une valeur approchée des solutions de l'équation : $f(x) = 350$ (**le graphique n 'est pas à rendre avec la copie.**)

Partie B

Un responsable de club doit organiser un déplacement. Le trajet total est de 600 km et le club dispose d'un bus dont la consommation en carburant, exprimée en litres par heure, est donnée par $\left(5 + \dfrac{v^2}{300}\right)$ où v représente la vitesse moyenne du véhicule en kilomètres par heure. Le prix du litre de carburant est de 1 € et le chauffeur est payé 16,87 € par heure.

1. On désigne par t la durée totale du trajet, exprimée en heures.

a. Exprimer t en fonction de v.

b. Démontrer que le coût du carburant, exprimé en euros, pour le trajet total est égal à

$$\frac{3\,000}{v} + 2v.$$

c. Montrer que le coût du transport, exprimé en euros, est égal à $f(v)$.

2. En utilisant la partie A :

a. Donner la vitesse moyenne à laquelle doit rouler le bus pour que le coût du transport soit minimal. Quel est alors ce coût ?

b. Le responsable du club dispose d'au plus 350 € pour le transport. Pour des raisons de sécurité, la vitesse moyenne du bus ne peut dépasser 90 kilomètres par heure. Déterminer l'intervalle dans lequel doit se situer la vitesse moyenne du bus, pour que le coût du transport ne dépasse pas 350 €.

EXERCICE 3 **7 points**

Dans cet exercice, la description des programmes des constructions n'est pas demandée sur la copie. Cependant, on laissera apparents tous les traits de construction. La question 4 *est indépendante des questions* 1, 2 *et* 3.

1. Tracer à la règle sur la feuille de papier millimétré (sans donner d'explications) un carré ABCD dont les côtés ont pour longueur 16 cm. Placer son centre O et les milieux des côtés.

2. Dans cette question, on note c_0 la longueur en cm des côtés du carré ABCD.

a. Calculer la longueur de la diagonale [AC] du carré en fonction de c_0.

b. Tracer le cercle tangent aux quatre côtés du carré ABCD. Exprimer son diamètre en fonction de c_0.

c. Tracer le carré $\mathrm{A'B'C'D'}$ inscrit dans le cercle $\mathscr{C}$ et dont les côtés sont parallèles à ceux du carré ABCD.

d. En constatant que les diagonales du carré $\mathrm{A'B'C'D'}$ sont des diamètres du cercle $\mathscr{C}$, calculer la longueur c_1, des côtés du carré $\mathrm{A'B'C'D'}$ en fonction de c_0.

3. Tracer le cercle $\mathscr{C}'$ tangent aux quatre côtés du carré $\mathrm{A'B'C'D'}$ puis le carré $\mathrm{A''B''C''D''}$ inscrit dans le cercle $\mathscr{C}'$ dont les côtés sont parallèles â ceux du carré $\mathscr{C}'$. Exprimer la longueur c_2 des côtés de $\mathrm{A''B''C''D''}$ en fonction de c_1.

4. En renouvelant cette construction, on obtient une suite de carrés. On note $c_3,\ c_4,\ c_5$ et ainsi de suite la longueur des côtés des carrés successifs ainsi obtenus. Les calculs précédents ont montré que les premiers termes de la suite (c_n) sont ceux d'une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme $c_0 = 16$. On admettra que ce résultat est vrai pour tous les termes de la suite (c_n).

a. Déterminer l'expression de c_n en fonction de n.

b. Calculer les valeurs exactes de c_6 et c_{12}.

c. Pour quelles valeurs de l'entier n, la longueur c_n, des côtés du $(n+1)$-ième carré construit est-t-elle strictement plus petite que 1 cm ?

8 Nouvelle–Calédonie novembre 2005

EXERCICE 1 **8 points**

Rappels sur la fonction logarithme népérien, notée ln :
a et b étant des réels strictement positifs et n un entier naturel :
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$; $\ln(a^n) = n\ln a$.

Partie A :

Sur la **feuille annexe à rendre avec la copie** on a tracé dans un repère orthonormal la courbe $(\mathscr{C})$ représentant la fonction logarithme népérien et la parabole $(\mathscr{P})$ représentant la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + \frac{9}{2}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.

1. **a.** Calculer $f'(x)$ pour tout réel x.
   b. En déduire le tableau de variations de la fonction f. (On ne demande pas les limites de f à l'infini.)
   c. Quelles sont les coordonnées exactes du point S sommet de la parabole $(\mathscr{P})$?
2. On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - \ln x = 2x^2 - 3x + \frac{9}{2} - \ln x$$

   La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$ et on note g' sa fonction dérivée.
   a. Montrer que, pour tout réel strictement positif x : $g'(x) = \dfrac{(4x+1)(x-1)}{x}$.
   b. Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
   Justifier que le minimum de g est égal à $\dfrac{7}{2}$.
   c. En déduire que pour tout réel strictement positif x : $f(x) - \ln x > 0$.
   Quelle propriété des courbes $(\mathscr{P})$ et $(\mathscr{C})$, visible graphiquement, le résultat ci-dessus permet-il de justifier ?

Partie B :

Pour tout réel strictement positif x, on note M le point de la courbe $(\mathscr{P})$ d'abscisse x et N le point de la courbe $(\mathscr{C})$ de même abscisse x. On a ainsi : $MN = f(x) - \ln x = g(x)$.
(la longueur MN est exprimée dans l'unité graphique du schéma de **feuille annexe**.)

1. Placer les points M et N sur le schéma de la **feuille annexe** lorsque $x = 2$.
2. Montrer que lorsque $x = \dfrac{3}{4}$ on a : $MN = \dfrac{27}{8} + 2\ln 2 - \ln 3$.
   Donner la valeur de MN arrondie au centième.
3. **a.** À l'aide de la **partie A**, déterminer pour quelle valeur de x, la longueur MN est minimale. Que vaut alors cette longueur ?
   b. Tracer en rouge sur le schéma de la **feuille annexe** le segment $[MN]$ correspondant.
4. Quelle est la limite de la longueur MN quand x tend vers 0 (avec $x > 0$) ?

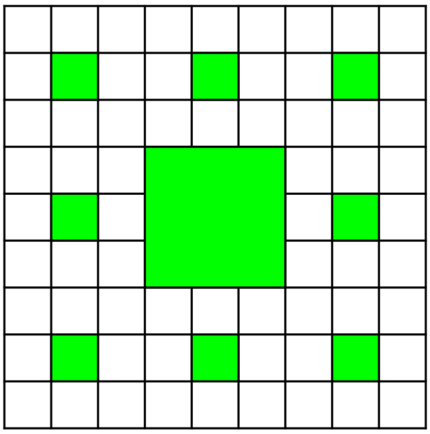
EXERCICE 2 **6 points**

Rappels :
Soit (U_n) une suite géométrique de raison q et de premier terme U_1.
On a alors pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $U_n = U_1 \times q^{n-1}$.
Soit (V_n) une suite arithmétique de raison r et de premier terme V_1.
On a alors pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $V_n = V_1 + (n-1)r$.

Un carré d'aire 1 m^2 est divisé en 9 carrés égaux comme indiqué sur la figure ci-contre.
On colorie le carré central. (1$^{\text{er}}$coloriage)

Les huit carrés restant sont à leur tour divisés en 9 carrés égaux comme indiqué sur la figure ci-contre.
On colorie les huit carrés centraux obtenus. (2$^{\text{e}}$coloriage)

On poursuit avec la même méthode la division et le coloriage du carré.



Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'aire en m^2 de la surface totale coloriée après n coloriages.
On a ainsi : $A_1 = \dfrac{1}{9}$.
La surface grisée sur le figure ci-dessus a donc pour aire A_2.
On remarquera que chaque étape du coloriage consiste à colorier un neuvième de la surface non coloriée jusque là.

1. **a.** Justifier que $A_2 = A_1 + \dfrac{1}{9}(1 - A_1)$ puis calculer la valeur numérique exacte de A_2.

   b. Expliquer pourquoi, pour tout entier n supérieur ou égal à 1,
   $A_{n+1} = \dfrac{8}{9}A_n + \dfrac{1}{9}$.

2. On pose pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $B_n = A_n - 1$.

   a. Calculer B_1.

   b. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal à 1, $B_{n+1} = \dfrac{8}{9}B_n$.

   c. Quelle est la nature de la suite (B_n) ?
   Exprimer alors, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, le terme général B_n de la suite (B_n) en fonction de n.

3. **a.** En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 1 : $A_n = 1 - \left(\dfrac{8}{9}\right)^n$.

   b. Calculer alors la limite de la suite (A_n). Que peut-on en déduire ?

EXERCICE 3 **6 points**

Une horloge électronique a été programmée pour émettre un bip toutes les sept heures. Le premier bip est émis le 31 décembre 2004 à minuit.

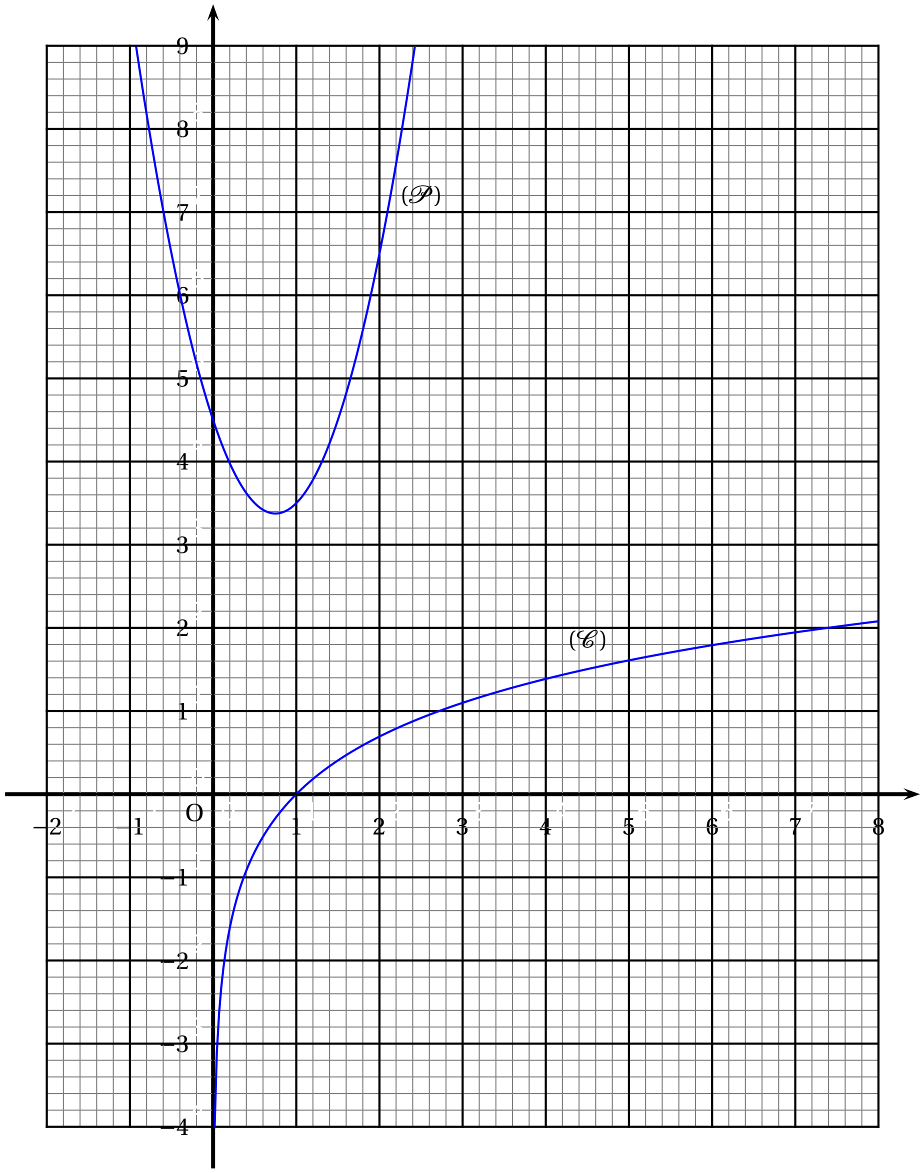
1. a. À quelle heure est émis le dernier bip du 1^er^janvier 2005 ?
   b. À quelle heure est émis le premier bip du 2 janvier 2005 ?
   c. À quelle heure est émis le dernier bip du 2 janvier 2005 ?
   d. À quelle heure est émis le premier bip du 3 janvier 2005 ?

   Expliquer les réponses.
2. a. Montrer que : $24 \equiv 3 (\text{modulo} 7)$.
   b. En déduire le reste de la division euclidienne de 2×24 par 7 et le reste de la division euclidienne de 3×24 par 7. Justifier les réponses. Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Reste de la division euclidienne de $n \times 24$ par 7				5	1	4	0	3	6	2

   c. Expliquer pourquoi l'horloge émet un bip à minuit tous les 7 jours et tout les 7 jours seulement.
3. On rappelle que l'année 2005 est une année non bissextile et comporte donc 365 jours.
   a. Déterminer le plus petit entier naturel a tel que : $365 \equiv a (\text{modulo} 7)$
   b. À quelle date l'horloge émettra-t-elle un bip à minuit pour la dernière fois en 2005 ?
   Expliquer la réponse.

ANNEXE à l'exercice 1 (à rendre avec la copie)



9 Centre étrangers juin 2006

EXERCICE 1 **6 points**

Soit f la fonction numérique définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = (\ln x)^2(3 - 2\ln x).$$

On note $(\mathscr{C})$ sa courbe représentée dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1. **a.** Calculer la limite de f en 0 et interpréter graphiquement le résultat.

   b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

2. f' désignant la dérivée de f sur $]0~;~+\infty[$ on admet que $f'(x) = \dfrac{6\ln x(1-\ln x)}{x}$.

   a. Résoudre les inéquations
   - $\ln x \geqslant 0$;
   - $1 - \ln x \geqslant 0$.

   b. En déduire le signe de $f'(x)$ et les variations de f.

   c. Calculer les extremums de f sur l'intervalle $[0,75~;~3]$.

3. Donner le tableau de variations de f.
4. Tracer la courbe $(\mathscr{C})$.

EXERCICE 2 **5 points**

Pour chacune des questions suivantes une et une seule réponse est exacte. (On indiquera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse exacte.) Chaque bonne réponse rapporte 1 *point ; une mauvaise réponse enlève* 0,5 *point ; une absence de réponse vaut* 0 *pour la question. Si le total de l'exercice ainsi calculé est négatif il est ramené à* 0.

1. On lance deux dés cubiques équilibrés et on lit la somme des résultats des faces supérieures. La probabilité d'obtenir « 7 » est :

   a : $\dfrac{1}{6}$ **b :** $\dfrac{1}{12}$ **c :** $\dfrac{7}{36}$ (1)

   (2)

2. On lance une pièce de monnaie trois fois de suite.
   La probabilité d'obtenir trois fois « pile » est :

   a : $\dfrac{1}{2}$ **b :** $\dfrac{1}{3}$ **c :** $\dfrac{1}{8}$ (3)

   (4)

3. Une urne contient quatre boules vertes et deux boules noires indiscernables au toucher. On prélève au hasard une boule de l'urne. La probabilité d'obtenir une boule verte est :

   a : $\dfrac{2}{3}$ **b :** $\dfrac{1}{2}$ **c :** $\dfrac{1}{6}$ (5)

   (6)

4. Une urne contient quatre boules vertes et deux boules noires indiscernables au toucher.
   On prélève successivement deux boules, sans remettre la première boule tirée dans l'urne.
   La probabilité d'obtenir deux boules vertes est :

   a : $\dfrac{4}{9}$ **b :** $\dfrac{2}{5}$ **c :** $\dfrac{1}{36}$ (7)

   (8)

5. Une urne contient quatre boules vertes et deux boules noires indiscernables au toucher.
   On prélève successivement et avec remise, deux boules de l'urne.
   La probabilité que la deuxième boule tirée soit noire sachant que la première est verte est

   a : $\dfrac{1}{3}$ **b :** $\dfrac{2}{9}$ **c :** $\dfrac{4}{15}$ (9)

   (10)

EXERCICE 3 **5 points**

1. **a.** Déterminer les restes de la division euclidienne par 7 des nombres 3^n pour $n \in \mathbb{N}, n \leqslant 6$.

   b. Recopier et compléter le tableau suivant :

Puissance de 3	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
Reste modulo 7							

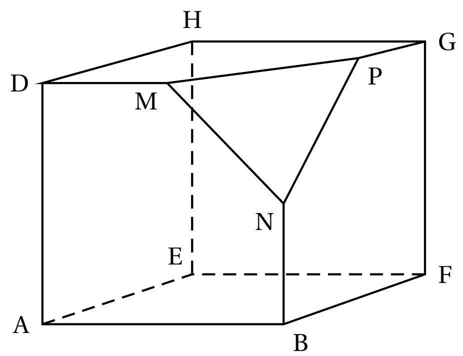
   c. En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, 3^{6k} est congru à 1 modulo 7.

2. **a.** Déterminer le plus petit entier naturel congru à 1515 modulo 7.

   b. Après avoir remarqué que $2004 = 6 \times 334$, déduire du 1 le reste de la division euclidienne de 1515^{2004} par 7.

   c. Montrer que dans la division euclidienne de 1515^{2006} par 7 le reste est 2.

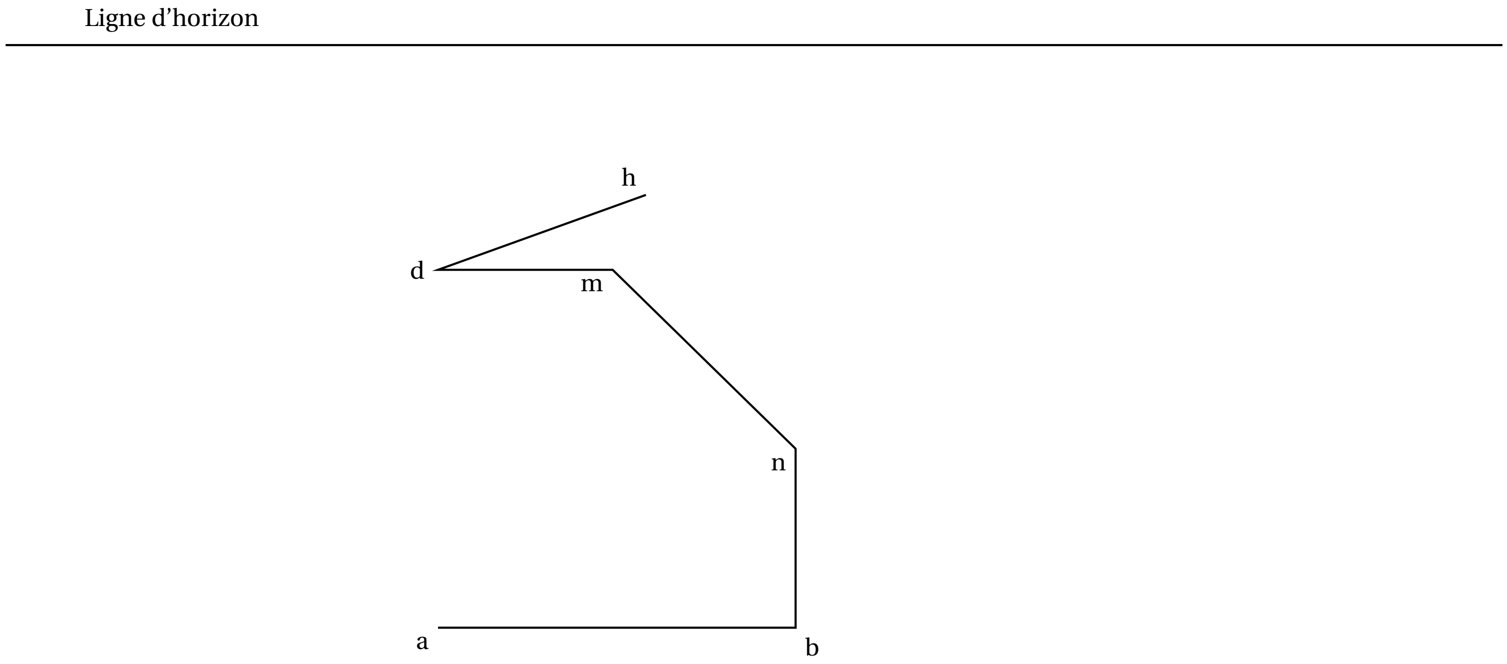
EXERCICE 4 **4 points** Pour fabriquer un solide S, on découpe, dans un cube d'arête 4 cm, un tétraèdre (voir le schéma ci-dessous en perspective cavalière) où M, N et P sont les milieux de trois arêtes. On note S le solide ABFEDMNPGH ainsi obtenu.



1. Sur l'annexe, on a ébauché le dessin en perspective à point de fuite du solide S, le plan (ABNMD) étant frontal. Les points A, B, F, E, D, M, N, P, G, H sont représentés par les points nommés en minuscules a, b, f, e, d, m, n, p, g, h. Compléter le dessin de la représentation du solide S après avoir placé le point de fuite principal w.
   On laissera apparent les traits de construction.

2. Calculer le volume en cm^3 du solide S
   (rappel : volume d'une pyramide $V = \frac{1}{3} B \times h$ où B est l'aire de la base et h la mesure de la hauteur).

ANNEXE DE L'EXERCICE 4 à rendre avec la copie)



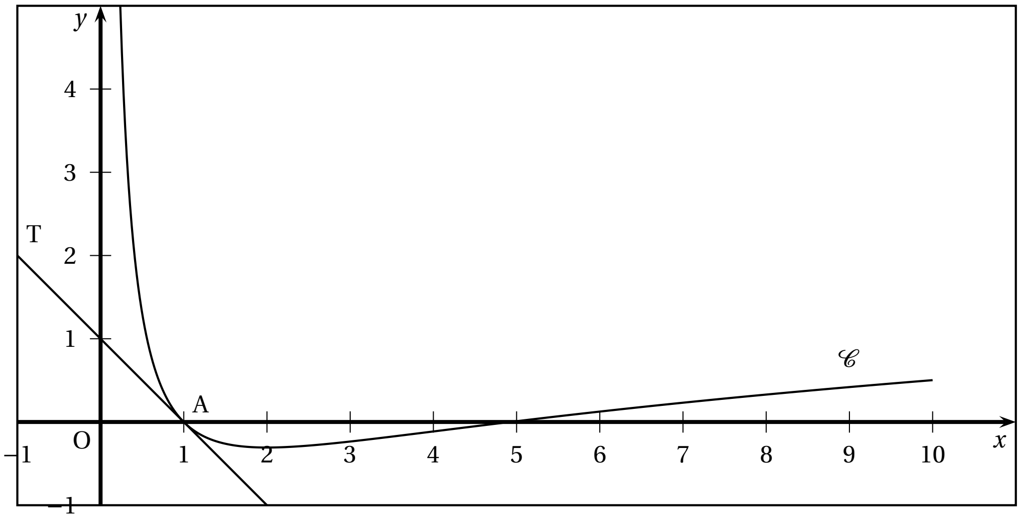
10 France juin 2006

EXERCICE 1 **8 points**

Les parties A et B peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Partie A

La courbe $\mathscr{C}$ ci-dessous est la représentation graphique dans un repère orthonormal d'une fonction f définie et derivable sur l'intervalle] 0 ; 10]. On note f' la fonction dérivée de f sur cet intervalle.



On précise que la droite T est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A de coordonnées (1 ; 0) et qu'elle passe par le point de coordonnées (0 ; 1).

1. Répondre aux deux questions suivantes par lecture graphique :
   - **a.** Donner $f(1)$ et $f'(1)$ en justifiant la valeur de $f'(1)$.
   - **b.** Lire les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle]0 ; 10].
2. On sait que $f(x)$ est de la forme $f(x) = \ln x + \dfrac{a}{x} + b$, où a et b désignent deux nombres réels.
   - **a.** Calculer $f'(x)$.
   - **b.** En utilisant les valeurs trouvées pour $f(1)$ et $f'(1)$ à la question 1 , calculer a et b.
   - **c.** En déduire l'expression de $f(x)$.

Partie B

On sait désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle]0 ; 10] par

$$f(x) = \ln x + \frac{2}{x} - 2$$

1. **a.** Vérifier que pour tout nombre réel x de l'intervalle]0 ; 10]

$$f'(x) = \frac{x-2}{x^2}$$

   Étudier le signe de $f'(x)$.

   b. On admet que la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 est $+\infty$.
   Dresser le tableau de variations de la fonction f.
   En déduire le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle]0 ; 10].

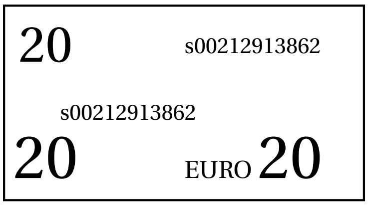
2. Le nombre 5 est-il vraiment une solution de l'équation $f(x) = 0$?

EXERCICE 2 **6 points**

On admet qu'on obtient le même reste en divisant un nombre par 9 qu'en divisant la somme de ses chiffres par 9.
Par exemple :

$$8753 = 972 \times 9 + 5, \qquad \text{le reste est donc 5.}$$
$$8 + 7 + 5 + 3 = 23 = 2 \times 9 + 5, \qquad \text{le reste est également 5.}$$

Sur les billets de banque en euros figure un code de 11 chiffres précédé d'une lettre. On remplace la lettre par son rang dans l'alphabet habituel comportant 26 lettres. On obtient ainsi un nombre à 12 ou 13 chiffres et on cherche le reste de la division de ce nombre par 9. Ce reste est le même pour tous les billets authentiques et vaut 8. Exemple :



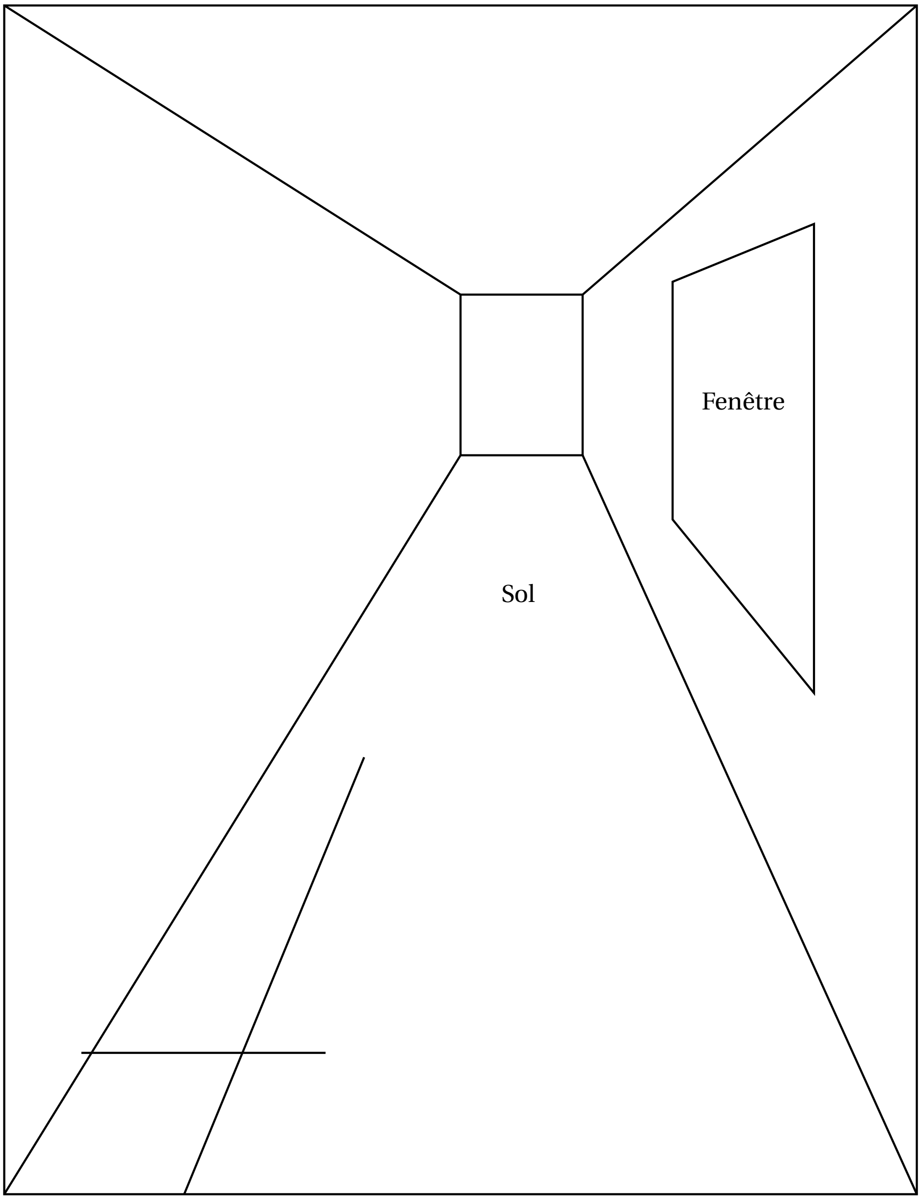
Code :	s00212913862.
Rang dans l'alphabet de la lettre s ;	19.
Nombre obtenu :	1900212913862.
Reste pour ce billet :	8

1. Le code u01308937097 figure sur un billet de banque.
   a. Donner le nombre à 13 chiffres correspondant à ce code.
   b. Calculer le reste de la division par 9 de la somme des 13 chiffres de ce nombre.
   c. Que peut-on dire de ce billet ?
2. Sur un billet authentique figure le code s0216644810x, x pour le dernier chiffre illisible. Montrer que $x + 42$ est congru à 8 modulo 9.
   En déduire x.
3. Sur un autre billet authentique la partie du code formé par les 11 chiffres est 16122340242, mais la lettre qui les précède est effacée. On appelle n le rang dans l'alphabet de la lettre effacée.
   a. Déterminer les valeurs possibles de n.
   b. Quelles sont les possibilités pour la lettre effacée ?

EXERCICE 3 **6 points** Un architecte a commencé le dessin d'un couloir (voir la figure en feuille annexe). Il a dessiné une large fenêtre rectangulaire sur le mur vertical de droite. II n'a dessiné qu'une partie du carrelage du sol.
On admet que l'architecte respecte les règles de la perspective à point de fuite. Toutes les constructions sont à faire sur la figure donnée en annexe à rendre avec la copie.

1. Citer une règle de la perspective à point de fuite. La vérifier sur la figure fournie en feuille annexe (on peut éventuellement effectuer des constructions sur la figure).
2. Sachant que le carrelage est régulier, représenter les 3 premières rangées de 5 carreaux (laisser clairement apparaître les traits de construction ; aucune justification écrite n'est demandée par ailleurs).
3. La fenêtre rectangulaire du mur de droite comporte deux battants de même largeur séparés par une traverse verticale. Au milieu de cette traverse verticale est fixée une poignée. Seul le cadre de la fenêtre est représenté sur le dessin. Compléter la figure en représentant la traverse verticale par un segment et la poignée par un point M.

Feuille annexe de l'exercice 3 à rendre avec la copie



11 La Réunion juin 2006

EXERCICE 1 **5 points**

Le but de cet exercice est de modéliser, par une suite numérique, les variations du stock d'une bibliothèque.

L'inventaire de janvier 2006 indique un effectif de 8000 ouvrages. Chaque année, 10 % des ouvrages sont égarés, tandis que 400 nouveaux ouvrages sont achetés.

Pour tout entier naturel n, on note p_n le nombre d'ouvrages en stock au début de l'année $2006 + n$.

1. **a.** Indiquer la valeur de p_0.

   b. Calculer les valeurs prévisionnelles p_1 et p_2 de l'effectif du stock lors des inventaires de janvier 2007 et de janvier 2008.

2. **a.** Démontrer que, pour tout entier naturel n, le terme général de la suite (p_n) vérifie la relation :

$$p_{n+1} = 0,9p_n + 400.$$

   b. En quelle année l'effectif du stock sera-t-il pour la première fois inférieur à 6000 ?

EXERCICE 2 **5 points**

On considère l'ensemble E défini par $E = \{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$.

1. Préciser la signification de la phrase : « Le nombre entier A est congru à zéro modulo 12 ».
2. On admet que tout nombre entier est congru modulo 12 à un élément de E et un seul.

   a. Déterminer à quel élément de E le nombre 10 est congru modulo 12.

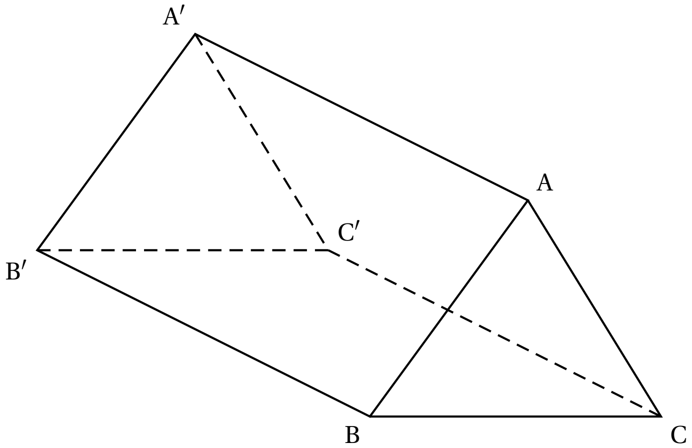
   b. Déterminer à quel élément de E le nombre 100 est congru modulo 12.

3. À tout entier n on associe l'élément u_n de E tel que 10^n soit congru à u_n modulo 12.
   Calculer u_3 , u_4, u_5 , u_6, u_7, u_8 et u_9.

EXERCICE 3 **5 points**

Une passerelle autoroutière a la forme d'un prisme droit ABCA′B′C′ dont la base est un triangle isocèle ABC de sommet principal A : sur la figure ci-dessous, elle est représentée en perspective cavalière. La longueur de cette passerelle est 40 mètres et on a AB = AC = 4 m.

Formulaire : *volume d'un prisme = aire de la base × hauteur.*



En ce qui concerne les questions 1 *et* 2 *ci-dessous, on laissera apparentes sur la feuille annexe toutes les constructions. Aucune autre justification n'est demandée.*

1. Dans cette question, on cherche à représenter le prisme par une vue en perspective à points de fuite pour laquelle le plan ABC est un plan frontal. Sur la feuille annexe à compléter et à rendre avec la copie, on a placé les points A, B, C, C′ et la ligne d'horizon Δ.

   a. Placer sur la feuille annexe le point de fuite principal F.

   b. Compléter sur la feuille annexe la représentation en perspective à points de fuite du prisme ABCA′B′C′.

2. Soit I le milieu du segment [BB′] et J le milieu du segment [CC′]. Le segment [IJ] représente un joint de dilatation inséré dans le sol de la passerelle. Représenter le segment [IJ] sur la figure de la feuille annexe.

3. Soit H le pied de la hauteur issue de C dans le triangle ABC. Soit x la mesure de la longueur CH exprimée en mètres.

   a. Montrer que le nombre x est inférieur ou égal à 4. La valeur 4 peut-elle être atteinte ?

   b. Déterminer le volume maximal que peut avoir le prisme.

EXERCICE 4 **6 points**

L'objectif de cet exercice est d'étudier une fonction qui permet d'estimer la taille d'un enfant de moins de 6 *ans, en fonction de son âge.*

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1 ; 6]$ par :

$$f(x) = 70 + 5x + 9\ln x.$$

1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous en arrondissant le résultat à l'unité la plus proche.

x	0,1	0,3	0,5	1	2	3	4	5	6
$f(x)$									

2. Étudier le sens de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0,1 ; 6]$.
3. Tracer la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f dans un repère orthogonal : 1 cm représente 0,5 unités sur l'axe des abscisses et 1 cm représente 10 unités sur l'axe des ordonnées.

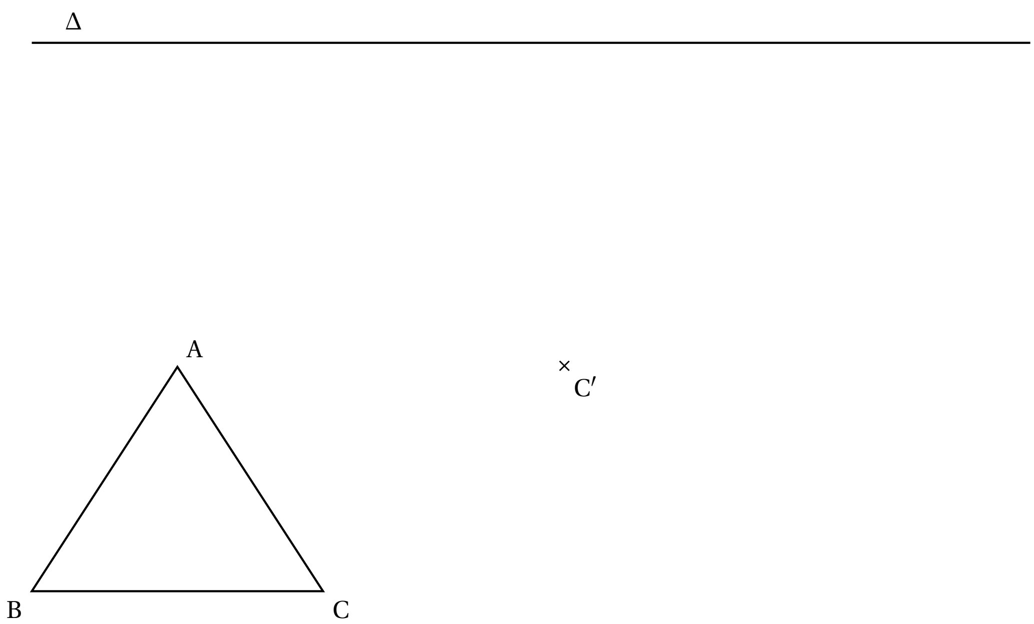
Partie B

La fonction f de la partie A permet d'estimer la taille, exprimée en cm, d'un enfant de moins de 6 ans, en fonction de son âge x, exprimé en années. Cette taille est donc donnée par $f(x) = 70 + 5x + 9\ln x$.

1. Calculer une estimation de la taille d'un enfant de 2 ans et demi, arrondie au centimètre.
2. Retrouver le résultat de la question précédente par une construction graphique utilisant la courbe tracée dans la partie A.
3. Évaluer l'âge d'un enfant mesurant 1 m par une construction graphique utilisant la courbe tracée dans la partie A.

Feuille annexe - Exercice 3

(à rendre avec la copie)



12 Polynésie juin 2006

EXERCICE 1 **6 points**

Un jeu consiste â jeter un dé de forme tétraédrique dont les faces sont numérotées de 1 à 4.
Ce dé est pipé de telle façon que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro porté par cette face.
On note p_i la probabilité d'obtenir le nombre i pour $i \in \{1~;~2~;~3~;~4\}$.

1. Exprimer p_i en fonction de i puis vérifier que la probabilité d'obtenir un nombre pair est $\dfrac{3}{5}$.
2. On jette le dé. Si le nombre obtenu est pair, la somme reçue par le joueur est égale à sa mise augmentée de 10 %. Si le nombre obtenu est impair, le joueur reçoit sa mise diminuée de 11 euros. La mise minimale est de 20 euros.

   Un joueur décide de faire trois parties successives :
   – il mise cent euros pour la première partie ;
   – pour la seconde partie il mise la somme reçue à l'issue de la première partie ;
   – pour la troisième partie il mise la somme reçue à l'issue de la seconde partie.

   a. Montrer que, pour ce joueur, les montants possibles de la somme reçue â l'issue des trois parties sont, arrondies â un euro près, 133 euros, 110 euros, 109 euros, 108 euros, 88 euros, 87 euros, 86 euros et 67 euros.

   b. Montrer que la probabilité de gagner 110 euros est égale à $\dfrac{18}{125}$.

   c. Calculer la probabilité de chacun des quatre évènements qui conduisent â une perte.

   d. Montrer que la probabilité, pour ce joueur, de gagner de l'argent est supérieure à celle d'en perdre.

Indication : pour la question 2*, on pourra s'aider d'un arbre.*

EXERCICE 2 **5 points**

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \text{e}^x - 2x$.

1. Calculer $g'(x)$ où g' désigne la dérivée de g puis dresser le tableau de variations de g.
2. En déduire que pour tout réel x de $\mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \text{e}^x - x^2$$

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$ puis la limite de f en $+\infty$.
   Pour la limite en $+\infty$ on pourra remarquer que pour x non nul $f(x)$ peut s'écrire : $x^2\left(\dfrac{\text{e}^x}{x^2} - 1\right)$.
2. Calculer $f'(x)$ où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f, puis en utilisant la partie A construire le tableau de variations de f.
3. On admet que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

   a. Calculer $f(-1)$ et $f(0)$.

   b. Montrer que la solution de l'équation $f(x) = 0$ est unique et qu'elle appartient à l'intervalle $[-1~;~0]$.

   c. En utilisant une calculatrice pour calculer $f(x)$ pour différentes valeurs de x, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de cette solution.
   Justifier la valeur retenue.

EXERCICE 3 **5 points**

La reine Cléopâtre ordonna à son architecte, le célèbre Numérobis, de réaliser une pyramide régulière à base carrée dont les dimensions devaient être telles que le carré de la hauteur soit égal à l'aire de chaque face triangulaire de cette pyramide

1. Compléter le dessin donné en annexe, représentant la pyramide en perspective cavalière ; L est le centre du carré AOUT, I est le sommet de la pyramide, J le milieu du segment [OU].
   On pose OJ $= r$; IL $= h$ et $t = \dfrac{\text{IJ}}{\text{JL}}$.
2. Calculer :

a. La longueur JL en fonction de r.

b. La longueur IJ en fonction de r et de h.

c. En déduire la valeur de t en fonction de r et h.

d. L'aire du triangle OUI en fonction de r et h.

3. Montrer que l'exigence de Cléopâtre se traduit par la relation :

$$\frac{h^2}{r^2} = \frac{\sqrt{h^2+r^2}}{r} \quad (1)$$

4. **a.** Calculer $t^2 - 1$.

b. En déduire qu'alors l'égalité (1) peut s'écrire : $t^2 - t - 1 = 0 \quad (2)$.

5. **a.** Montrer que : $\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} = t^2 - t - 1$.

b. En déduire les solutions de l'équation (2).

c. Quel nom porte la seule solution possible ?

EXERCICE 4 **4 points**

Un globe-trotter a parié de parcourir 5 000 km â pied.
Il peut, frais et dispos, parcourir 50 km en une journée, mais chaque jour la fatigue s'accumule et donc sa performance diminue de 1 % tous les jours.
On notera d_n la distance parcourue durant le n-ième jour.

1. Calculer les distances d_1, d_2, d_3 parcourues durant les trois premiers jours.

2. Expliquer pourquoi $d_{n+1} = 0,99d_n$. En déduire la nature de la suite (d_n) et l'expression de d_n en fonction de n.

3. **a.** Calculer, en fonction de n, le nombre total L_n de kilomètres parcourus au bout de n jours. $(L_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n)$.

b. En déduire la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$.
Le globe-trotter peut-t-il gagner ?

4. À l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal de jours N qui lui seraient nécessaires pour parcourir 4999 km.

On rappelle que :

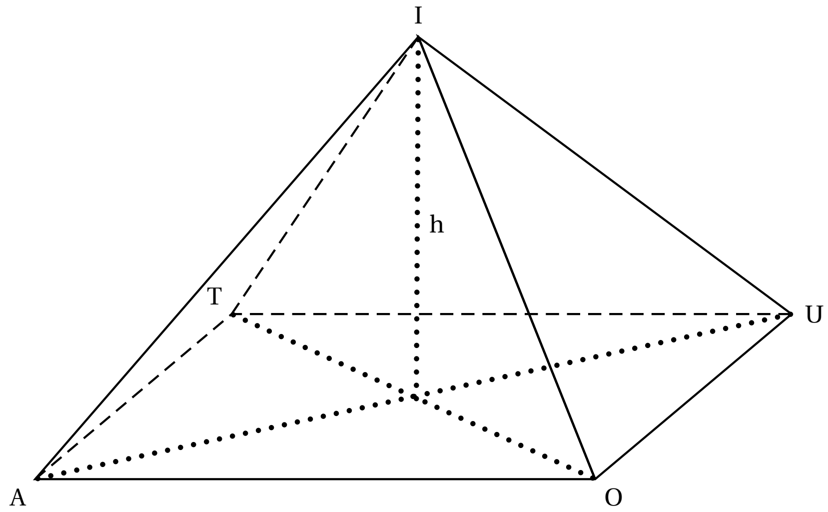
– La somme S des n premiers termes d'une suite arithmétique (u_n) de raison r est :

$$S = u_1 + u_2 + \cdots + u_n = n\frac{u_1 + u_n}{2}$$

– La somme S' des n premiers termes d'une suite géométrique (v_n) de raison q $(q \neq 1)$ est :

$$S' = v_1 + v_2 + \cdots + v_n = v_1\frac{1-q^n}{1-q}$$

ANNEXE de l'exercice 3 à rendre avec la copie



13 Antilles-Guyane juin 2007

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$f(x) = 55\mathrm{e}^{0,5x}.$$

1. Donner les valeurs approchées arrondies À l'unité des nombres $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$.

2. **a.** Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.

b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.

3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,10]$, l'équation $f(x) = 3000$. On donnera les arrondis À l'unité des solutions éventuelles.

Partie B.

Une étude statistique permet de considérer la fonction f de la partie A comme un modèle satisfaisant pour décrire l'évolution, de 2000 À 2010, de la puissance totale des éoliennes installées en France.

Plus précisément, on suppose que pour l'année $(2000+x)$ où x est un entier naturel, la puissance des éoliennes installées en France, exprimée en mégawatts, est donnée par $f(x)$.

En utilisant ce modèle et en exploitant les résultats de la partie A, répondre aux questions suivantes en donnant les justifications nécessaires.

1. Quelle était la puissance totale des éoliennes en 2001 ?

2. En quelle année la puissance totale des éoliennes devrait-elle dépasser 3000 mégawatts ?

3. Pourra-t-on atteindre une puissance totale de 10000 mégawatts en 2010 ?

4. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = 55\mathrm{e}^{0,5n}$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{0,5}$.

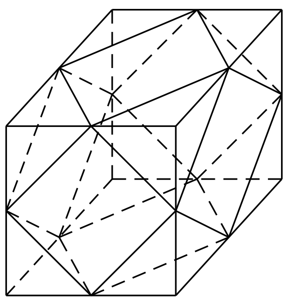
b. Dans le modèle étudié la puissance totale des éoliennes augmente donc chaque année d'un même pourcentage. Donner ce pourcentage en arrondissant le taux au dixième.

EXERCICE 2 **8 points**

Cet exercice est composé de deux parties indépendantes.

Partie A.

Sur chacune des faces d'un cube $ABCDEFGH$, figure un motif carré formé par les milieux des côtés des faces.



On donne en annexe la représentation en perspective centrale du cube $ABCDEFGH$, dont la face $ABFE$ est située dans un plan frontal. Le carré inscrit dans la face $ABFE$ y est représenté.

Les images des points A, B, C ... sont notés en lettres miniscules a, b, c ...

La droite (p) est la ligne d'horizon.

Les constructions demandées seront réalisées sur la feuille annexe 1, À rendre avec la copie.

On laissera apparents les traits de construction utiles.

1. **a.** Construire le point de fuite principal r.

b. Construire les deux points de distances s et t.

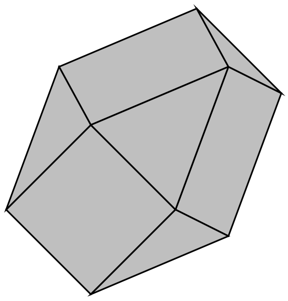
2. **a.** Construire l'image i du milieu I du segment $[CG]$.

b. Construire l'image j du milieu J du segment $[BC]$.

c. Proposer une vérification de la construction du point j.

d. Terminer le dessin des carrés figurant sur les deux faces apparentes du cube.

Partie B.



Dans un jeu de société, on utilise un dé qui est un solide obtenu en sectionnant un cube, À partir du schéma de la **partie A**.

Ce dé possède six faces carrées, numérotées de 1 À 6, et huit faces triangulaires, numérotées de 1 À 8.

Le premier joueur lance le dé et il ne peut entamer la partie que si le dé tombe sur une face portant le numéro 6.

On considère que lorsqu'on lance ce dé, la probabilité qu'il tombe sur une face carrée est $\frac{4}{5}$ et la probabilité qu'il tombe sur une face triangulaire est $\frac{1}{5}$.

De plus, on suppose que tous les numéros des faces carrées ont la même probabilité d'apparition et que tous les numéros des faces triangulaires ont la même probabilité d'apparition.

On note C l'événement « le dé tombe sur une face carrée » et T l'événement « le dé tombe sur une face triangulaire ». On a donc les probabilités suivantes : $p(C) = \frac{4}{5}$ et $p(T) = \frac{1}{5}$.

On note S l'évènement « le dé tombe sur une face portant le numéro 6 » et $\overline{\text{S}}$ l'évènement contraire de S.

Tous les résultats demandés dans cette partie seront donnés sous forme de fraction irréductible

1. Compléter l'arbre pondéré figurant sur la feuille annexe 2, **À rendre avec la copie**.

2. **a.** Déterminer la probabilité $p(\text{S} \cap \text{C})$ de l'événement $\text{S} \cap \text{C}$.

b. Déterminer la probabilité $p(\text{S})$ de l'évènement S.

3. Sachant que le premier joueur a obtenu un 6, quelle est la probabilité que le dé soit tombé sur une face carrée ?

4. Soit H l'événement « le dé tombe sur une face portant le numéro 8 », calculer la probabilité de H.

EXERCICE 3 **6 points**

Pour tout entier naturel n, on pose : $A(n) = n^2 - n + 2007$.

Le but de l'exercice est d'étudier la divisibilité des entiers $A(n)$ par 2 et par 3.

Cet exercice est composé de deux questions indépendantes.

1. **a.** Donner la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre $A(1)$ égal À 2007.

b. Soit n un entier naturel. Démontrer que : « Si n est divisible par 3, alors $A(n)$ est divisible par 3 ».

c. La réciproque de cette dernière affirmation est-elle vraie ? Justifier.

2. **a.** Vérifier que, quel que soit l'entier naturel n, on a :

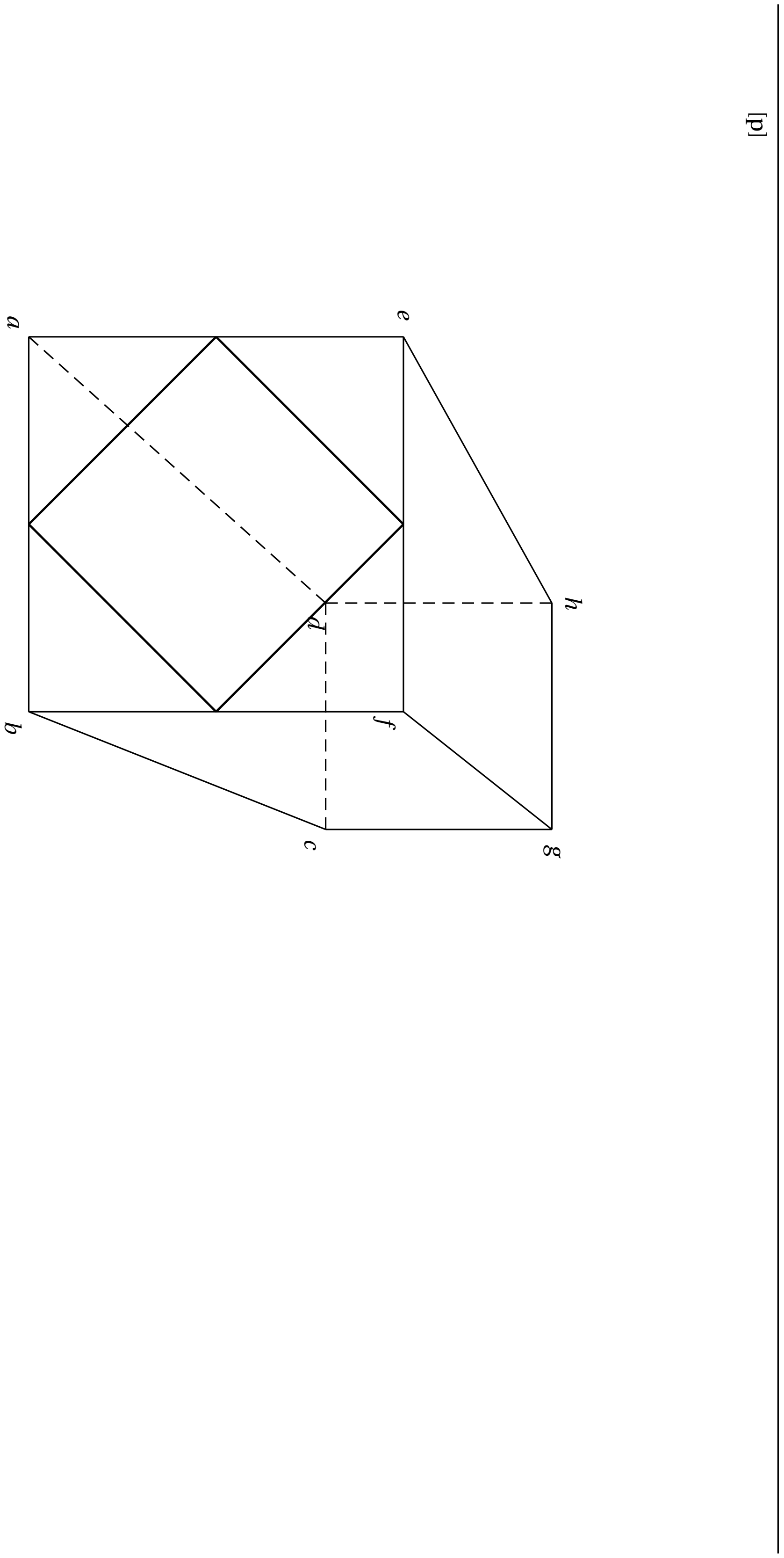
$$(n+1)^2 - (n+1) + 2007 = (n^2 - n + 2007) + 2n.$$

b. On considère un entier naturel n quelconque. Démontrer que : « Si $A(n)$ est impair, alors $A(n+1)$ est impair ».

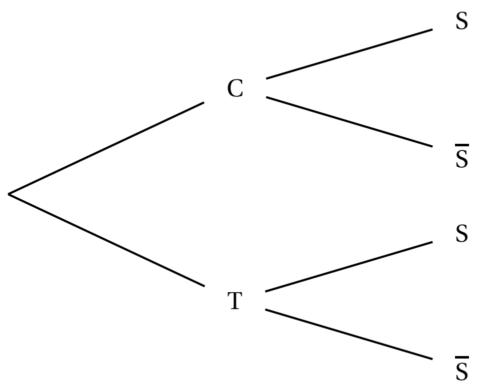
c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.

« Il existe au moins un entier naturel n tel que $A(n)$ soit divisible par 2 ».

ANNEXE 1 À rendre avec la copie



ANNEXE 2 À rendre avec la copie



14 Centres étrangers juin 2007

EXERCICE 1 **6 points**

Le but de cet exercice est de montrer, par deux méthodes différentes, que pour tout nombre entier naturel n, le nombre n^3+5n est divisible par 6.

Première méthode

1. Montrer que tout nombre entier naturel n est congru, modulo 6, À 0, 1, 2, 3, 4 ou 5.

2. Recopier et compléter le tabbleau suivant avec des nombres entiers naturels inférieur ou égaux À 5.

$n \equiv \ldots \pmod 6$	0	1	2	3	4	5
$n^3 \equiv \ldots \pmod 6$						
$5n \equiv \ldots \pmod 6$						
$n^3+5n \equiv \ldots \pmod 6$						

3. En déduire que pour tout nombre entier naturel n, le nombre n^3+5n est divisible par 6.

Deuxième méthode

1. Montrer que pour tout nombre entier naturel n, $n(n+1)$ est pair. En déduire que pour tout nombre entier naturel n, $3n(n+1)$ est divisible par 6.

2. On admet que $(n+1)^3+5(n+1) = (n^3+5n)+3n(n+1)+6$. Montrer que si pour un nombre entier naturel n, n^3+5n est divisible par 6, alors $(n+1)^3+5(n+1)$ est divisible par 6.

3. Que reste-t-il À vérifier, pour en déduire que n^3+5n est divisible par 6, pour tout nombre entier naturel n ?

EXERCICE 2 **4 points**

Pour chacune des quatre affirmations, dire si elle est vraie ou fausse, en justifiant le choix effectué. Chaque question est notée sur un point, avec la règle suivante :

– Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.
– Une mauvaise réponse n'enlève pas de point.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-2x+1}$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. L'équation $\frac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x} = \frac{4}{3}$ a une solution dans $\mathbb{R}$.

3. La suite définie, pour tout nombre entier naturel n, par $u_n = 1+\frac{1}{2}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.

4. Pour tout nombre réel x on a $1,01^x < 1000000$.

EXERCICE 3 **5 points**

Le tableau suivant donne la liste des nombres premiers inférieurs ou égaux À 100 :

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41
43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	

Une urne A contient 50 boules indicernables au toucher, numérotées de 1 À 50.

Une deuxième urne B contient 50 boules indicernables au toucher, numérotées de 51 À 100.

Un jeu consiste À lancer un dé cubique non pipé portant deux faces numérotées 1 et quatre faces numérotées 2, puis À tirer au hasard une boule, avec la règle suivante :

– Si la face obtenue porte le numéro 1, on choisit la boule dans l'urne A.
– Si la face obtenue porte le numéro 2, on choisit la boule dans l'urne B.

Dans la suite, on note A l'évènement « la boule choisie provient de l'urne A », on note B l'évènement « la boule choisie provient de l'urne B » et on note R l'évènement « le nombre écrit sur la boule est un nombre premier ».

On donnera les valeurs exactes des probabilités demandées.

On joue À ce jeu.

1. Quelle est la probabilité que la boule choisie provienne de l'urne A ?
Quelle est la probabilité que la boule choisie provienne de l'urne B ?

2. Justifier que la probabilité que la boule porte un nombre premier, sachant qu'elle provient de l'urne A est 0,3.
Quelle est la probabilité que la boule porte un nombre premier, sachant qu'elle provient de l'urne B ?

3. Montrer que la probabilité d'obtenir une boule portant un nombre premier en jouant À ce jeu est $p(R) = \frac{7}{30}$.
Pour répondre À cette question, on pourra s'aider d'un arbre de probabilités.

4. Léo joue une partie et obtient une boule portant un nombre premier. Quelle est la probabilité que cette boule provienne de l'urne A ?

EXERCICE 4 **5 points**

La feuille annexe 1 présente le dessin en perspective parallèle d'un cube ABCDEFGH d'arête ℓ, sur lequel est posé un deuxième cube IJKHPQRS d'arête $\frac{\ell}{2}$.

Le but de cet exercice est de représenter ces cubes en perspective centrale sur l'annexe 2, sachant que la face **ABFE** est dans un plan **frontal**.

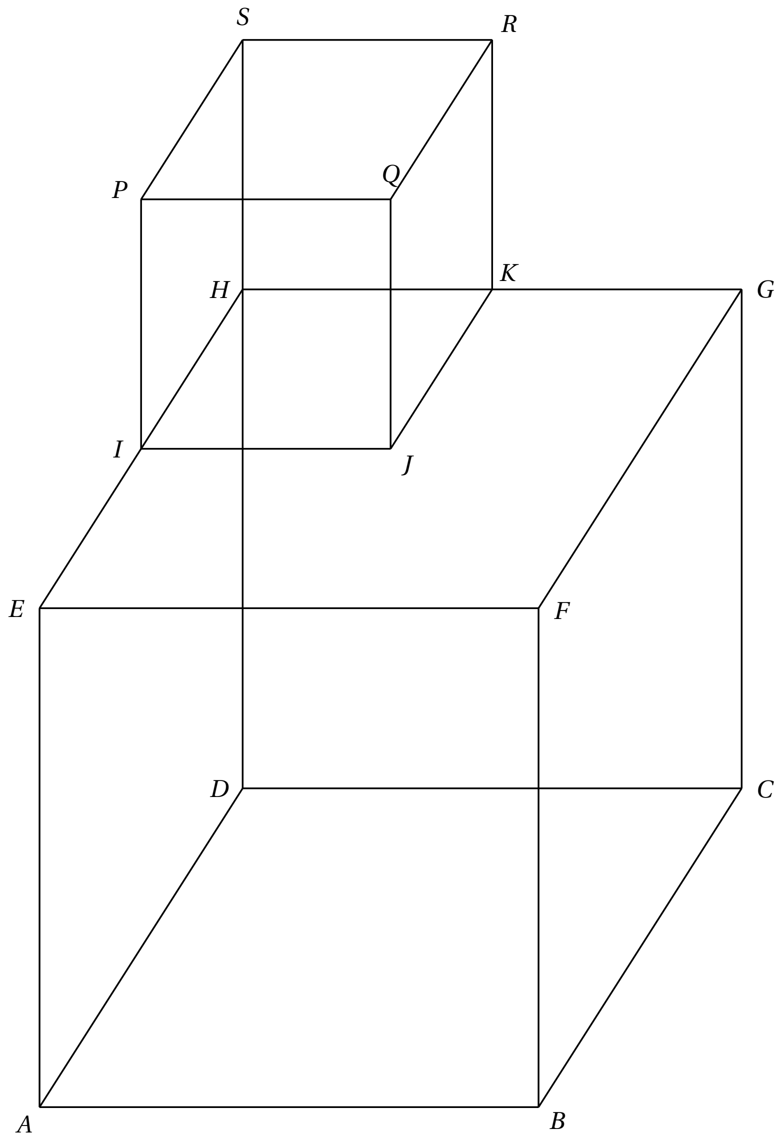
Dans tout l'exercice, on notera a, b, c, $\cdots$ les images des points A, B, C $\cdots$ dans cette perspective centrale.

On veillera À laisser apparentes toutes les traces de construction.

Le barème tiendra compte du soin et de la précision apportés à la construction.

1. **a.** Contruire $abfe$.
   b. Énoncer une propriété de la perspective centrale qui a permis de construire $abfe$.
2. Construire le point de fuite principal w.
3. terminer la construction de $abcdefgh$.
4. Indiquer, sans justifier, ce que représente le point J pour la face EFGH. En déduire la construction de j.
5. Terminer la construction de $ijkhpqrs$.

Annexe 1 de l'exercice 4



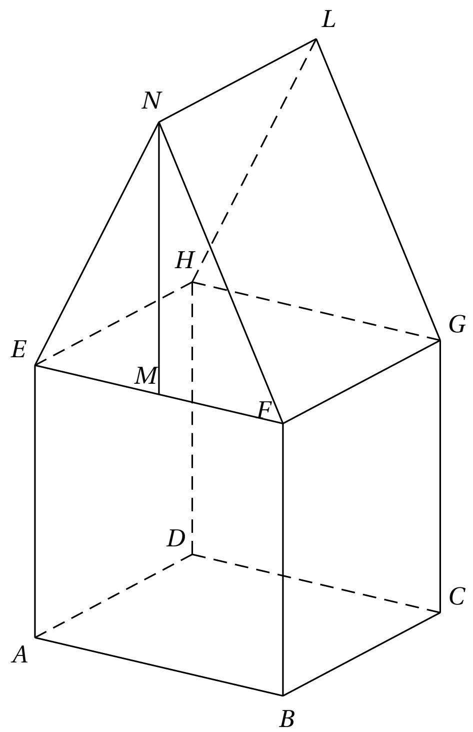
Annexe 2 de l'exercice 4
(À rendre avec la copie)

Ligne d'horizon

15 France juin 2007

EXERCICE 1 **6 points**

Le dessin ci-dessus représente une maison en perspective parallèle.



$ABCDEFGH$ est un pavé droit dont les faces $ABCD$ et $EFGH$ sont horizontales et constituent respectivement le sol et le plafond de la maison. L'arête $[AE]$ est donc verticale.

Les deux faces $ABCD$ et $EFGH$ sont des carrés.

$EFGHNL$ est un prisme droit ; la base EFN de ce prisme droit est un triangle isocèle en N dont la hauteur $[NM]$ est telle que $NM = AE$.

Dans cet exercice, on convient de noter un point de l'espace avec une lettre majuscule et de noter son image **dans une perspective centrale** avec une lettre minuscule (ainsi `a` est l'image de A, `b` l'image de B).

Les représentations données en annexe 1 et 2 sont À compléter et À rendre avec la copie.

Aucune justification des constructions n'est attendue mais on laissera visibles les traits de construction.

1. Une représentation en perspective centrale de cette maison est commencée **sur l'annexe 1**. Sont tracés la ligne d'horizon et le point de fuite principal `w`. Le mur $ABFE$ est supposé dans un plan frontal.
   - **a.** À l'aide de la représentation des diagonales des carrés $ABCD$ et $EFGH$, construire sur le dessin de **l'annexe 1** les points de distance d_1 et d_2 de cette représentation en perspective centrale.
   - **b.** Compléter **sur l'annexe 1** la représentation de la maison dans cette perspective centrale.
   - **c.** Placer l'image `i` du milieu I de $[AE]$ ainsi que l'image `j` du milieu J de $[CG]$. Par quel point la droite (`ij`) doit-elle passer ?
2. Une autre représentation en perspective centrale de la maison est commencée sur **l'annexe 2**. Les points `w` et `w'` sont les points de fuite respectifs des droites (AB) et (BC). Achever **sur l'annexe 2** la représentation de la maison dans cette nouvelle perspective centrale.
3. Citer deux propriétés de la perspective parallèle qui ne sont pas vérifiées par une perspective centrale. Les illustrer en faisant référence À la représentation donnée en début d'exercice et À celles complétées dans les annexes 1 et 2.

EXERCICE 2 **9 points**

On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3.

1. **a.** Déterminer les termes u_1, u_2, u_3 et u_4.
   b. Donner l'écriture en base 7 de u_2.
   c. Montrer que l'écriture en base 7 de u_3 est $\overline{105}^7$.
   d. Pour obtenir l'écriture en base 7 de u_4, un élève a effectué la multiplication ci-dessous. Dire s'il a ou non raison et expliquer pourquoi.

$$\begin{array}{rccc} & 1 & 0 & 5 \\ \times & & & 3 \\ \hline & 3 & 1 & 5 \end{array}$$

2. **a.** Montrer que $u_5 = 486$.
   b. On considère l'agorithme suivant :

Entrée	:	a un entier naturel.
Initialisation	:	L liste vide Affecter la valeur a À x.
Traitement	:	Tant que $x > 0$; Effectuer la division euclidienne de x par 7 ; Affecter son reste À r et son quotient À q ; Mettre la valeur de r au début de la liste L ; Affecter q À x.
Sortie	:	Afficher les élements de la liste L.

Faire fonctionner cet algorithme pour $a = 486$. On reproduira sur la copie un tableau analogue À celui donné ci-dessous et on le complétera :

	r	q	L	x
Initialisation			vide	486
Fin étape 1				
Fin étape 2				
...				
...				
...				

Expliquer le lien entre les éléments de la liste L et l'écriture de u_5 en base 7.

3. On a divisé le terme u_{10} de la suite (u_n) par un certain entier. On obtient le quotient Q dont l'écriture décimale est $Q = 14,72727272727272\ldots$ écriture dans laquelle les chiffres 7 et 2 se répètent À l'infini.

   On note (v_n) la suite géométrique de premier terme $0,72$ et de raison $0,01$.

   a. Calculer $v_0 + v_1 + v_2$.
   b. On pose $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ où n est un entier naturel non nul.
   Calculer S_n. En déduire $\lim_{n\to+\infty} S_n$.
   c. En déduire une écriture de 0,727272... où les chiffres 7 et 2 se répètent À l'infini sous la forme du quotient de deux entiers.
   d. Quel est le nombre par lequel on a divisé u_{10} ?

EXERCICE 3 **5 points**

Dans chacune des questions suivantes, plusieurs choix sont proposés et **un seul choix est correct**.
Pour chacune de ces questions, on indiquera sur la copie le choix retenu. Aucune justification n'est demandée.
Chaque bonne réponse rapporte 1 point, une mauvaise réponse enlève 0,25 point.
Une absence de réponse est notée 0.
Si, À la fin de l'exercice, le total des points obtenus est négatif, la note sera ramenée À 0.

1. On considère l'égalité : $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \ln(x)$.
Cette égalité est vérifiée :

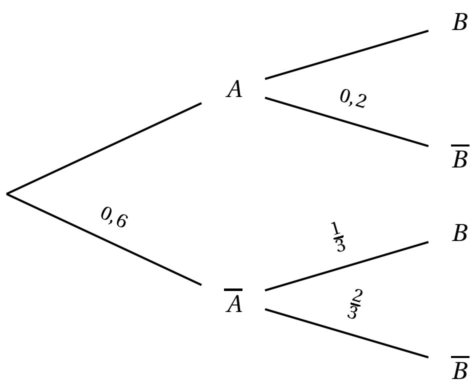
a. pour une seule valeur du nombre réel x.

b. pour n'importe quelle valeur du nombre réel x.

c. pour deux valeurs du nombre réel x.

d. pour aucune valeur du nombre réel x.

2. On considère l'arbre de probabilité incomplet suivant :



Alors $p(A \cap B)$ la probabilité de l'évènement $A \cap B$ est égale À :

a. $0,8$.

b. $0,32$.

c. $0,12$.

d. $0,4$.

3. La fonction g est définie pour tout nombre réel x par $g(x) = x\mathrm{e}^{2x}$. La fonction dérivée g' de la fonction g est telle que, pour tout nombre réel x :

a. $g'(x) = \mathrm{e}^{2x} + x \times \mathrm{e}^{2x}$.

b. $g'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{2x} + x \times 2 \times \mathrm{e}^{2x}$.

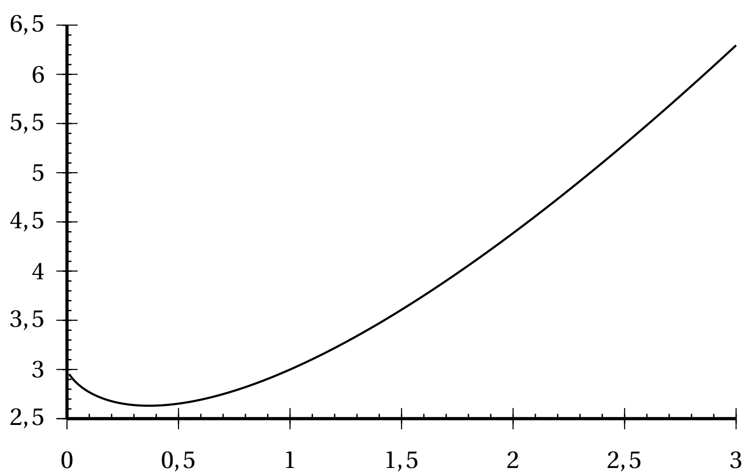
c. $g'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{2x}$.

d. $g'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{2x} - x \times 2 \times \mathrm{e}^{2x}$.

4. La fonction f est définie, pour tout nombre réel strictement positif x par :

$$f(x) = x\ln(x) + 3.$$

On donne ci-dessous une représentation graphique de la fonction f obtenue grÂce À un tableur.



La fonction f présente un minimum en :

a. $2,7$.

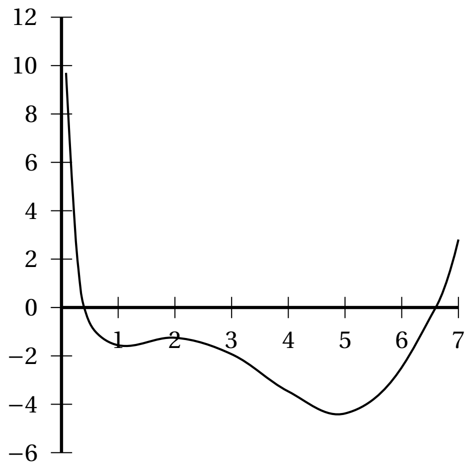
b. $\frac{1}{\mathrm{e}}$.

c. $0,37$.

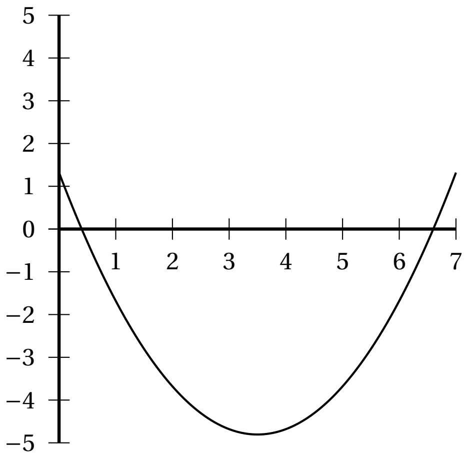
d. e.

5. La courbe ci-contre représente graphiquement une fonction f.

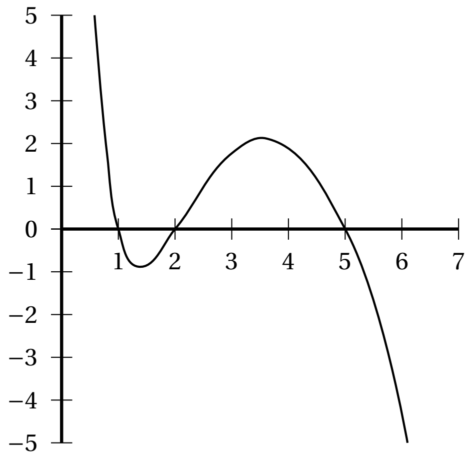
On note f' la fonction dérivée de f.



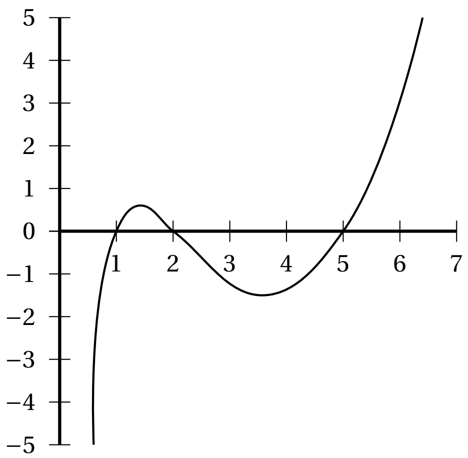
La courbe représentant la fonction f' se trouve parmi l'une des quatre courbes données ci-dessous. Laquelle ?



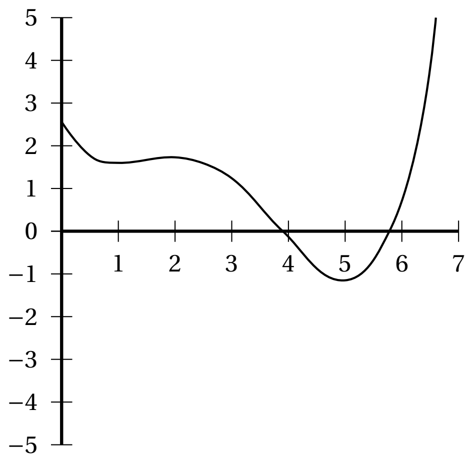
Courbe a)



Courbe b)

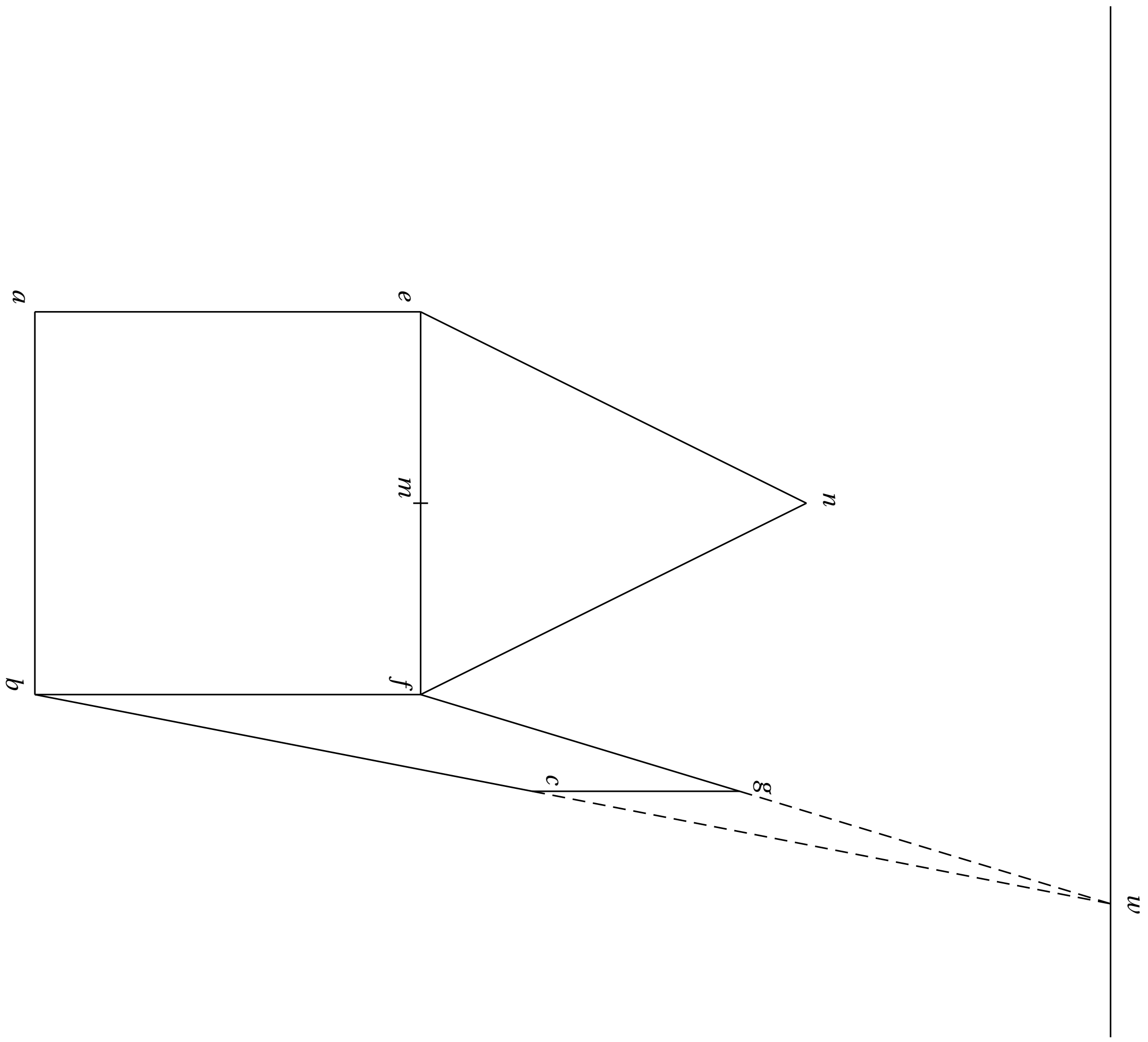


Courbe c)

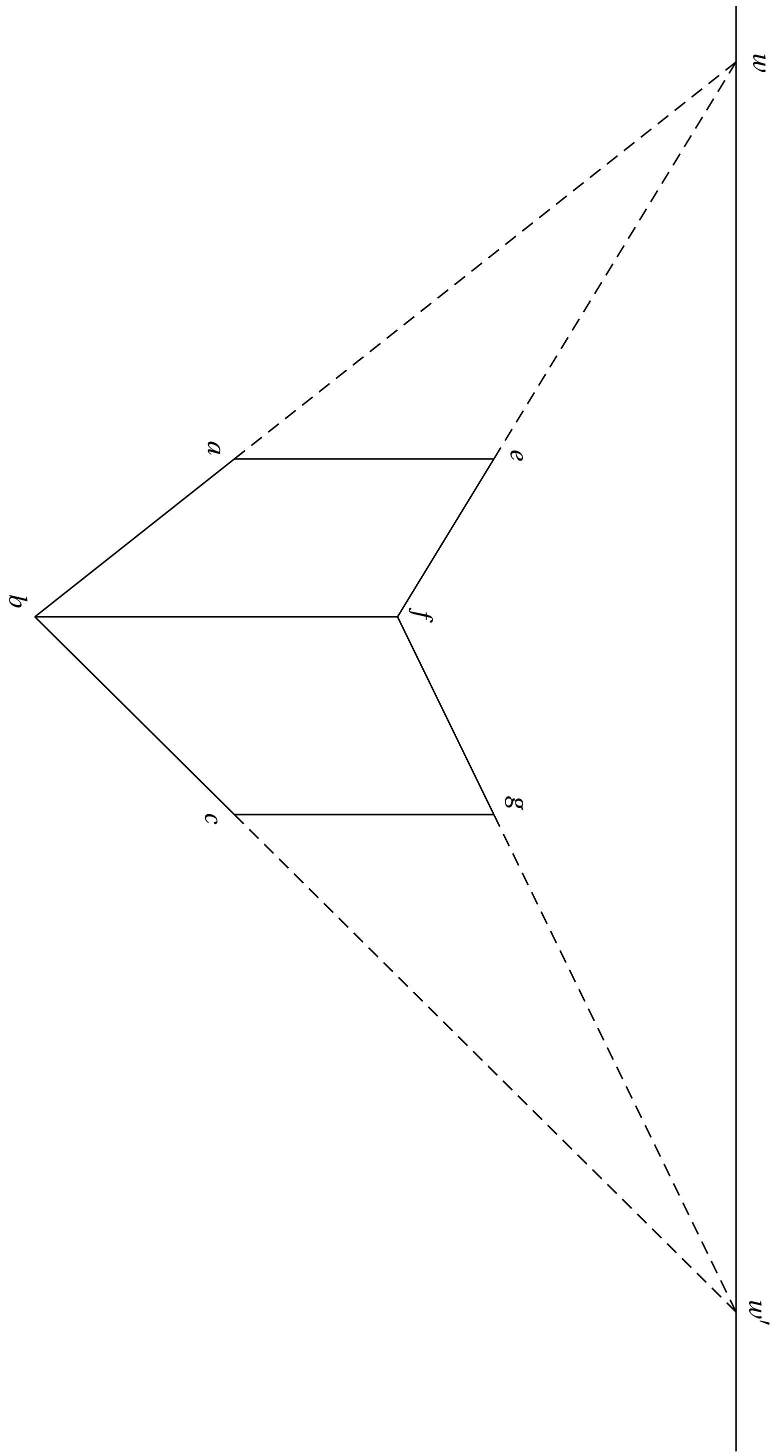


Courbe d)

ANNEXE 1 (exercice 1) Dessin À rendre avec la copie



ANNEXE 2 (exercice 1) Dessin À rendre avec la copie



16 La Réunion juin 2007

EXERCICE 1 **6 points**

Les élèves d'une école de musique sont répartis en trois catégories :

– ceux inscrits À un cours d'instruments À cordes,
– ceux inscrits À un cours d'instruments À vent,
– ceux inscrits au cours de batterie.

Chaque élève est inscrit À un seul cours.

60 % des élèves sont inscrits À un cours d'instruments À cordes et 10 % au cours de batterie.

70 % des élèves inscrits À un cours d'instruments À cordes sont des filles et 60 % des élèves inscrits À un cours d'instruments À vent sont des garçons.

On interroge au hasard un élève (garçon ou fille) de cette école.

On note C, V, B, F, G les évènenements suivants :

– C : « l'élève interrogé est inscrit À un cours d'instruments À cordes »

– V : « l'élève interrogé est inscrit À un cours d'instruments À vent »

– B : « l'élève interrogé est inscrit au cours de batterie »

– F : « l'élève interrogé est une fille »

– G : « l'élève interrogé est un garçon »

On pourra utiliser un arbre de probabilités pour décrire la situation

1. Donner, À l'aide de l'énoncé :

   a. les probabilités $P(B)$ et $P(C)$ des événements B et C,

   b. la probabilité $P_C(F)$ que l'élève interrogé soit une fille sachant qu'il est inscrit À un cours d'instruments À cordes,

   c. la probabilité $P_V(G)$ que l'élève soit un garçon sachant qu'il est inscrit À un cours d'instruments À vent,

2. Calculer la probabilité $P(C \cap F)$ d'interroger une fille inscrite À un cours d'instruments À cordes.

3. Calculer la probabilité d'interroger une fille inscrite À un cours d'instruments À vent.

4. On sait que 56 % des élèves de cette école sont des filles.

   a. Montrer que la probabilité d'interroger une fille inscrite au cours de batterie est $0,02$.

   b. Calculer la probabilité d'interroger un élève inscrit au cours de batterie sachant que c'est une fille (*on donnera le résultat en pourcentage*).

EXERCICE 2 **4 points**

Un nombre entier naturel N s'écrit $\overline{cabc}$ dans le système de numération À base cinq où a, b, c sont non nuls, c'est-À-dire :

$$\text{N} = c \times 5^3 + a \times 5^2 + b \times 5 + c$$
$$\text{où } a,\ b,\ c \text{ sont des entiers tels que } 0 < a < 5, \quad 0 < b < 5, \quad 0 < c < 5$$

Ce même nombre N s'écrit $\overline{aba}$ dans le système de numération À base huit.

1. Montrer que $\text{N} = 65a + 8b$ et en déduire que $40a = 126c - 3b$.

2. **a.** Justifier que $40a \equiv 0$ (modulo 3). En déduire la valeur de a.

   b. Montrer que $b \equiv 0$ (modulo 2). Déterminer les valeurs de b et c.

   c. Donner l'écriture de l'entier N dans les bases cinq, huit et dix.

EXERCICE 3 **5 points**

Dans cet exercice, pour chacune des questions, une et une seule des réponses proposées est exacte.

Aucune justification n'est demandée, il est seulement demandée de rappeler le numéro de la question et la réponse choisie a, b ou c.

Chaque bonne réponse rapporte 1 point et chaque mauvaise réponse enlève 0,5 point.

L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

En cas de total négatif pour l'ensemble de l'exercice, la note attribuée est 0.

Question	Énoncé	Réponses proposées		
		a	*b*	*c*
1	Le nombre $\ln\left(\frac{1}{e^3}\right)$ est égal À :	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	-3
2	Le nombre -4 est solution de l'équation :	$e^{\ln x} = -4$	$\ln x = -\ln 4$	$\ln\left(e^x\right) = -4$
3	L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(1-x) > 0$ est l'intervalle	$]-\infty\,;1[$	$]-\infty\,;0[$	$]0\,;+\infty[$
4	Dans un repère orthogonal du plan, $\mathscr{C}$ est la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par : $g(x) = x\ln x$. Le coefficient directeur de la tangente À $\mathscr{C}$ au point $A(1\,;0)$ est :	1	-3	0
5	La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{e^x}$ admet pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :	$f'(x) = \frac{1}{e^x}$	$f'(x) = (1-x)e^{-x}$	$f'(x) = \frac{1+x}{e^x}$

EXERCICE 4 **5 points**

Le service commercial d'un journal a constaté que chaque année, il enregistre 1000 nouveaux abonnés mais 50 % des anciens abonnés environ ne renouvellent pas leur abonnement.

L'objet de cet exercice est d'étudier l'évolution du nombre d'abonnés si cette situation perdure sachant qu'au cours de l'année écoulée, le journal comptait 4000 abonnés.

Dans ce but, on considère la suite (U_n) définie par :

$$u_0 = 4 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 0,5u_n + 1$$

1. Expliquer pourquoi, pour tout entier $n \geqslant 0$, u_n est une approximation du nombre de milliers d'abonnés au bout de n années.

2. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

n	0	1	2	3	4	5
u_n						

3. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que :

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\quad u_n > 2$$

4. Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 2$.

- **a.** Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $0,5$.
  Préciser la valeur de v_0.
- **b.** En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

5.
- **a.** En utilisant le résultat de la question précédente, démontrer que :

$$\text{Pour tout entier naturel } n,\quad u_n = 2(1+0,5^n)$$

- **b.** Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
- **c.** Donner une interprétation de cette limite.

17 Polynésie juin 2007

EXERCICE 1 **5 points**

Pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, on considère le nombre entier $11^n + 5^n - 7$.

1. **a.** Quel est le reste de 11 dans la division euclidienne par 10 ?

   b. Démontrer que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $\quad 11^n \equiv 1 \pmod{10}$.
2. Démontrer que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $\quad 5^n \equiv \pmod{10}$.
   (On pourra utiliser un raisonnement par récurrence ou s'appuyer sur des propriétés de divisibilité).
3. Quel est le chiffre des unités du nombre $11^{2007} + 5^{2007} - 7$? Justifier la réponse donnée.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans un jeu, on dispose d'une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches, ainsi qu'un dé bien équilibré.

Une partie consiste pour un joueur À prélever au hasard une boule dans l'urne, puis :
– si la boule tirée est blanche, il lance le dé et gagne si le numéro obtenu est inférieur ou égal À 4,
– si la boule tirée est noire, il lance le dé et gagne si le numéro obtenu est pair.

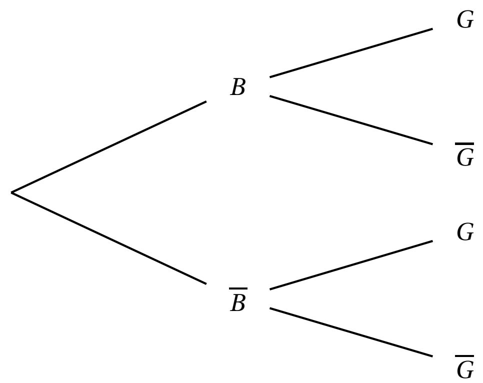
On considère les évènements suivants :

B : « le joueur tire une boule blanche ».

G : « le joueur gagne la partie ».

On note $\overline{B}$ et $\overline{G}$ les événements contraires de B et G.

1. Calculer la probabilité que le joueur tire une boule blanche.
2. Calculer la probabilité que le joueur gagne la partie sachant qu'il a tiré une boule blanche.
3. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.



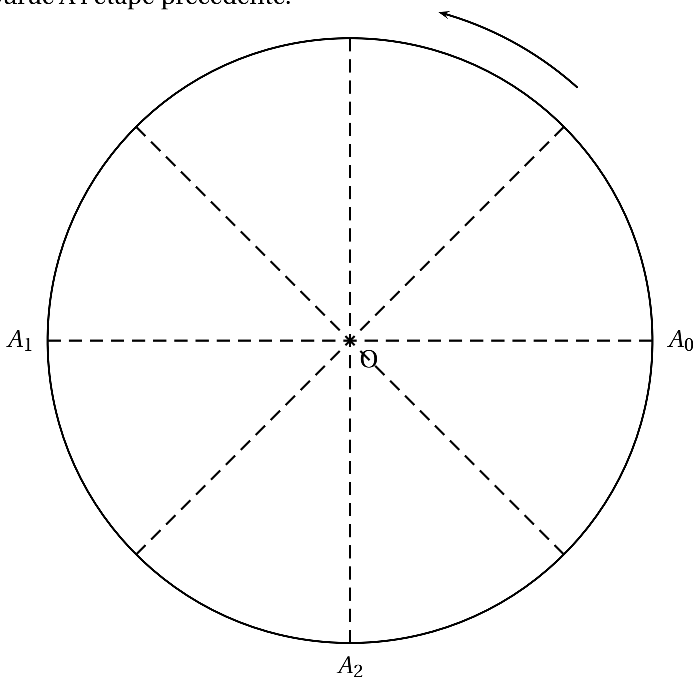
4. Montrer que la probabilité que le joueur gagne la partie est égale à $\dfrac{19}{30}$.
5. Le joueur gagne la partie. Quelle est la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche ?

EXERCICE 3 **5 points**

Un robot miniature se déplace sur un cercle de centre O et de rayon 1 mètre. Il est déposé au point A_0 puis il parcourt le cercle en tournant dans le sens direct (sens de la flèche sur la figure).

Il est décidé que son trajet s'effectuera en plusieurs étapes (voir figure).

– **Étape 1** : il parcourt le demi-cercle de A_0 À A_1, la distance parcourue est notée d_1.
– **Étape 2** : il parcourt le quart de cercle de A_1 À A_2, la distance parcourue est notée d_2.
– **Étape n, avec** $n \geqslant 2$: il parcourt l'arc de cercle allant de A_{n-1} À A_n, la distance parcourue, notée d_n, étant la moitié de celle parcourue À l'étape précédente.



On rappelle que :

- Le périmètre d'une cercle de rayon 1 mètre est égal À 2π mètres.
- $1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$, pour tout nombre réel $q \neq 1$.

1. **a.** Exprimer d_1 et d_2 en fonction de π

b. Reproduire la figure, puis placer le point A_3. Justifier que $d_3 = \frac{\pi}{4}$.

2. **a.** Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Justifier la réponse donnée.

b. Montrer que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $\quad d_n = \pi\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

3. On s'intéresse À la distance totale, notée D_n, parcourue par le robot sur le cercle À la fin de l'étape n.

a. Calculer D_2.

b. Démontrer que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $\quad D_n = 2\pi\left(1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right)$.

c. Déterminer la limite de la suite (D_n).

d. Justifier que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $\quad D_n < 2\pi$.
Que peut-on en déduire pour le déplacement du robot sur le cercle ?

EXERCICE 4 **5 points**

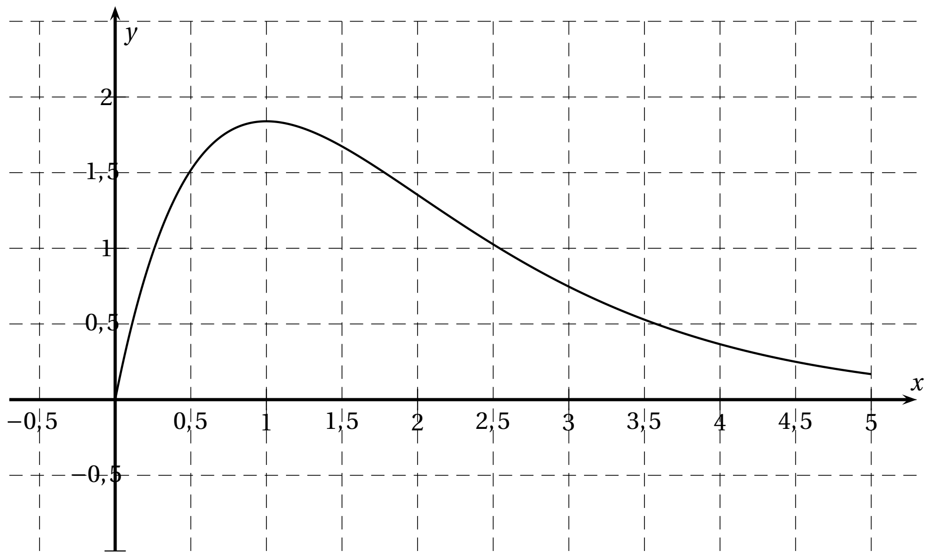
Suivant la prescription de son médecin, Pascal s'administre un médicament, lequel passe progressivement dans le sang comme il est aussi progressivement éliminé. Une documentation technique propose la fonction f définie sur $[0\,;5]$ par

$$f(t) = 5t\mathrm{e}^{-t}$$

pour décrire la concentration, en mg/L, en fonction du temps écoulé t, en heures, valable pour les 5 heures après la prise.

Par ailleurs il est bien indiqué, pour prendre le volant de sa voiture, d'attendre que cette concentration soit inférieure À 0,25 mg/L.

Une courbe représentative de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Étude de la fonction f sur $[0\,;\,5]$.

a. Soit f' la fonction dérivée de f. Vérifier que $f'(t) = 5(1-t)\text{e}^{-t}$.

b. Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0\,;\,5]$.

c. Dresser le tableau de variation de la fonction f.

2. Utilisation de la fonction f.

a. Au bout de combien de temps la concentration du médicament est-elle la plus élevée ?

b. Il ne faut pas conduire tant que la concentration est supérieure ou égale À 0,25 mg/L.
Par lecture graphique, déterminer, avec la précision permise par le graphique, au bout de combien de temps après la prise de médicament Pascal pourra reprendre le volant.

Note informative

La documentation sur le médicament, administré de façon non intraveineuse, précise que les échanges concernés par le passage dans le sang comme par l'élimination se font esseniellement dans un seul sens, suivant des lois qui mettent en jeu des constantes de temps voisines ; les coefficients sont bien sûr adaptés À la morphologie de Pascal.

18 Liban juin 2007

EXERCICE 1 **5 points**

Pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, on considère le nombre entier $11^n + 5^n - 7$.

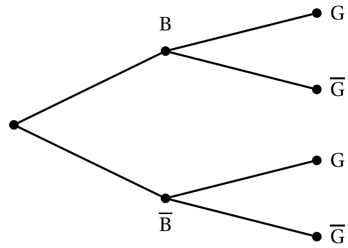
1. **a.** Quel est le reste de 11 dans la division euclidienne par 10 ?

   b. Démontrer que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $11^n \equiv 1 \pmod{10}$.
2. Démontrer que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $5^n \equiv 5 \pmod{10}$.
   (On pourra utiliser un raisonnement par récurrence ou s'appuyer sur des propriétés de divisibilité).
3. Déterminer le plus petit nombre entier naturel p tel que $11^n + 5^n - 7 \equiv p \pmod{10}$.
4. Quel est le chiffre des unités du nombre $11^{2007} + 5^{2007} - 7$? Justifier la réponse donnée.

EXERCICE 2 **5 points**

Dans un jeu, on dispose d'une urne contenant une boule noire et quatre boules blanches, ainsi que d'un dé bien équilibré.
Une partie consiste pour un joueur À prélever au hasard une boule dans l'urne, puis :
– si la boule tirée est blanche, il lance le dé et gagne si le.numéro obtenu est inférieur ou égal À 4,
– si la boule tirée est noire, il lance le dé et gagne si le numéro obtenu est pair.
On considère les évènements suivants :
B : « le joueur tire une boule blanche »,
G : « le joueur gagne la partie ».
On note $\overline{\text{B}}$ et $\overline{\text{G}}$ les évènements contraires de B et de G.

1. Calculer la probabilité que le joueur tire une boule blanche.
2. Calculer la probabilité que le joueur gagne la partie sachant qu'il a tiré une boule blanche.
3. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités ci-dessous.

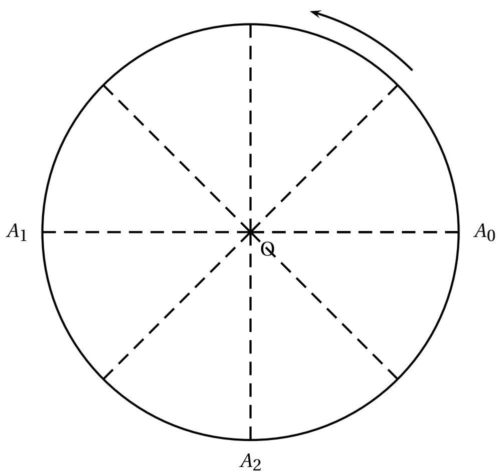


4. Montrer que la probabilité que le joueur gagne la partie est égale À $\dfrac{19}{30}$.
5. Le joueur gagne la partie- Quelle est la probabilité qu'il ait tiré une boule blanche ?

EXERCICE 3 **5 points**

Un robot miniature se déplace sur un cercle de centre O et de rayon 1 mètre. Il est déposé au point A_0 puis il parcourt le cercle entournant dans le sens direct (sens de la flèche sur la figure). Il est décidé que son trajet s'effectuera en plusieurs étapes (voir figure).

> Étape 1 : il parcourt le demi-cercle de A_0 À A_1, la distance parcourue est notée d_1.
> Étape 2 : il parcourt le quart de cercle de A_1 À A_2, la distance parcourue est notée d_2.
> Étape n, avec $n \geqslant 2$: il parcourt l'arc de cercle allant de A_{n-1} À A_n la distance parcourue, notée d_n, étant la moitié de celle parcourue À l'étape précédente



On rappelle que :

- Le périmètre d'un cercle de rayon 1 mètre est égal À 2π mètres.

- $1+q+q^2+\cdots+q^n = \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$, pour tout nombre réel $q \neq 1$.

1. **a.** Expiimer d_1 et d_2 en fonction de π.

b. Reproduire la figure, puis placer le point A_3. Justifier que $d_3 = \dfrac{\pi}{4}$.

2. **a.** Quelle est la nature de la suite (d_n) ? Justifier la réponse donnée.

b. Montrer que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $d_n = \pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$.

3. On s'intéresse À la distance totale, notée D_n, parcourue par le robot sur le cercle À la fin de l'étape n.

a. Calculer D_2.

b. Démontrer que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $D_n = 2\pi\left[1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right]$.

c. Déterminer la, limite de la suite (D_n).

d. Justifier que, pour tout nombre entier $n \geqslant 1$, $D_n < 2\pi$.
Que peut-on en déduire pour le déplacement du robot sur le cercle ?

EXERCICE 4 **5 points**

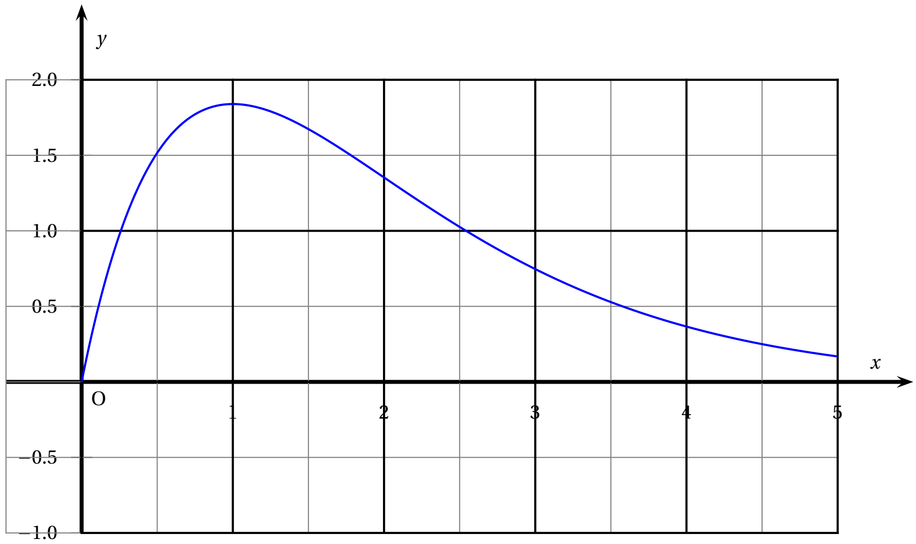
Suivant la prescription de son médecin, Pascal s'administre un médicament, lequel passe progressivement dans le sang comme il est aussi progressivement éliminé. Une documentation technique propose la fonction f définie sur $[0 ; 5]$ par

$$f(t) = 5te^{-t}$$

pour décrire la concentration, en mg/L, en fonction du temps écoulé t, en heures, valable pour les 5 heures après la prise.

Par ailleurs il est bien indiqué, pour prendre le volant de sa voiture, d'attendre que cette concentration soit inférieure À 0,25 mg/L.

Une courbe représentative de la fonction f est donnée ci-dessous.



1. Étude de la fonction f sur $[0 ; 5]$

a. Soit f' la fonction dérivée de f. Vérifier que $f'(t) = 5(1-t)e^{-t}$.

b. Étudier le signe de $f'(t)$ sur $[0 ; 5]$.

c. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

2. Utilisation de la fonction f.

a. Au bout de combien de temps la concentration du médicament est-elle la plus élevée ?

b. Il ne faut pas conduire tant que la concentration est supérieure ou égale À 0,25 mg/L.
Par lecture graphique, déterminer, avec la précision permise par le graphique, au bout de combien de temps après la prise du médicament Pascal pourra prendre le volant.

Note informative : la documentation sur le médicament, administré de façon non intraveineuse, précise que les échanges concernés par le passage dans le sang comme par l'élimination se font essentiellement dans un seul sens, suivant des lois qui mettent en jeu des constantes de temps voisines ; les coefficients sont bien sûr adaptés À la morphologie de Pascal.

19 Antilles-Guyane septembre 2007

Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré

EXERCICE 1 **6 points**

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,10]$ par :

$$f(x) = 55\mathrm{e}^{0,5x}.$$

1. Donner les valeurs approchées arrondies à l'unité des nombres $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ et $f(4)$.
2. **a.** Déterminer la fonction dérivée de la fonction f.

   b. En déduire le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,10]$.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,10]$, l'équation $f(x) = 3000$. On donnera les arrondis à l'unité des solutions éventuelles.

Partie B

Une étude statistique permet de considérer la fonction f de la partie A comme un modèle satisfaisant pour décrire l'évolution, de 2000 À 2010, de la puissance totale des éoliennes installées en France. Plus précisément, on suppose que pour l'année $(2000 + x)$ où x est un entier naturel, la puissance totale des éoliennes installées en France, exprimée en mégawatts, est donnée par $f(x)$.

En utilisant ce modèle et en exploitant les résultats de la partie A, répondre aux questions suivantes en donnant les justifications nécessaires.

1. Quelle était la puissance totale des éoliennes en 2001 ?
2. En quelle année la puissance totale des éoliennes devrait-elle dépasser 3 000 mégawatts ?
3. Pourra-t-on atteindre une puissance totale de 10000 mégawatts en 2010 ?
4. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = 55\mathrm{e}^{0,5n}$.

   a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $\mathrm{e}^{0,5}$.

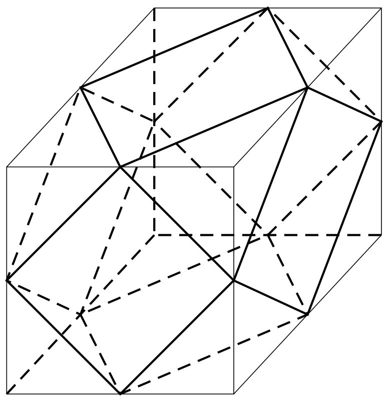
   b. Dans le modèle étudié la puissance totale des éoliennes augmente donc chaque année d'un même pourcentage. Donner ce pourcentage en arrondissant le taux au dixième.

EXERCICE 2 **8 points**

Cet exercice est composé de deux parties indépendantes.

Partie A

Sur chacune des faces d'un cube ABCDEFGH, figure un motif carré formé par les milieux des côtés des faces.



On donne en annexe la représentation en perspective centrale du cube ABCDEFGH, dont la face ABFE est située dans un plan frontal. Le carré inscrit dans la face ABFE y est représenté.

Les images des points A, B, C ... sont notées en lettres minuscules a, b, e. La droite (p) est la ligne d'horizon.

Les constructions demandées seront réalisées sur la feuille annexe 1*, à rendre avec la copie.*
On laissera apparents les traits de construction utiles.

1. **a.** Construire le point de fuite principal r.

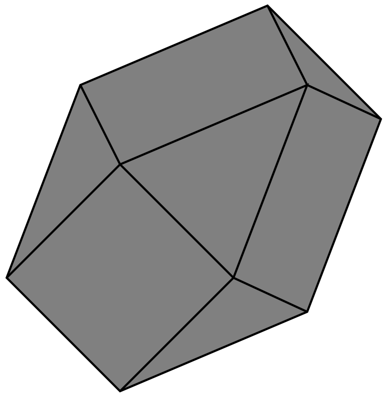
   b. Construire les deux points de distance s et t.
2. **a.** Construire l'image i du milieu I du segment [CG].

   b. Construire l'image j du milieu J du segment [BC].

   c. Proposer une vérification de la construction du point j.

   d. Terminer le dessin des carrés figurant sur les deux faces apparentes du cube.

PARTIE B



Dans un jeu de société, on utilise un dé qui est un solide obtenu en sectionnant un cube, à partir du schéma de la partie A.
Ce dé possède six faces carrées, numérotées de 1 à 6, et huit faces triangulaires, numérotées de 1 à 8.
Le premier joueur lance le dé et il ne peut entamer la partie que si le dé tombe sur une face portant le numéro 6. On considère que, lorsqu'on lance ce dé, la probabilité qu'il tombe sur une face carrée est $\frac{4}{5}$ et la probabilité qu'il tombe sur une face triangulaire est $\frac{1}{5}$.
De plus, on suppose que tous les numéros des faces carrées ont la même probabilité d'apparition et que tous les numéros des faces triangulaires ont la même probabilité d'apparition. On note C l'évènement « le dé tombe sur une face carrée » et T l'évènement « le dé tombe sur une face triangulaire ». On a donc les probabilités suivantes : $p(\text{C}) = \frac{4}{5}$ et $p(\text{T}) = \frac{1}{5}$.
On note S l'évènement « le dé tombe sur une face portant le numéro 6 »et $\overline{\text{S}}$ l'évènement contraire de S.
Tous les résultats demandés dans cette partie seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1. Compléter l'arbre pondéré figurant sur la feuille annexe 2, à rendre avec la copie.
2. **a.** Déterminer la probabilité $p(\text{S} \cap \text{C})$ de l'évènement $\text{S} \cap \text{C}$.
   b. Déterminer la probabilité $p(\text{S})$ de l'évènement S.
3. Sachant que le premier joueur a obtenu un 6, quelle est la probabilité que le dé soit tombé sur une face carrée ?
4. Soit H l'évènement « le dé tombe sur une face portant le numéro 8 », calculer la probabilité de H.

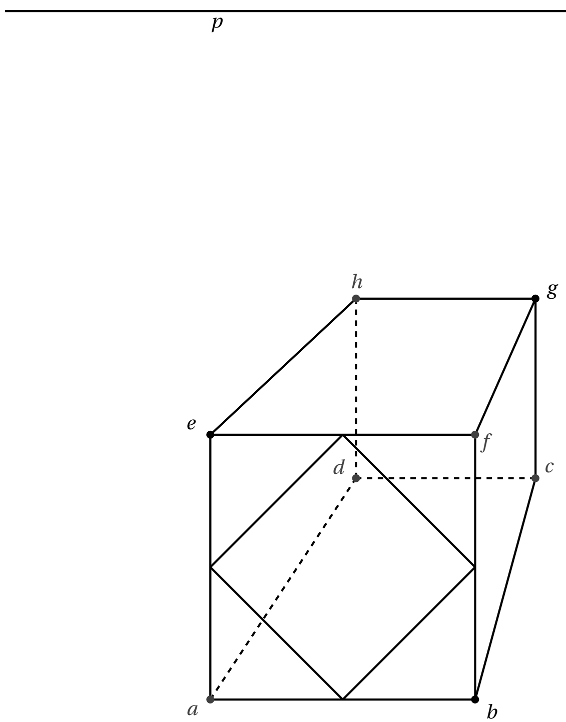
EXERCICE 3 **6 points**

Pour tout entier naturel n, on pose : $A(n) = n^2 - n + 2007$.
Le but de l'exercice est d'étudier la divisibilité des entiers $A(n)$ par 2 et par 3.

Cet exercice est composé de deux questions indépendantes

1. **a.** Donner la décomposition en produit de facteurs premiers du nombre $A(1)$ égal À 2007.
   b. Soit n un entier naturel. Démontrer que : « Si n est divisible par 3, alors $A(n)$ est divisible par 3 ».
   c. La réciproque de cette dernière affirmation est-elle vraie ? Justifier.
2. **a.** Vérifier que, quel que soit l'entier naturel n, on a :
   $$(n+1)^2 - (n+1) + 2007 = (n^2 - n + 2007) + 2n.$$
   b. On considère un entier naturel n quelconque. Démontrer que : « Si $A(n)$ est impair, alors $A(n+1)$ est impair ».
   c. L'affirmation suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier.
   « Il existe au moins un entier naturel n tel que $A(n)$ soit divisible par 2 ».

Annexe 1 : à rendre avec la copie



20 La Réunion septembre 2007

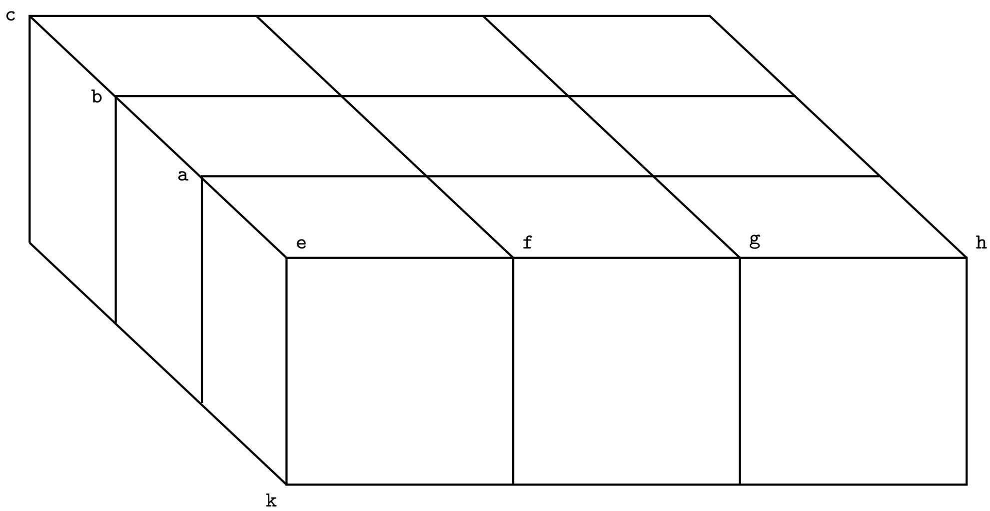
Ce sujet nécessite une feuille de papier millimétré

EXERCICE 1 **5 points**

Dans tout l'exercice on utilisera une lettre majuscule pour noter un point de l'espace et une lettre minuscule pour noter une représentation plane de ce point. Par exemple : `a` représente le point A.

Les dessins donnés dans les annexes 1 et 1 bis sont à compléter et à rendre avec la copie. Aucune justification n'est attendue dans les constructions mais on laissera apparents les traits de construction.

Le dessin ci-dessous est une représentation en perspective centrale de neuf cubes ayant tous les mêmes dimensions. Les points `e, a, b, c, f, g, h` et `k` représentent les sommets E, A, B, C, F, G, H et K.



Ces neuf cubes sont sur un plan horizontal. Dans cette représentation le plan de projection est tel que le plan KEH est un plan frontal.

1. Dans le dessin N°1 donné en annexe 1 , les points `e, a, f` et `k` représentent les points E, A, F et K dans une perspective parallèle.
   Compléter ce dessin N°1 par la représentation en perspective parallèle des neuf cubes.
2. Dans le dessin N°2 donné en annexe 1, les points `e, a, f` et `k` représentent les points E, A, F et K dans une perspective centrale.
   La droite δ est la ligne d'horizon, `w` le point de fuite de la droite (EA) et `w`$'$ le point de fuite de la droite (EF). On sait de plus que (EK) et (AF) sont situées dans des plans frontaux.
   Compléter ce dessin N°2 par la représentation en perspective centrale des neuf cubes.
3. Dans le dessin N°3 donné en annexe 1 bis , les points `e, a, f` et `k` sont des représentations des points E, A, F et K.
   Sur ce dessin sont représentés une droite δ et deux points `v` et `v`$'$ de cette droite.
   Les points `b` et `c` sont construits sur le segment [`ev`] de sorte que les distances `ea`, `ab` et `bc` soient les premiers termes de la suite géométrique de premier terme 2 et de raison 0,6.
   Les points `f, g` et `h` placés sur le segment [`ev`$'$]sont tels que `ef` = `ea`, `eg` = `eb` et `eh` = `ec`.
   a. Calculer `ab` et `bc`.
   b. Compléter le dessin N°3 par le tracé des droites (`vf`), (`vg`), (`vh`), (`v`$'$`a`), (`v`$'$`b`), (`v`$'$`c`).
   En partant d'observations graphiques, montrer que le quadrillage obtenu ne représente pas, en perspective centrale, la face supérieure des neuf cubes.

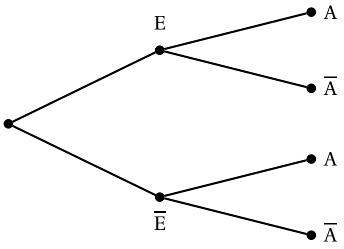
EXERCICE 2 **3 points**

Dans ce QCM, il s'agit de recopier sur la copie chacune des trois affirmations proposées en la complétant par la réponse choisie.
Un seul choix est correct. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse juste vaut un point, une réponse fausse enlève un quart de point, l'absence de réponse est notée 0. *Si le total des points obtenus sur cet exercice est négatif ou nul, la note zéro est attribuée à l'exercice.*

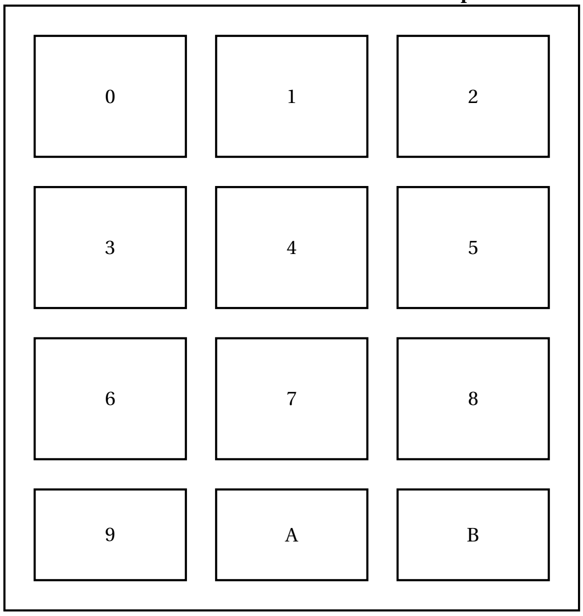
L'arbre suivant représente les données d'un exercice de probabilité. La probabilité d'un évènement H est notée P(H).

On sait que $P(\text{E}) = 0,3$; $P_{\text{E}}(\text{A}) = 0,1$ et $P(\overline{\text{E}} \cap A) = 0,14$.



1. La probabilité de $E \cap A$ est égale à :
   a. 0,4 **b.** 0,03 **c.** 0,33 **d.** 0,1.
2. La probabilité de A sachant $\overline{E}$ est égaie à :
   a. 0,7 **b.** 0,14 **c.** 0,2 **d.** 1,1.
3. La probabilité de A est égale à :
   a. 0,42 **b.** 0,3 **c.** 0,042 **d.** 0,17.

EXERCICE 3 **6 points**



Une entreprise de recyclage récupère un lot de digicodes ayant tous un clavier identique à celui représenté ci-contre.
Chacun de ces digicodes a été programmé pour fonctionner avec **un code** constitué de deux signes choisis parmi les douze figurant sur ce clavier.
Par exemple A0, BB, 43 sont des codes possibles.
Pour remettre en état de fonctionnement un tel digicode, il faut retrouver **son code**.

Pour faciliter une telle recherche, a été inscrit sur le boîtier de chaque digicode un nombre R qui dépend du code. Ce nombre a été obtenu de la manière suivante :

- Le code est considéré comme un nombre écrit en base 12. A est le chiffre dix et B le chiffre 11.
- Le nombre R inscrit sur le boîtier est le reste de la division euclidienne du code, converti en base 10, par 53. R est donc un nombre écrit en base 10 et tel que $0 \leqslant R \leqslant 53$.

1. Combien y a-t-il de codes possibles ?
2. On suppose que le code d'un digicode est AB.
   a. Écrire en base 10 le nombre dont l'écriture en base 12 est $(AB)_{\text{douze}}$.
   b. Déterminer le nombre R inscrit sur le boîtier de ce digicode.
3. Sur le boîtier d'un digicode est inscrit le nombre R égal à 25. Démontrer que $(21)_{\text{douze}}$ peut être le code de ce digicode.
4. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	R un entier naturel.
Initialisation :	L liste vide ;
	$n = 0$.
Traitement :	Tant que $53n + R \leqslant 143$, mettre dans la liste L la valeur de $53n+$ R puis ajouter 1 à n.
Sortie :	Afficher la liste L.

   a. Faire fonctionner cet algorithme pour $R = 25$.
   b. On suppose que le nombre R inscrit sur le boîtier d'un digicode est R 25. Quels sont les trois codes possibles de ce digicode ?
5. Dire si l'affirmation suivante est vraie ou fausse. Si l'affirmation est considérée comme étant fausse, en apporter la preuve.
   Affirmation : quelle que soit la valeur de R l'algorithme permet de trouver trois codes parmi lesquels se trouve le code secret.

EXERCICE 4 **6 points**

Des pucerons envahissent une roseraie. Des coccinelles, prédateurs des pucerons, sont introduites dans cette roseraie. Au bout de vingt jours, on constate que le nombre des pucerons peut être estimé à 770, soit 0,77 milliers.
On s'intéresse à l'évolution du nombre des pucerons (exprimé en milliers) présents dans la roseraie en fonction de la durée écoulée depuis l'introduction des coccinelles. On note f cette fonction et t cette durée. L'unité de durée est un jour. Lorsque l'on introduit les coccinelles, on a donc $t = 0$.

1. Des études ont montré que le nombre des pucerons (exprimé en milliers) en fonction de la durée t écoulée depuis l'introduction des coccinelles, était modélisé par la fonction f définie, pour tout nombre réel t élément de $[0\,;20]$, par :

$$f(t) = (2t+2)\mathrm{e}^{-kt},\text{ où } k \text{ est un nombre réel positif constant.}$$

   a. Quel est le nombre de pucerons au moment où les coccinelles sont introduites dans cette roseraie ?

b. Déterminer la valeur exacte de k puis l'une de ses valeurs approchées au millième près.
Dans toute la suite de l'exercice, on considère que la fonction f définie pour tout nombre réel t élément de $[0\,;\,20]$ par $f(t) = (2t+2\mathrm{e}^{-0,2t}$, représente correctement l'évolution du nombre des pucerons en fonction de la durée t. On note f' la fonction dérivée de f et $(\mathscr{C}_f)$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

2. **a.** Démontrer que, pour tout nombre réel t de $[0\,;\,20]$,
$f'(t) = (-0,4t+1,6)\mathrm{e}^{-0,2t}$.

b. Combien de jours après, l'introduction des prédateurs le nombre des pucerons va-t-il commencer à diminuer ?

c. Calculer $f'(0)$. Utiliser ce nombre dérivé pour calculer, sans utiliser de calculatrice, une approximation du nombre des pucerons présents dans la roseraie au bout d'un jour.

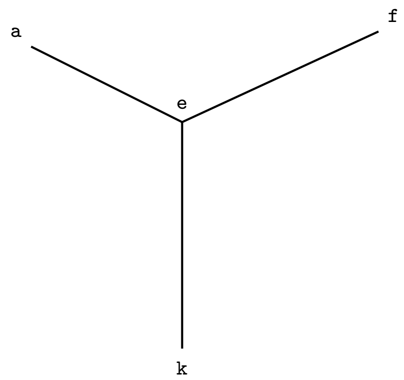
3. Le graphique donné en annexe 2 est un dessin de $(\mathscr{C}_f)$. **Ce graphique est à compléter et à rendre avec la copie.**

a. À l'aide des informations données ou obtenues précédemment, placer les unités du repère.

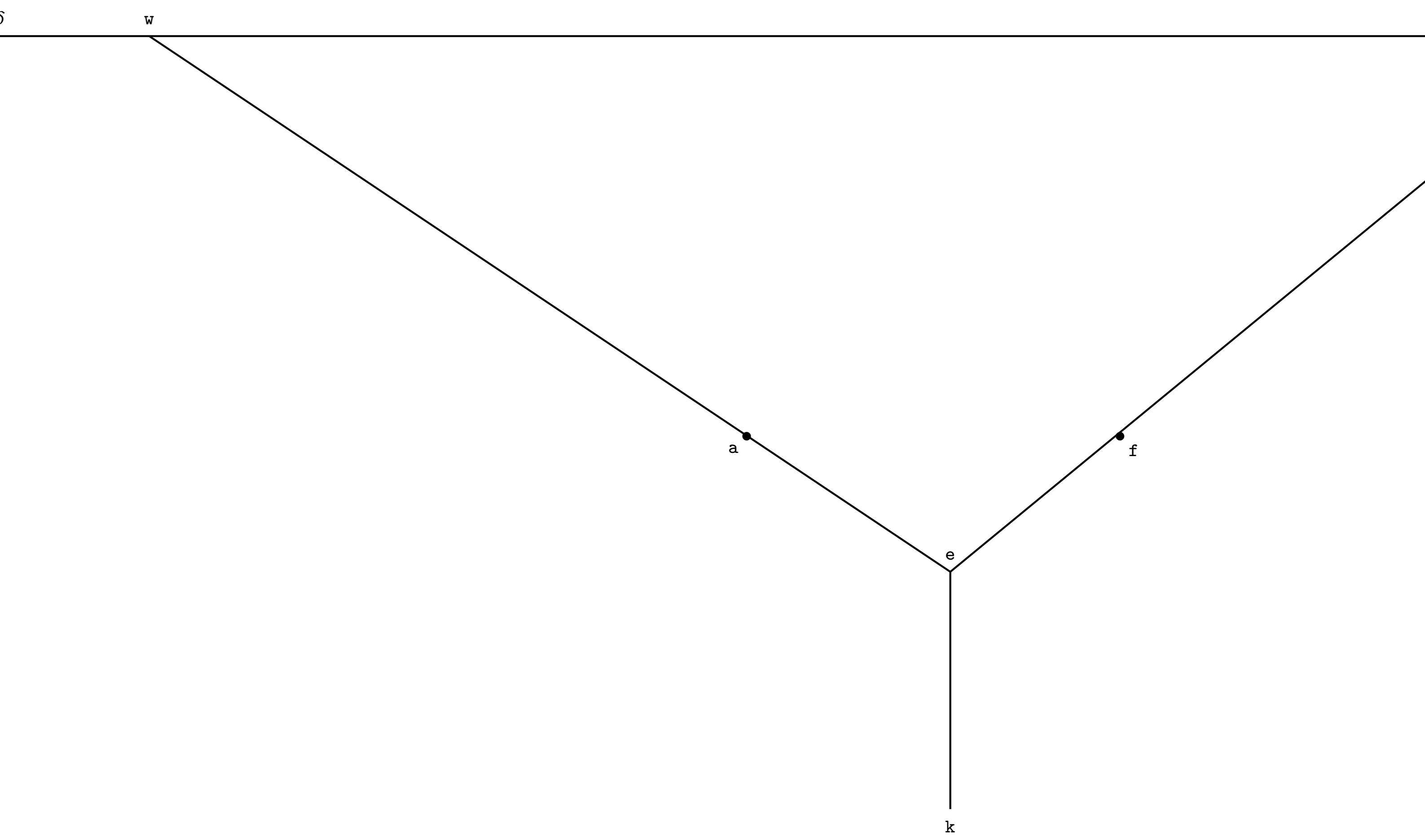
b. On estime que les pucerons ne posent plus de problème dès que leur nombre est devenu inférieur à 1000. Lire graphiquement au bout de combien de jours ce seuil sera atteint.
Laisser apparents les trails de construction utilisés pour cette lecture.

ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)

Dessin N°1 exercice 1

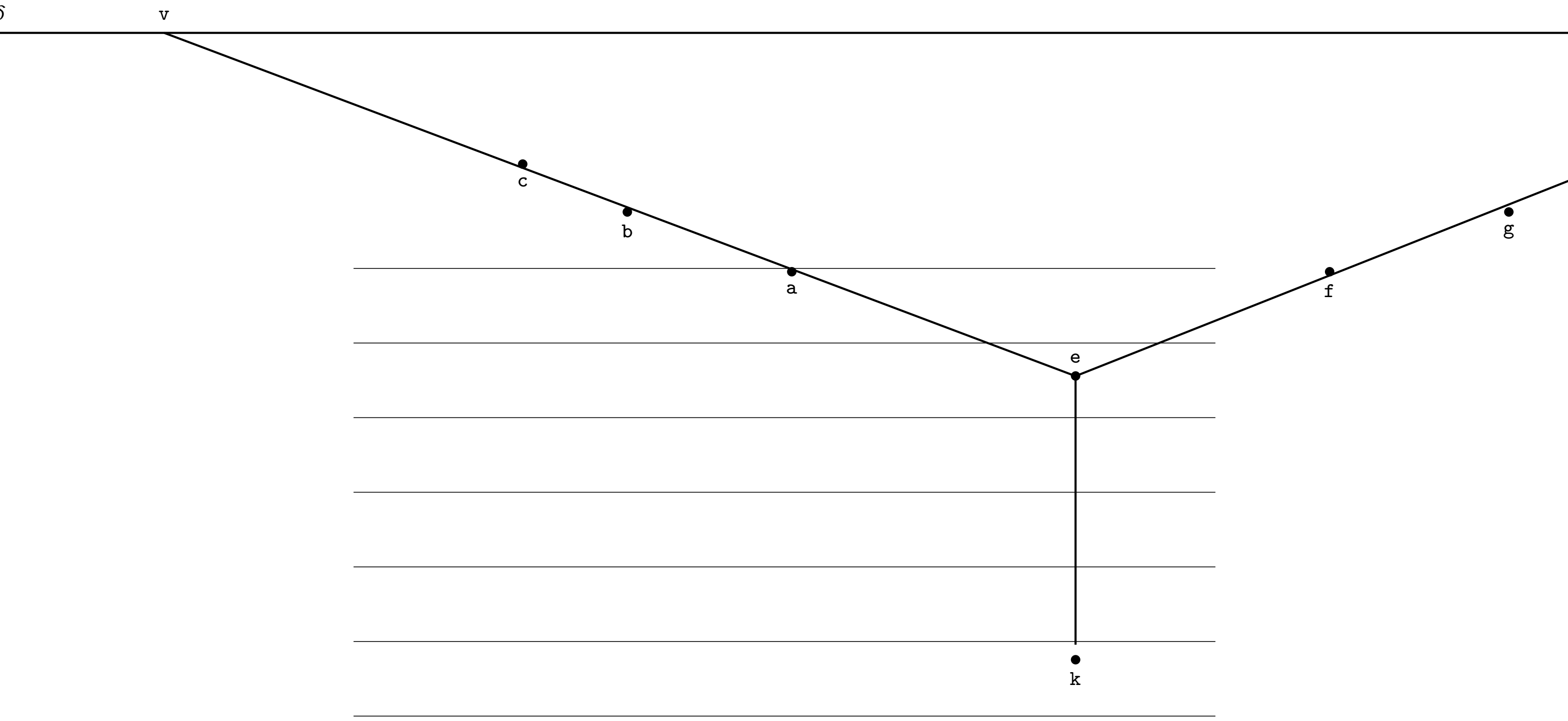


Dessin N°2 exercice 1



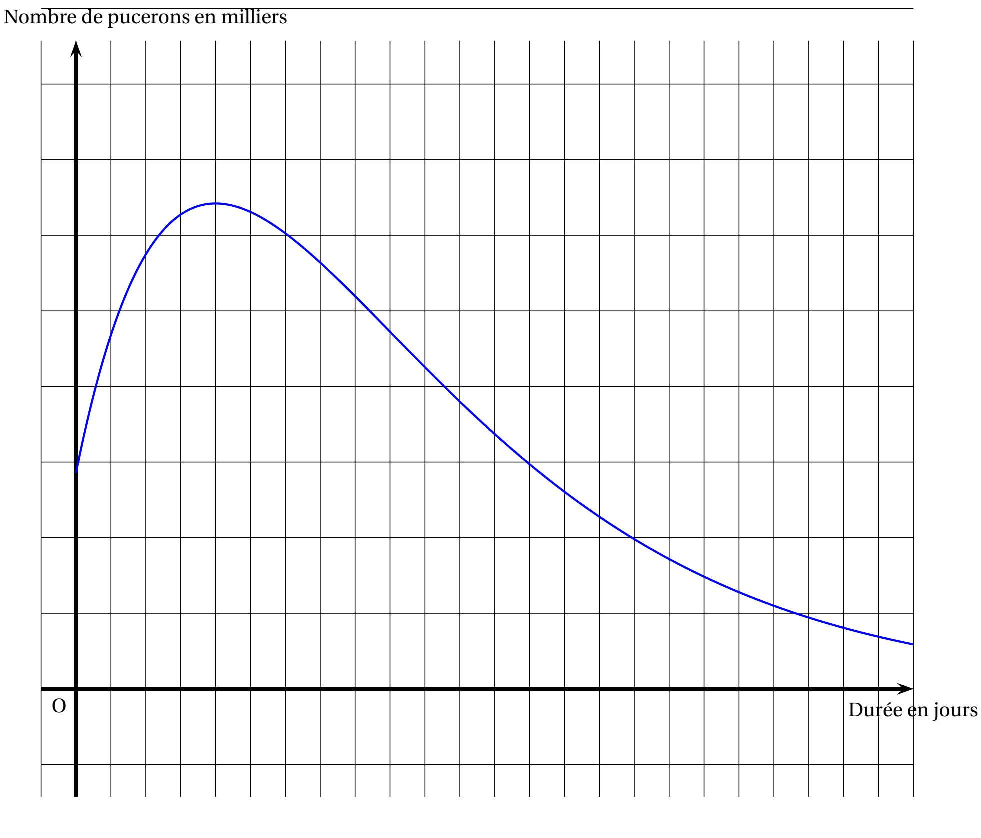
ANNEXE 1 bis (à rendre avec la copie)

Dessin N°3 exercice 1



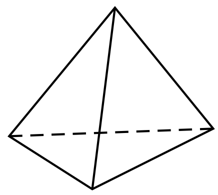
ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)

Courbe de l'exercice 4



21 La Réunion juin 2008

EXERCICE 1 **5 points**



On dispose d'un dé tétraédrique, bien équilibré, dont les quatre faces sont numérotées 1, 2, 3 et 4.
On dispose aussi de trois urnes :

- l'urne A contient une boule noire et trois boules rouges,
- l'urne B contient deux boules noires et deux boules rouges,
- l'urne C contient une boule noire et deux boules rouges.

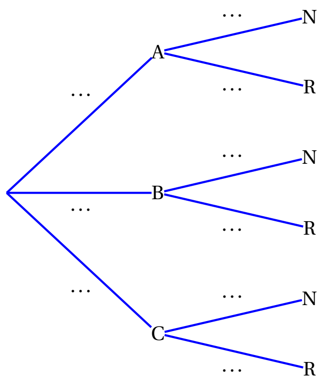
On lance le dé et on note le numéro inscrit sur la face posée sur laquelle il s'immobilise.

Si le numéro est pair, on tire au hasard une boule dans A.
Si le numéro est 1, on tire au hasard une boule dans B.
Si le numéro est 3, on tire au hasard une boule dans C.

On appelle :

A l'évènement « la boule tirée provient de A » ;
B l'évènement « la boule tirée provient de B » ;
C l'évènement « la boule tirée provient de C » ;
N l'évènement « la boule tirée est noire » et
R l'évènement « la boule tirée est rouge ».

1. Reproduire sur la copie et compléter, en indiquant les probabilités relatives À chaque branche, l'arbre de probabilité ci-dessous :



2. Calculer la probabilité $p(\mathrm{C} \cap \mathrm{N})$.
3. Montrer que $p(\mathrm{N}) = \dfrac{1}{3}$.
4. Déterminer la probabilité d'avoir obtenu le numéro 3 avec le dé sachant que la boule tirée est noire.
5. Les évènements N et C sont-ils indépendants ?

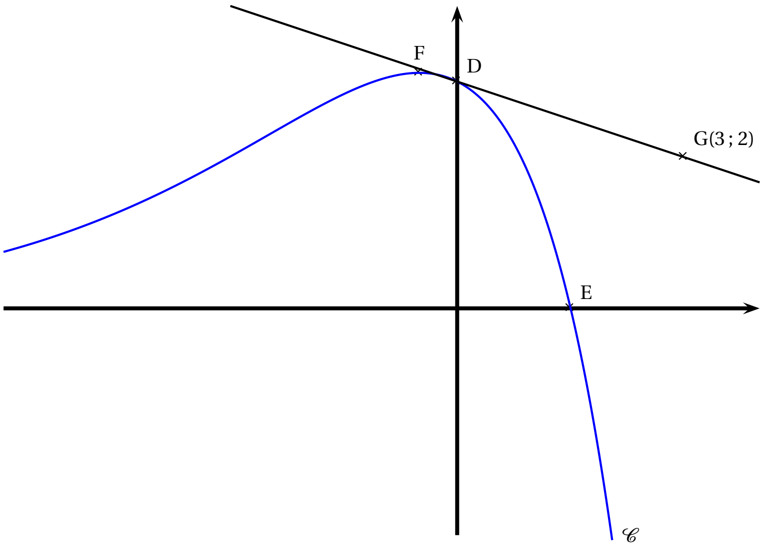
EXERCICE 2 **5 points**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = (3-2x)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}.$$

On appelle $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
On note f' la fonction dérivée de f.

1. Calculer la valeur exacte de $f(0)$, de $f(-2)$ et de $f(2)$. Donner, dc plus, une valeur arrondie à 10^{-2} près si nécessaire.
2. Montrer que, pour tout x appartenant À $\mathbb{R}$, $f'(x) = \left(-\dfrac{1}{2} - x\right)\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$.
3. En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.
4. Un dessin de la courbe $\mathscr{C}$ est donné ci-dessous. Les unités ont été effacées. Le point D est l'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des ordonnées et le point E est l'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe des abscisses. Le point F est le point de $\mathscr{C}$ d'ordonnée maximale.



a. Donner la valeur exacte des coordonnées des points D, E et F.

b. Soit G le point de coordonnées(3 ; 2). La droite (DG) est-elle tangente À $\mathscr{C}$ en D ? Justifier la réponse.

EXERCICE 3 — 4 points

Dans un lycée, un code d'accès À la photocopieuse est attribué À chaque professeur. Ce code est un nombre À quatre chiffres choisis dans la liste $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, chaque chiffre pouvant être répété À l'intérieur d'un même code.
Par exemple 0027 et 5855 sont des codes possibles.

1. Combien de codes peut-on ainsi former ?
2. Ce code permet aussi de définir un identifiant pour l'accès au réseau informatique. l'identifiant est constitué du code À quatre chiffres suivi d'une clé calculée À l'aide de l'algorithme suivant :

Entrée :	N est le code À quatre chiffres.	
Initialisation :	Affecter À P la valeur de N ;	
	Affecter À S la valeur 0 ;	
	Affecter À K la valeur 1.	
Traitement :	Tant que $K \leqslant 4$:	
		Affecter À U le chiffre des unités de P ;
		Affecter À K la valeur $K + 1$;
		Affecter À S la valeur $S + K \times U$;
		Affecter À P la valeur $\dfrac{P - U}{10}$;
	Affecter À R le reste dans la division euclidienne de S par 7 ;	
	Affecter À C la valeur $7 - R$.	
Sortie « la clé » :	Afficher C.	

a. Faire fonctionner l'algorithme avec N = 2282 et vérifier que la clé qui lui correspond est 3. On prendra soin de faire apparaître les différentes étapes du déroulement de l'algorithme (on pourra par exemple faire un tableau.).

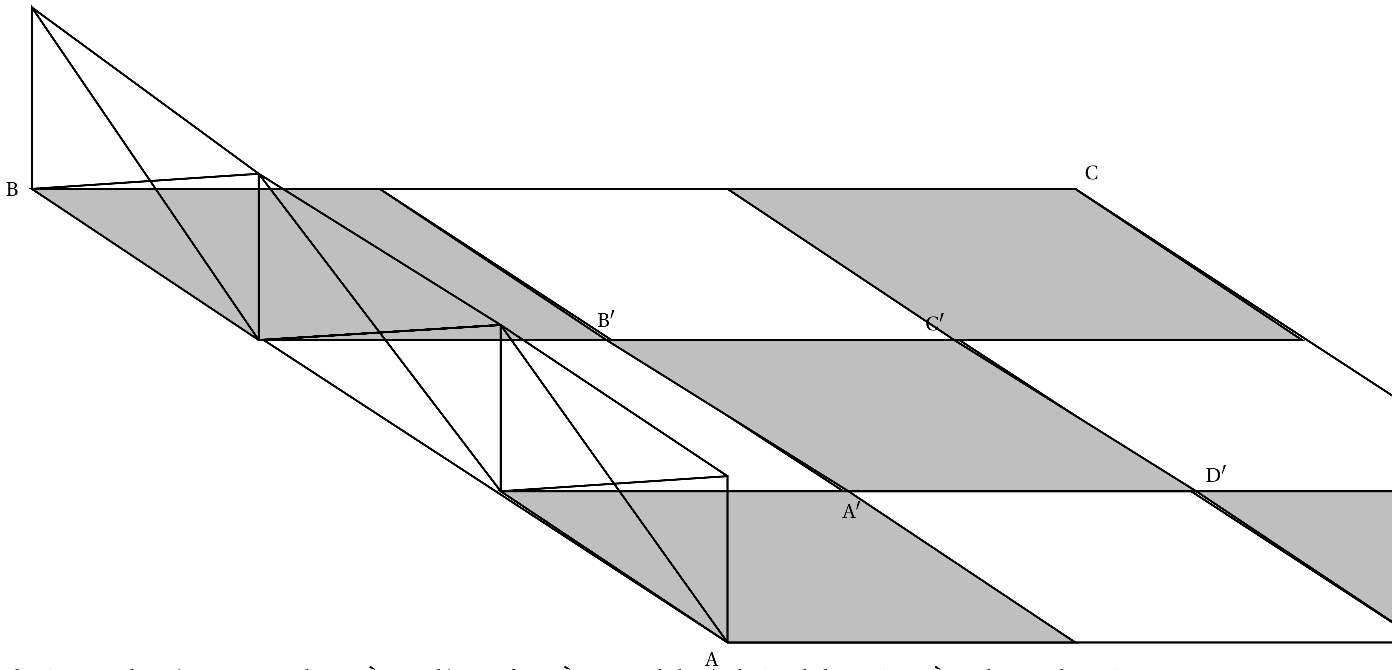
b. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Un professeur s'identifie sur le réseau informatique en entrant le code 4732 suivi de la clé 7.

L'accès au réseau lui est refusé. Le professeur est sûr des trois derniers chiffres du code et de la clé, l'erreur porte sur le premier chiffre du code (qui n'est donc pas égal À 4). Quel est ce premier chiffre ?

EXERCICE 4 — 6 points

Le dessin ci-dessous est la représentation en perspective parallèle d'une sortie d'école séparée de la rue par une rambarde de protection et éclairée par un lampadaire.

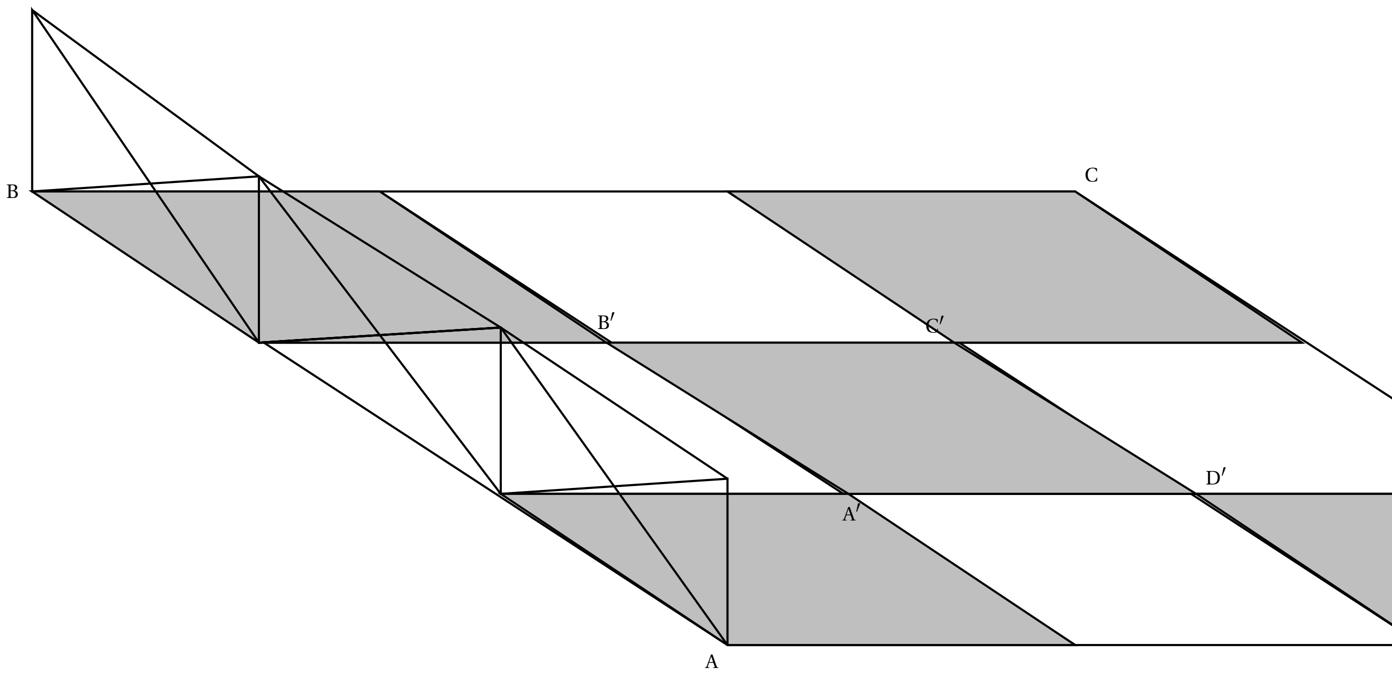


Deux dessins sont donnés en annexe. Ils sont À compléter au fur et À mesure de la résolution de l'exercice et À rendre avec la copie.
On veillera À laisser apparents les traits de construction.

1. Compléter la représentation en perspective parallèle donnée dans le dessin N° 1 par l'ombre de la rambarde sur le sol, la source lumineuse (S) étant supposée ponctuelle. On repassera en couleur le dessin fini de l'ombre de la rambarde pour améliorer la lisibilité de la représentation.
2. Dans le dessin N° 2 les points a′, b′, c′, d′ représentent en perspective centrale les sommets A′, B′, C′ et D′ du carré situé au cœur du motif des neufs carrés recouvrant ABCD. On a tracé la ligne d'horizon, le point de fuite principal F et les points de distance D1 et D2. La diagonale [b′d′] est parallèle À la ligne d'horizon.
   a. On souhaite contrôler certains aspects de ce dessin. Expliquer comment vérifier que :
      i. a′b′c′d′ représente un quadrilatère, d'un plan horizontal, ayant ses côtés parallèles deux À deux.
      ii. a′b′c′d′ représente un quadrilatère, d'un plan horizontal, ayant ses diagonales perpendiculaires.
   b. Terminer le dessin en représentant les huit carrés entourant A′B′C′D′. On repassera en couleur le dessin fini des huit carrés pour améliorer la lisibilité de la représentation.

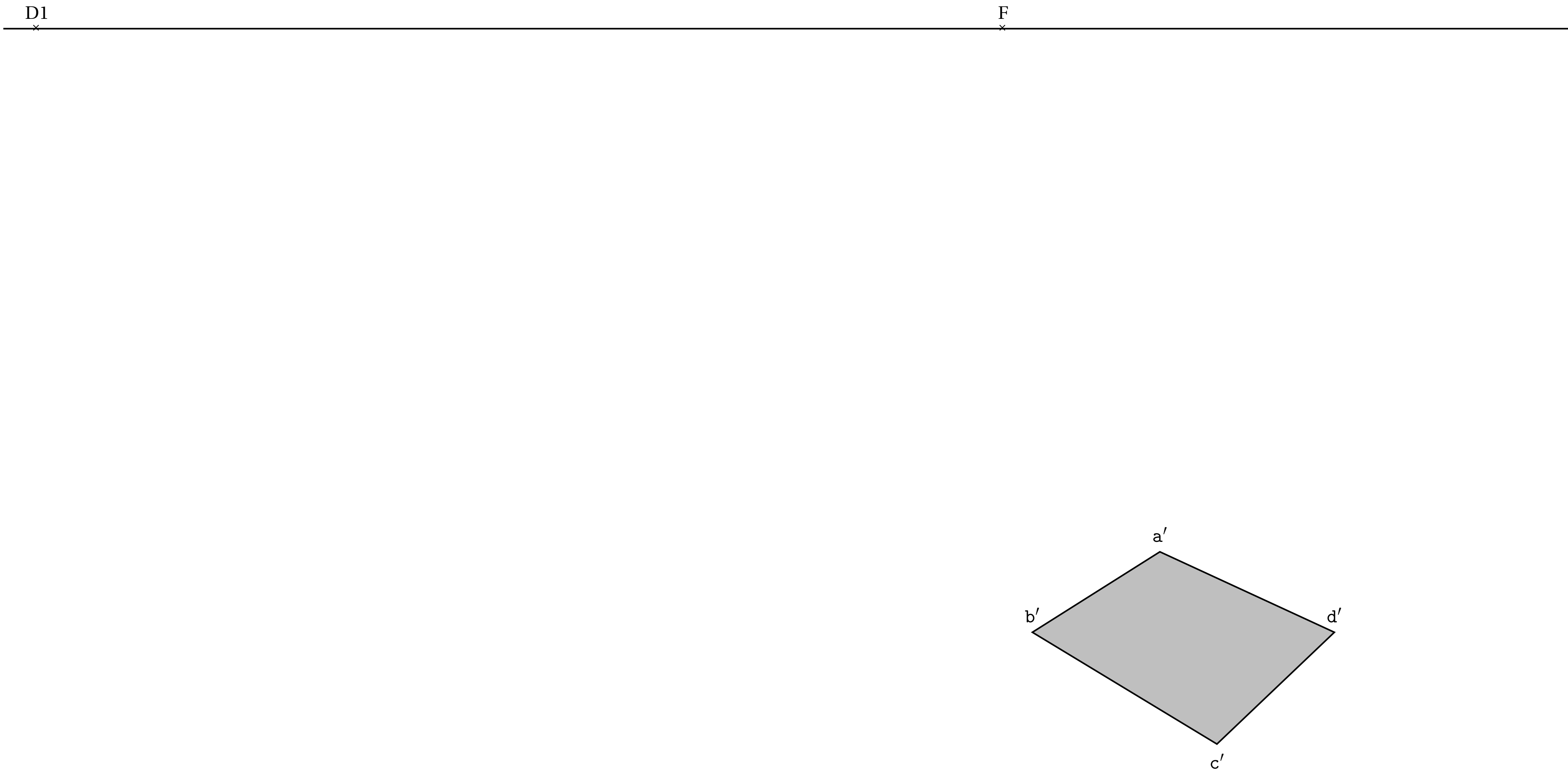
ANNEXE

Dessin N° 1
à compléter et à rendre avec la copie



ANNEXE

Dessin No 2
à compléter et à rendre avec la copie



22 Polynésie juin 2008

EXERCICE 1 **4 points**

Pour un jeu, on dispose de deux urnes.
La première urne contient 6 boules indiscernables au toucher. Sur chacune de ces boules est écrite une lettre, les 6 lettres permettant de reconstituer le prénom MARGOT.
La seconde urne contient 7 boules indiscernables au toucher. Sur chacune de ces boules est écrite une lettre, les 7 lettres permettant de reconstituer le prénom JUSTINE.
Le jeu se déroule en deux étapes :
Étape 1 : On prend au hasard une boule de la première urne et on regarde la lettre tirée.
Étape 2 :

> - Si la lettre tirée est une voyelle, on tire au hasard la deuxième boule dans la première urne, **la première boule tirée n'étant pas remise en jeu**. On regarde la seconde lettre tirée.
> - Si la lettre tirée est une consonne, on tire au hasard la deuxième boule dans la deuxième urne. On regarde la seconde lettre tirée.

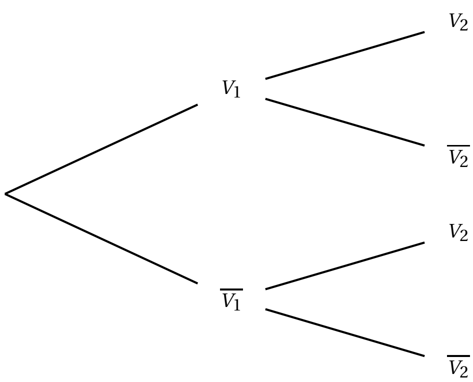
On considère les deux évènements :

- V_1 « la première lettre tirée est une voyelle » ;
- V_2 « la deuxième lettre tirée est une voyelle ».

1. Calculer la probabilité que la première lettre tirée soit une voyelle.

2. Calculer la probabilité que la deuxième lettre tirée soit une voyelle sachant que la première est une consonne.

3. Reproduire et compléter l'arbre suivant :



4. Montrer que la probabilité que la deuxième lettre tirée soit une voyelle est $\frac{37}{105}$.

5. On suppose que la deuxième lettre est une voyelle.
Quelle est la probablilité que la première lettre tirée soit une voyelle ?

EXERCICE 2 **6 points**

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}$ pour tout nombre réel x de $[0\,;\,+\infty[$.
on note (C) sa courbe représentative dans le repère (Ox, Oy).

1. Calculer $f(0)$ et justifier que $f(\ln 3) = 0{,}8$.

2. a) On note f' la fonction dérivée de f. Démontrer que pour réel x positif, $f'(x) = \dfrac{4e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$.

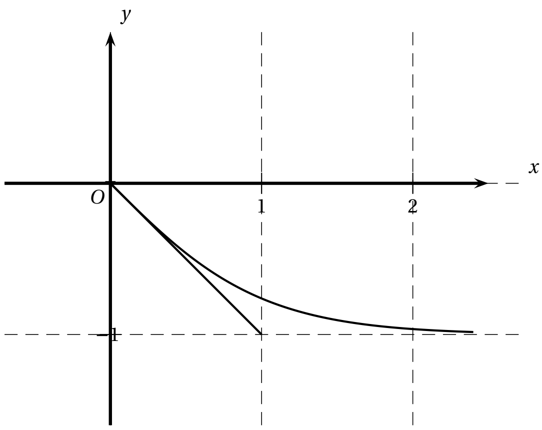
b) Déterminer le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

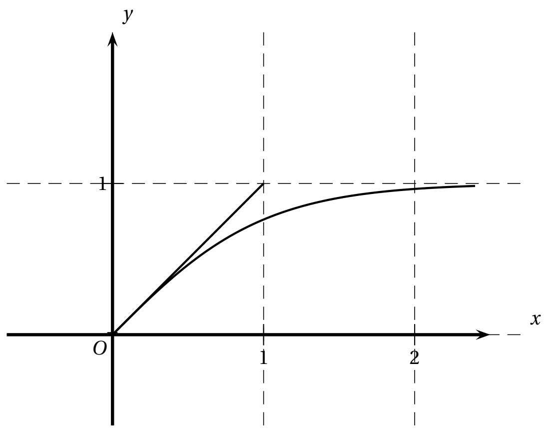
c) Calculer $f'(0)$, puis donner une équation de la tangente (Δ) À la courbe (C) au point d'abscisse 0.

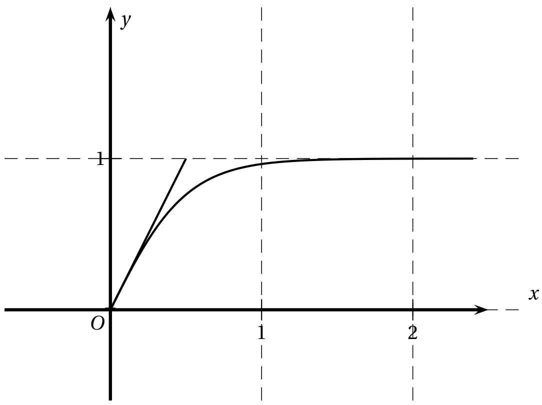
3. a) Établir que, pour tout nombre réel x positif, $f(x) - 1 = \dfrac{-2}{e^{2x}+1}$.

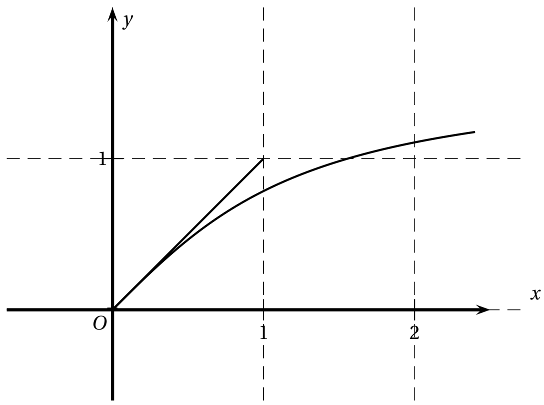
b) En déduire que, pour tout nombre réel x positif, $f(x) < 1$.

4. Les quatre graphiques ci-dessous ont été obtenus À l'aide d'un logiciel informatique.
Parmi ces quatre graphiques, un seul peut représenter la courbe (C) et la tangente (Δ).
Préciser quel est ce graphique et justifier soigneusement l'élimination de chacun des trois autres graphiques.



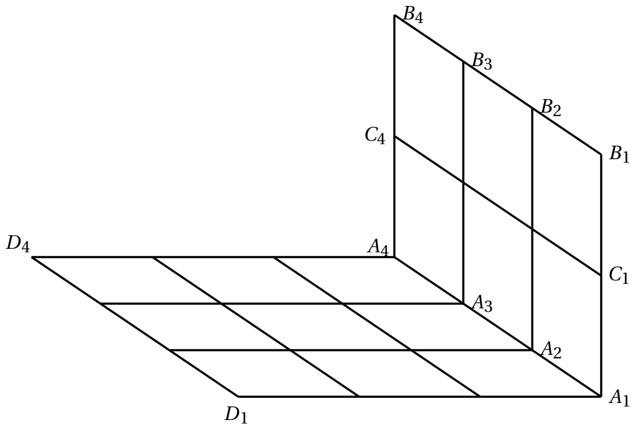






EXERCICE 3 **6 points**

La figure ci-dessous représente, en perspective cavalière, le sol $(A_1A_4D_4D_1)$ et le mur de droite $(A_1B_1B_4A_4)$ d'une salle. Le mur et le sol sont pavés avec des carrelages identiques de forme carrée.



Le but de l'exercice est de représenter sur l'annexe ce carrelage en perspective centrale sachant que le sol est horizontal, le mur est vertical et le plan $(D_1A_1B_1)$ est frontal.

Dans cette perspective centrale, on convient de noter avec une lettre minuscule les images des points. Ainsi, a_1 est l'image de A_1, a_2 l'image de A_2, ...

On a représenté sur la feuille annexe la ligne d'horizon, le segment $[a_1b_1]$ et le point a_3.

Aucune justification des constructions n'est attendue, mais on laissera apparents tous les traits de construction.

1. a) Construire le point de fuite de la droite (A_1A_3), noté f, et le point b_3.
   b) Construire le segment $[a_2b_2]$.
   c) Construire le point c_1.
   d) Construire le segment $[a_4b_4]$.
2. a) Préciser, en justifiant la réponse, le réel k tel que $a_1d_1 = ka_1c_1$.
   b) Construire le point d_1.
   c) Terminer la figure.
3. Pour chacune des trois affirmations ci-dessous dire, en justifiant la réponse donnée, si elle est vraie ou fausse.
   En cas de réponse négative, on pourra fournir un contre-exemple issu de la figure complétée en annexe.
   a. Le plan $(A_4B_4D_4)$ est frontal.
   b. En perspective centrale, les milieux sont toujours conservés.
   c. En perspective centrale, les milieux ne sont jamais conservés.

EXERCICE 4 **4 points**

Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre entier 3^{2008} dont certaines ne peuvent être obtenues À l'aide d'une calculatrice.

Partie A : Chiffre des unités de 3^{2008}

1. Justifier que $3^8 \equiv 1 \mod 10$. En déduire que $3^{2008} \equiv 1 \mod 10$.
2. Quel est le chiffre des unités de 3^{2008} ?

Partie B : Nombre de chiffres de 3^{2008}

Dans cette partie, log désigne la fonction logarithme décimal.

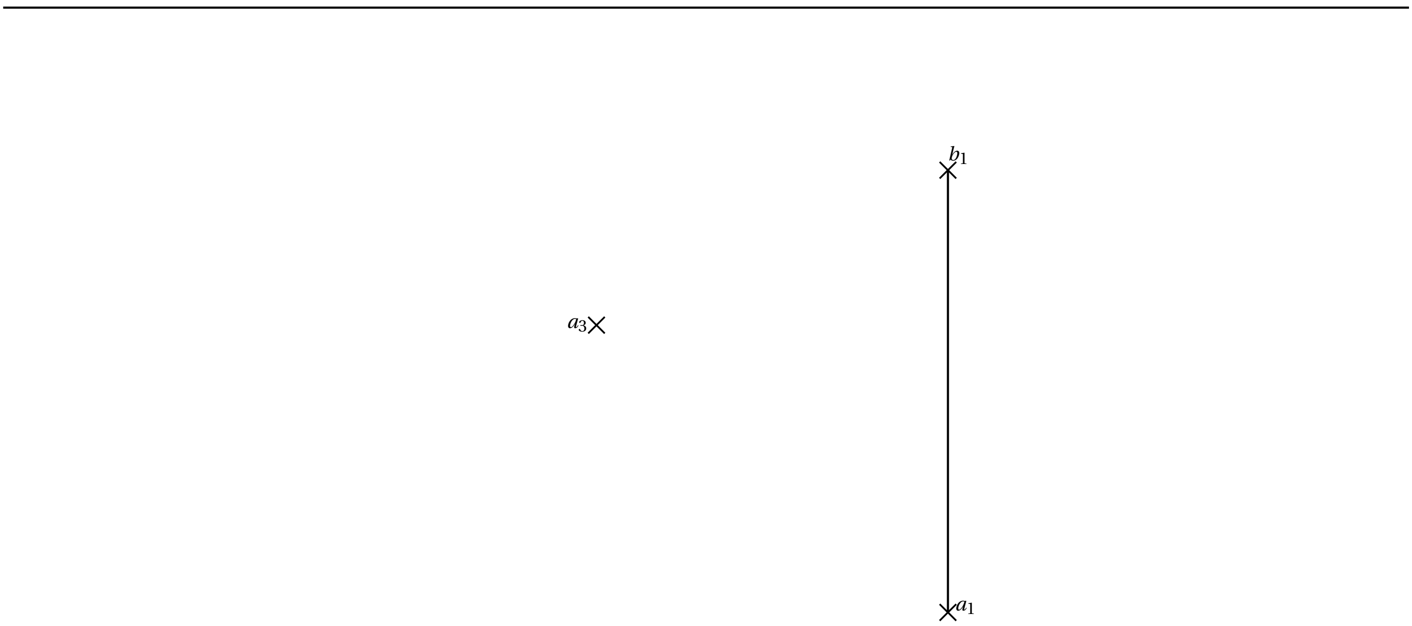
On pourra utiliser les propriétés suivantes :

* $\log a^n = n \times \log a$, pour tout nombre réel a strictement positif et tout nombre entier n.
* $\log 10 = 1$
* La fonction log est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.

1. Sachant que $0,4771 < \log 3 < 0,4772$, justifier l'encadrement $958 < \log\left(3^{2008}\right) < 959$.
2. Calculer $\log\left(10^{958}\right)$ et $\log\left(10^{959}\right)$.
3. Déduire des questions précédentes l'encadrement $10^{958} < 3^{2008} < 10^{959}$.
4. Expliquer comment on peut déduire de l'inégalité précédente le nombre de chiffres de l'écriture décimale du nombre entier 3^{2008}.

ANNEXE (À rendre avec la copie)

EXERCICE 3



23 La Réunion septembre 2008

Ce sujet ne nécessite pas de papier millimétré

EXERCICE 1 **4 points**

Un magasin de matériels informatiques propose deux types d'ordinateurs : des ordinateurs de bureau et des ordinateurs portables.

Une enquête sur le type des ordinateurs achetés permet d'affirmer que, dans ce magasin :

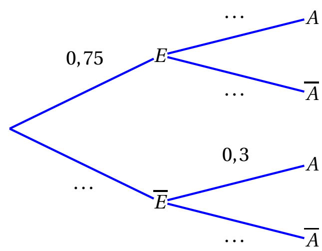
- 75 % des acheteurs d'ordinateurs sont des étudiants,
- 60 % des acheteurs étudiants choisissent un ordinateur portable,
- 30 % des acheteurs non étudiants choisissent un ordinateur portable.

On interroge au hasard une personne ayant acheté un ordinateur dans ce magasin.

On note E l'évènement « La personne interrogée est un étudiant » et A l'évènement « La personne interrogée a choisi un ordinateur portable ».

On note $\overline{A}$ l'évènement contraire de A et $\overline{E}$ l'évènement contraire de E.

1. Reproduire sur la copie l'arbre de probabilités ci-dessous et le compléter. Aucune justification n'est demandée.



2. **a.** Calculer $P(E \cap A)$ et $P\left(\overline{E} \cap A\right)$.

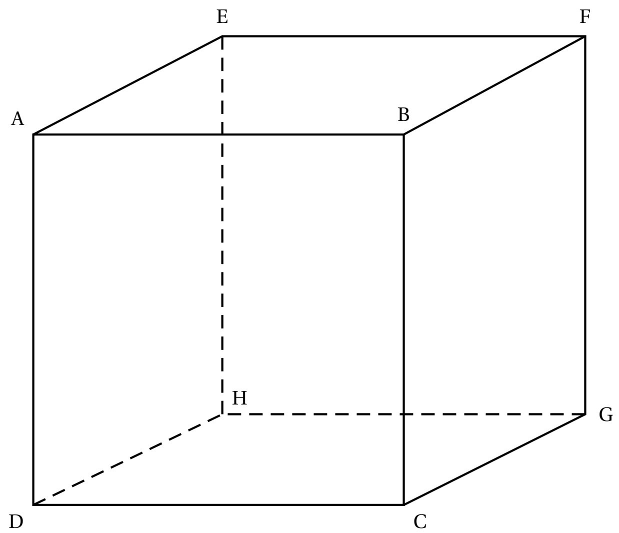
b. En déduire $P(A)$.

c. Déterminer la probabilité pour que la personne interrogée ait choisi un ordinateur de bureau.

3. Un acheteur sort du magasin avec un portable. Quelle est la probabilité que ce soit un étudiant ?
On donnera l'arrondi À 10^{-3} près de cette probabilité.

EXERCICE 2 **5 points**

Le dessin ci-dessous représente un cube ABCDEFOH en perspective parallèle



Dans tout l'exercice, on s'intéressera À des représentations de ce cube en perspective centrale.
Ce cube sera toujours placé de telle sorte que la face ABCD soit dans un plan frontal et l'arête [AB] soit horizontale.

Pour chaque question, un dessin est donné en annexe. Ce dessin est à compléter et À rendre avec la copie. Laisser apparents les traits de construction.

1. Dans l'annexe N° 1, `abcdefgh` est une représentation du cube ABCDEFGH en perspective centrale. Faire des constructions permettant de contrôler que la droite (δ) est la ligne d'horizon.

2. Dans l'annexe N° 2, `a, b, c` et `d` représentent A, B, C et D en perspective centrale.
ω est le point de fuite principal et $\mathtt{d}_1$ un point de distance.

a. Terminer la représentation du cube dans cette perspective centrale.

b. Compléter le tableau de l'annexe N° 2 par VRAI ou FAUX. Aucune justification n'est attendue.

3. Les faces ABCD , ABFE et BCGF ont été quadrillées suivant un quadrillage 3×3 régulier. Dans le dessin donné en annexe N° 3, abcdefgh est une représentation du cube ABCDEFGH en perspective centrale, ω est le point de fuite principal et d_1 est un point de distance.

   Compléter le dessin par une représentation en perspective centrale du quadrillage des faces ABFE et BCGF.

EXERCICE 3 **6 points**

1. a. Déterminer le reste de la division euclidienne de 2^3 par 7.
   b. 2^3 et 2^6 sont-ils congrus modulo 7 ? Justifier la réponse.
   c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^{3n} \equiv 1$ (modulo 7). Que peut-on en déduire pour le reste de la division euclidienne de 2^{2007} par 7 ?
2. On considère l'algorithme suivant :

Entrée	:	n est un entier naturel.
Initialisation	:	Donner À u la valeur initiale n.
Traitement	:	Tant que $u \geqslant 7$, affecter À u la valeur $u - 7$.
Sortie	:	Afficher u.

   a. Faire fonctionner cet algorithme avec $n = 25$.
   b. Proposer deux entiers naturels différents qui donnent le nombre 5 en sortie.
   c. Peut-on obtenir le nombre 11 en sortie ? Justifier.
   d. Qu'obtient-on en sortie si on fait fonctionner cet algorithme avec le nombre 2^{2007} ?
   Même question avec le nombre 2^{2008}. Justifier.
   e. On a fait fonctionner cet algorithme avec un nombre a et on a obtenu en sortie le nombre 3.
   On a fait fonctionner cet algorithme avec un nombre b et on a obtenu en sortie le nombre 5.
   Si on fait fonctionner cet algorithme avec le nombre $3 \times a + b$, qu'obtiendra-t-on en sortie ? Justifier.

EXERCICE 4 **5 points**

Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

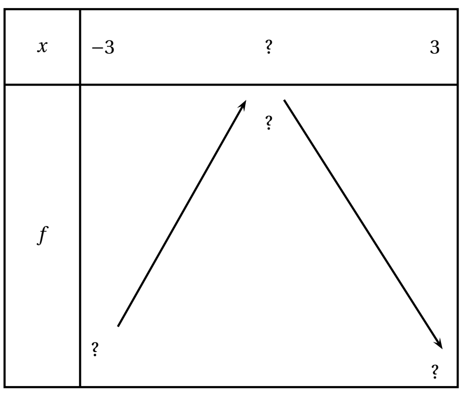
On considère la fonction f définie par :

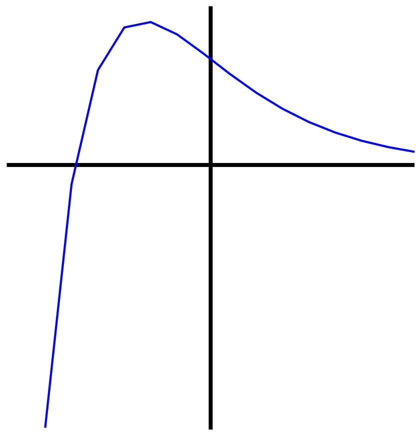
$$f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x} \text{ pour tout } x \text{ de l'intervalle } [-3\ ;\ 3].$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

On a utilisé une calculatrice et défini la fenêtre graphique en choisissant -3 comme valeur minimale et 3 comme valeur maximale pour les abscisses. On obtient À l'écran un dessin de $\mathscr{C}$.

Sont donnés ci-dessous un tableau de variations de f partiellement complété et une capture de l'écran.





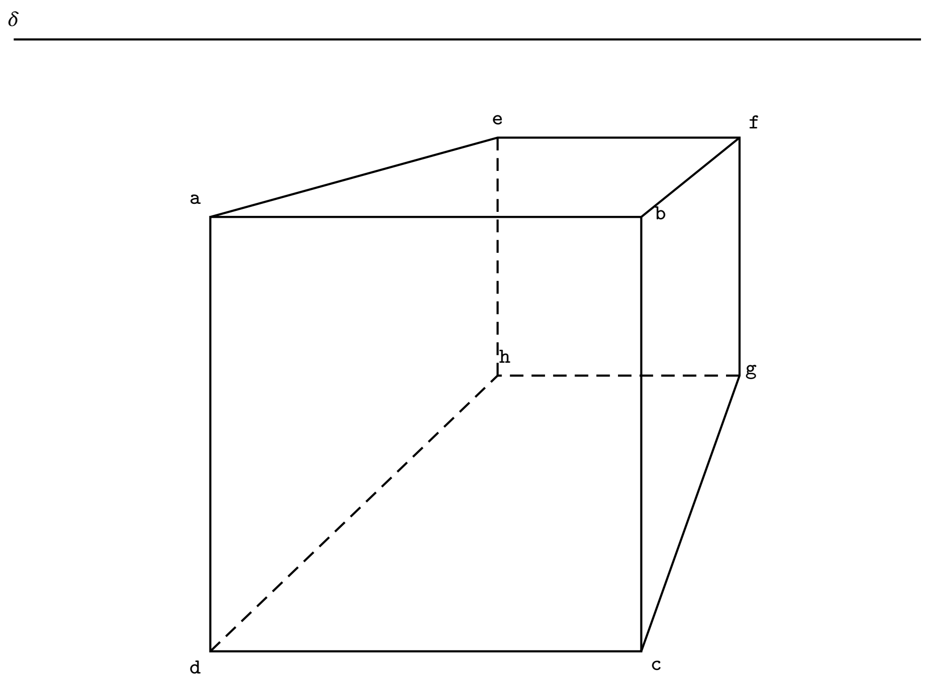
En exploitant les informations dont on dispose sur la fonction f, indiquer pour chacune des six propositions suivantes si elle est vraie ou si elle est fausse.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

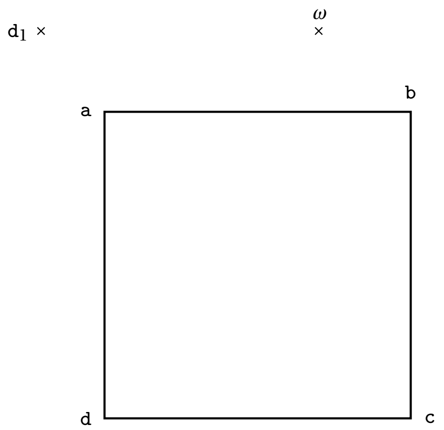
1. « Le point B $\left(1\ ;\ \dfrac{3}{\mathrm{e}}\right)$ est situé sur la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f ».
2. « Il existe un nombre réel de l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$ qui a une image par f strictement inférieure À 0. »
3. « Tous les nombres réels de l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$ ont une image par f strictement négative ».
4. « Tous les nombres réels de l'intervalle $[-2\ ;\ -1]$ ont une image par f strictement positive.
5. « La fonction dérivée f' de f est définie par :
$$f'(x) = -\mathrm{e}^{-x} \text{ pour tout } x \text{ de l'intervalle } [-3\ ;\ 3] \text{ ».}$$
6. « La fonction f présente un maximum en -1 ».
7. « Tous les nombres réels de l'intervalle $[-3\ ;\ 3]$ ont une image par f strictement inférieure À 3 ».

Les dessins et le tableau sont À compléter et À rendre avec la copie.

Annexe N° 1



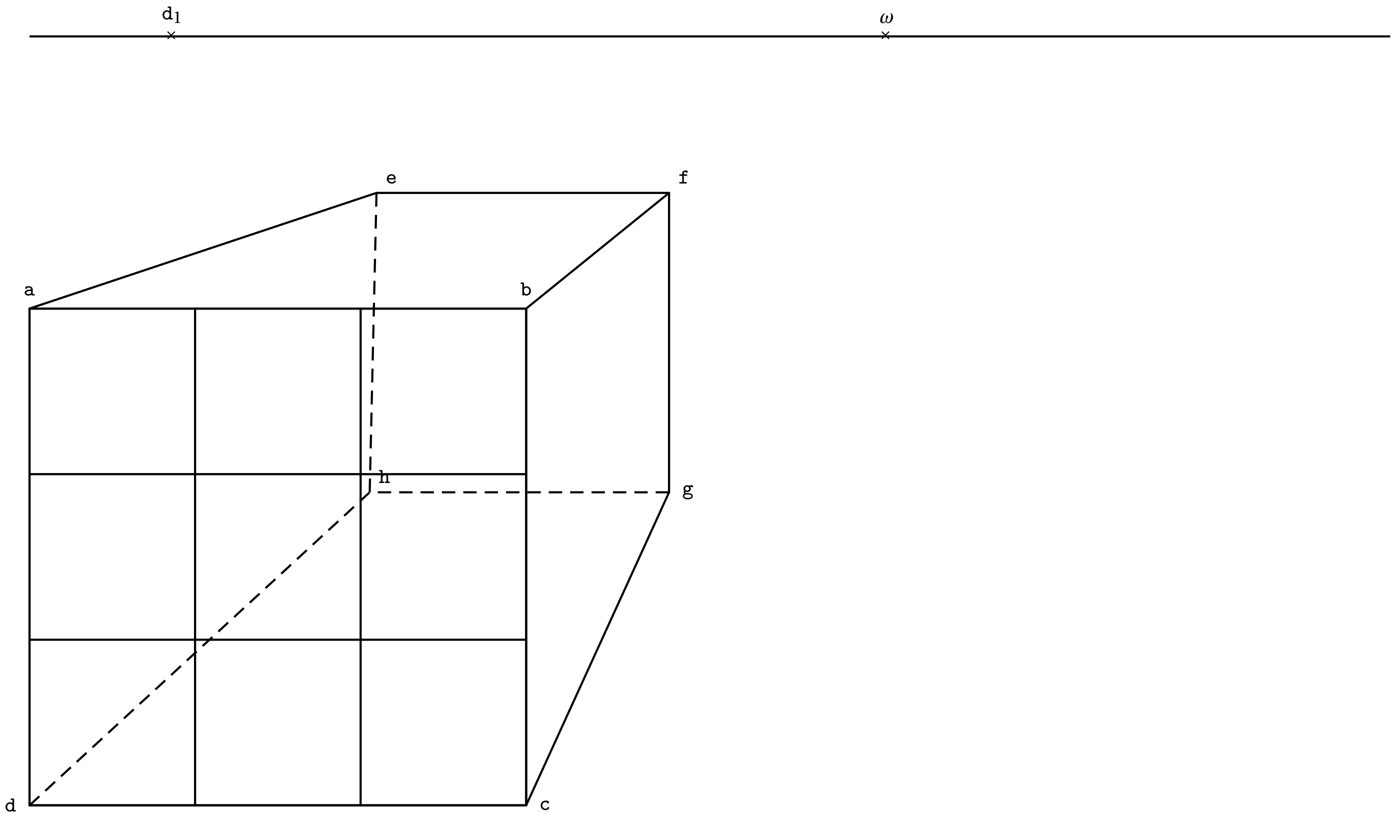
Annexe N° 2



	ayant ω comme point de fuite	ayant un point de distance comme point de fuite	ayant un point de fuite sur la ligne d'horizon
(CG) est une droite			
(CH) est une droite			
(CE) est une droite			

Le dessin est à compléter et à rendre avec la copie

Annexe N° 3



24 Amérique du nord juin 2009

EXERCICE 1 **5 points**

Marie possède un jeu électronique ayant deux niveaux de jeu. Au début de chaque partie, elle choisit au hasard un des niveaux de jeu. Une étude statistique des parties déjÀ jouées permet d'affirmer que si Marie joue au niveau 1, elle gagne trois fois sur quatre et si elle joue au niveau 2, elle ne gagne que deux fois sur cinq.

Marie joue une partie.

On note A, B et G les évènements suivants :

A : « Marie joue au niveau 1 »
B : « Marie joue au niveau 2 »
G : « Marie gagne la partie ».

1. Donner, À l'aide de l'énoncé :

la probabilité P(A) de l'évènement A.

la probabilité P(B) de l'évènement B.

la probabilité $P_A(G)$ que Marie gagne la partie sachant qu'elle a joué au niveau 1.

la probabilité $P_B(G)$ que Marie gagne la partie sachant qu'elle a joué au niveau 2.

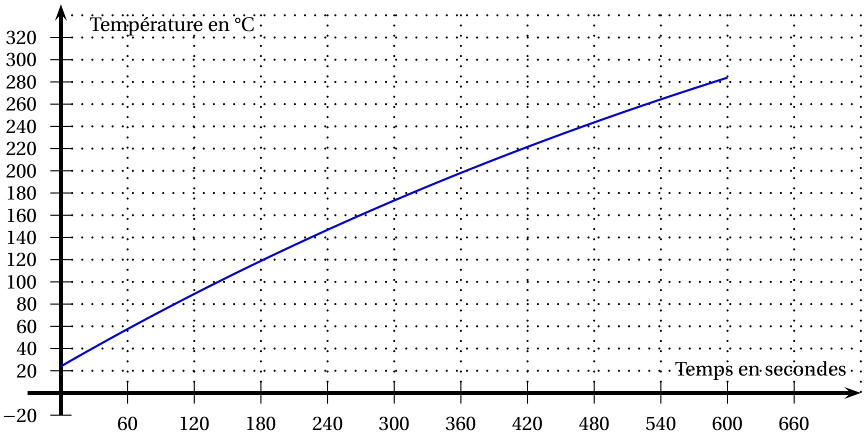
Pour les questions suivantes, on pourra utiliser un arbre de probabilité. Il conviendra alors de le représenter sur la copie.

2. Démontrer que la probabilité que Marie gagne est égale À 0,575.

3. Déterminer la probabilité que Marie ait joué au niveau 2 sachant qu'elle a gagné la partie.
On donnera le résultat arrondi au centième.

EXERCICE 2 **7 points**

1. La courbe ci-dessous illustre l'évolution de la température en degrés Celsius d'une plaque chauffante en fonction du temps écoulé en secondes.



Déterminer graphiquement une valeur approchée de :

a. la température de la plaque au bout de cinq minutes ;

b. l'instant où la température de la plaque atteint 120 °C.

2. La fonction représentée À la question 1. est définie sur l'intervalle [0 ; 600] par :

$$f(t) = 600 - 576\mathrm{e}^{-0,001t}$$

a. On note f' la dérivée de la fonction f.
Calculer $f'(t)$ lorsque t appartient À l'intervalle [0 ; 600].

b. Étudier les variations deJsur l'intervalle [0 ; 600].

c. Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous en arrondissant au dixième.

t	180	181	182	183	184	185
$f(t)$						

d. En déduire l'instant, À la seconde près, où la température de la plaque atteint 120 °C.

e. Résoudre l'équation $f(t) = 120$ sur l'intervalle [0 ; 600] et vérifier que la valeur exacte de la solution est $1000\ln(1,2)$.

EXERCICE 3 **8 points**

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Entrée	:	n est un entier naturel non nul
Initialisation	:	Donner À A et B la valeur 1 et À K la valeur 0
Traitement	:	Tant que K < n, réitérer la procédure suivante
		donner À A la valeur 4A
		donner À B la valeur B + 4
		donner À K la valeur K +1
Sortie	:	Afficher A et B

1. Justifier que, pour $n = 2$, l'affichage obtenu est 16 pour A et 9 pour B.
Reproduire sur la copie et compléter le tableau suivant :

Valeur de n	1	2	3	4
Affichage pour A		16		
Affichage pour B		9		

2. Pour un entier naturel non nul quelconque n,l'algorithme affiche en sortie les valeurs des termes de rang n d'une suite géométrique et d'une suite arithmétique.
Donner le premier terme et la raison de chacune de ces suites.

Partie B
Voici quatre propositions :

$\mathscr{P}_1$: « Pour tout n entier naturel, $4^n > 4n+1$ »
$\mathscr{P}_2$: « Pour tout n entier naturel, $4^n \leqslant 4n+1$ »
$\mathscr{P}_3$: « Il existe au moins un entier naturel n tel que $4^n \leqslant 4n+1$ »
$\mathscr{P}_4$: « Il existe un unique entier naturel n tel que $4^n \leqslant 4n+1$ »

1. Pour chacune d'elles, dire sans justification si elle est vraie ou fausse.
2. L'une des trois dernières est la négation de la propriété $\mathscr{P}_1$. Laquelle ?

Partie C

1. Soit p un entier naturel non nul.
 a. Développer et réduire $4(p+1)+1-4(4p+1)$.
 b. En déduire l'inégalité $4(4p+1) > 4(p+1)+1$.

2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, a-t-on l'inégalité $4^n > 4n+1$?

25 Centres étrangers juin 2009

EXERCICE 1 **5 points**

En 2005, une enquête de l'INSEE a étudié les pratiques culturelles des français de 15 ans ou plus. Dans la population étudiée, 48,3 % des individus sont des hommes. Selon l'enquête 52 % des hommes et 42 % des femmes déclarent n'avoir lu aucun livre au cours de l'année écoulée. (*Source : Insee, enquête permanente sur les conditions de vie, mise À jour* 09/2006)

On considère, au hasard, une personne de la population étudiée par l'enquête. On note F l'évènement « la personne est une femme » et L l'évènement « la personne a lu au moins un livre au cours de l'année écoulée ».

Remarque :
Pour résoudre l'exercice, on peut s'aider d'un tableau ou d'un arbre.
Les résultats seront donnés sous forme décimale, éventuellement arrondis au millième.

1. Définir par une phrase l'évènement $\overline{L}$, évènement contraire de L et l'événement $F \cap L$, intersection des évènements F et L.
2. Déterminer la probabilité de l'évènement F, noté $P(F)$, et la probabilité conditionnelle de l'évènement $\overline{L}$ sachant que F est réalisé, notée $P_F\left(\overline{L}\right)$.
3. Calculer la probabilité de l'évènement $F \cap L$.
4. Montrer que la probabilité de l'évènement « la personne considérée n'a lu aucun livre au cours de l'année écoulée » est égale À 0,4683.
5. La personne considérée n'a lu aucun livre au cours de l'année écoulée. Quelle est la probabilité que cette personne soit un homme ?

EXERCICE 2 **4 points**

Les quatre questions de cet exercice sont indépendantes

Pour chaque question, trois réponses sont proposées et une seule est correcte. La réponse choisie sera écrite sur la copie. Aucune justification n'est demandée. Barème : Pour chaque question, la réponse rapporte un point, une absence de réponse est notée 0*, uneréponse fausse enlève* 0,5 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée À* 0.

1	Si un nombre entier naturel n admet pour diviseur 6 alors	3 divise n	12 divise n	n est un multiple de 18
2	Si $n \equiv -1$ (modulo7) balors	$n \equiv 2$ (modulo7)	$n \equiv 8$ (modulo7)	$n \equiv 2008$ (modulo7)
3	Si un nombre entier naturel n est pair alors	$n+1$ est un nombre premier	en base 2, le chiffre des unités de n est égal À 0	en base 3, le chiffre des unités de n est égal À 0 ou 2
4	Le produit de trois nombres consécutifs est toujours	un nombre pair	un multiple de 5	un multiple de 4

EXERCICE 3 **5 points**

Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, pourra être prise en compte dans l'évaluation.

La fonction f est définie pour tout nombre réel x de l'intervalle [?2 ; 1] par

$$f(x) = x\text{e}^x - 1.$$

1. Montrer que la fonction dérivée f' de la fonction f est telle que, pour tout nombre réel x de$[-2~;~1]$, $f'(x) = \text{e}^x(1+x)$.
2. **a.** Étudier le signe de $f'(x)$ pour tout réel x de $[-2~;~1]$.

   b. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur $[-2~;~1]$.

   c. En vous appuyant sur le tableau de variations de la fonction f, justifier que, sur $[-2~;~1]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que cette solution appartient À l'intervalle $[0~;~1]$.
3. On considère l'algorithme suivant :

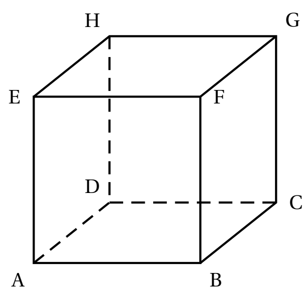
Entrée : Introduire un nombre entier naturel n Initialisation : Affecter À N la valeur n.
Affecter À a la valeur 0
Affecter À b la valeur 1.
Traitement : Tant que $b - a > 10^{-N}$
Affecter À m la valeur $\dfrac{a+b}{2}$
Affecter À P le produit $f(a) \times f(m)$
Si $P > 0$, affecter À a la valeur de m.
Si $P \leqslant 0$, affecter À b la valeur m.
Sortie : Afficher a
Afficher b.

a. On a fait fonctionner cet algorithme pour $n = 2$. Compléter le tableau de l'annexe 1 donnant les différentes étapes.

b. Cet algorithme détermine un encadrement de la solution α de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[0~;~1]$. Quelle influence le nombre entier n, introduit au début de l'algorithme, a-t-il sur l'encadrement obtenu ?

EXERCICE 4 **6 points**

Le dessin en Annexe 1 représente un solide en perspective parallèle. Il est obtenu À partir d'un parallélépipède rectangle ABCDEFGH (figure ci-dessous) dont un coin a été coupé, les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments [AE], [EF] et [EH]. La face ABFE est un carré.



Remarque : Pour les dessins demandés, on laissera apparents les traits de construction.

Partie 1

1. On coupe le solide suivant un plan Q parallèle au plan (IJK) passant le milieu du segment [KH]. On considère l'affirmation : « L'intersection du plan Q et du plan (FGH) est la droite parallèle À (KJ) passant par M ». Parmi les propriétés suivantes, indiquer celle qui permet de justifier cette affirmation etexpliquer les raisons de ce choix.
   - Propriété 1 : Lorsque deux plans P et P′ sont parallèles, tout plan qui coupe P coupe P′ et les droites d'intersection sont parallèles.
   - Propriété 2 : Si une droite d est parallèle À une droite d′ contenue dans un plan P alors la droite d estparallèle au plan P.

- Propriété 3 : P et P′ sont deux plans sécants suivant une droite (Δ). Si une droite d du plan P est parallèle À une droite d′ du plan P′ alors (Δ) est parallèle À d et À d′.

2. Construire sur la figure de l'annexe 1 la section du solide par le plan Q.

Partie 2

Le but de cette partie est de représenter en perspective centrale le parallélépipède rectangle ABCDEFGH et la section par le plan (IJK). Les faces ABCD et EFGH sont horizontales. La face ABFE est située dans le plan frontal.

Les images des points A, B, C, ... sont notées a, b, c, ... sur le dessin en perspective centrale. La représentation en perspective centrale est commencée en Annexe 2. La droite Δ est la ligne d'horizon.

1. Expliquer pourquoi les droites (fg) et (bc) se coupent sur la ligne d'horizon et justifier que leur point d'intersection est le point de fuite principal.

2. Compléter sur l'Annexe 2 la représentation du parallélépipède rectangle ABCDEFGH.

3. Placer le point i, image du milieu I de [AE].

4. Construire le point k, image du milieu K de [EH].

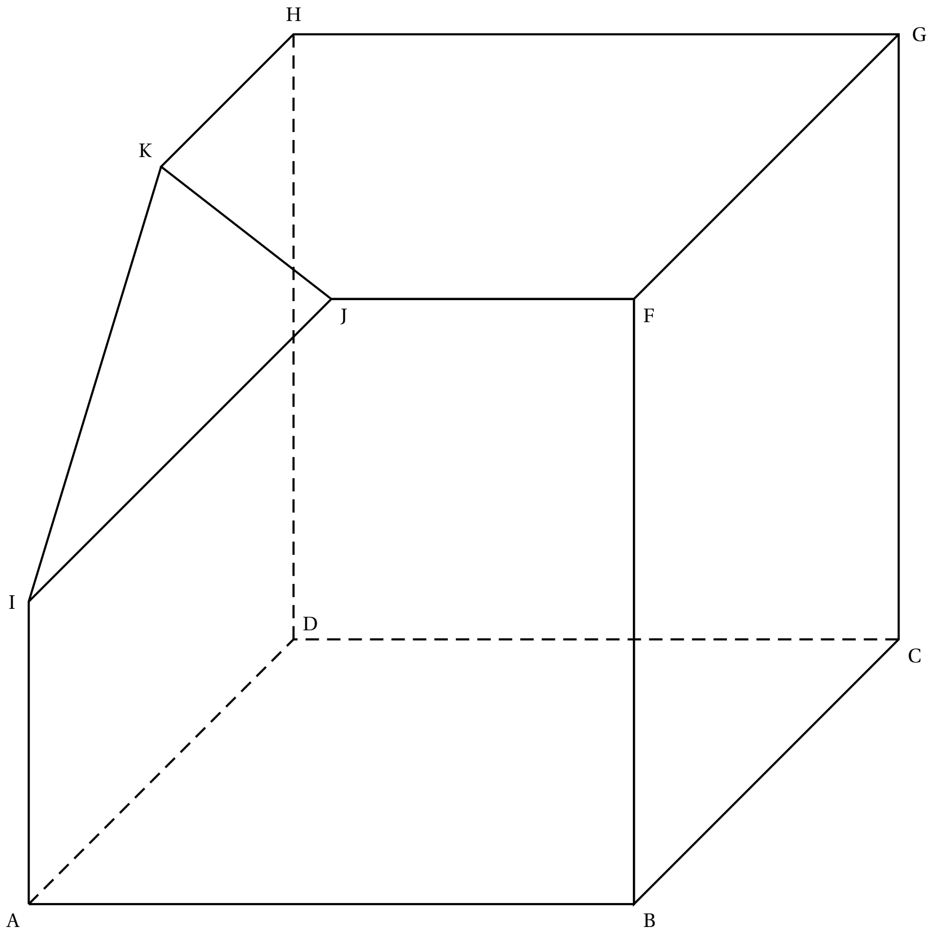
5. Tracer l'intersection de ce parallélépipède rectangle et du plan (IJK).

Annexe 1 (À rendre avec la copie)

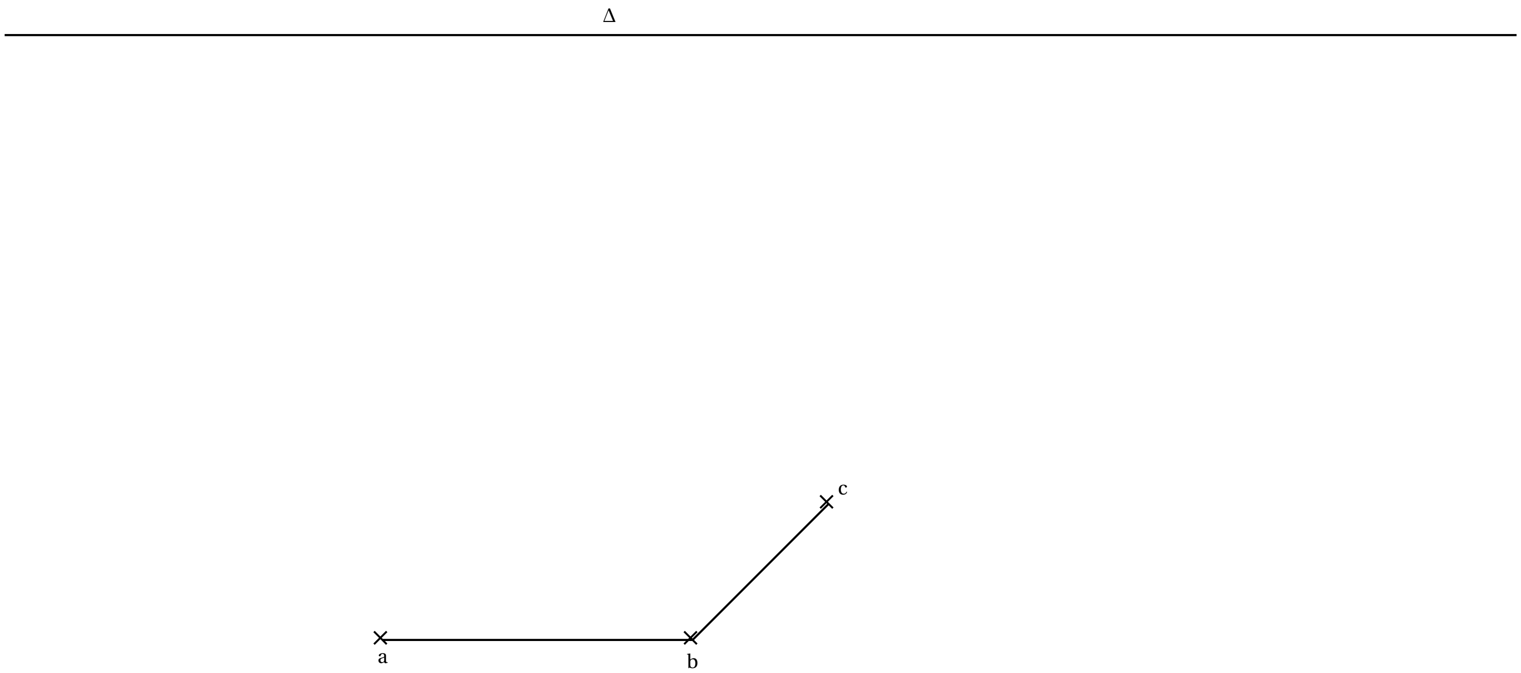
Exercice 3

	m	P	a	b	$b-a$
Initialisation			0	1	
Étape 1					
Étape 2					
Étape 3	0,625	$-0,02944659$	0,5	0,625	0,125
Étape 4	0,5625	0,00224498	0,5625	0,625	0,0625
Étape 5	0,59375	$-0,00096045$	0,5625	0,59375	0,03125
Étape 6	0,578125	$-0,00039137$	0,5625	0,578125	0,015625
Étape 7	0,5703125	$-0,00011222$	0,5625	0,5703125	0,0078125

Exercice 3



Annexe 2 (À rendre avec la copie)



26 France juin 2009

EXERCICE 1 **5 points**

Quatre affirmations sont données ci-dessous. Dire si chacune de ces quatre affirmations est vraie ou fausse. Justifier chaque réponse.

1. Soit f la fonction définie par $f(x) = \left(1+x^2\right)\mathrm{e}^x$ pour tout nombre réel x.
   Affirmation nº 1 : La courbe représentative de f est toujours située au-dessus de l'axe des abscisses .
2. Soit g la fonction définie par $g(x) = 2x - \dfrac{1}{x+1}$ pour tout x de $]-1\ ;\ +\infty[$.
   On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de g et A le point de $(\mathscr{C})$ d'abscisse 0.
   Affirmation nº 2 : La tangente À $(\mathscr{C})$ en A a pour équation $y = 2x - 1$.
3. Soit deux évènements A et B. $\overline{A}$ désigne l'évènement contraire de A. On suppose que la probabilité de A est égale À 0,4 et que la probabilité de l'évènement $\overline{A} \cap B$ est égale À $0,12$.
   Affirmation nº 3 : La probabilité de B sachant que $\overline{A}$ est réalisé est égale À $0,2$.
4. On lance deux dés cubiques équilibrés et on lit la somme des résultats des faces supérieures.
   Affirmation nº 4 : La probabilité d'obtenir une somme égale À 5 est égale À $\dfrac{5}{36}$.

EXERCICE 2 **4 points**

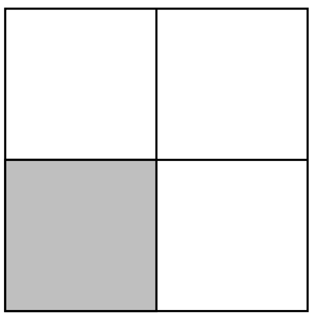
Dans cet exercice, on s'intéresse À la propriété « le nombre $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7 », où n est un nombre entier naturel.

1. **a.** Existe-t-il un nombre entier naturel n pour lequel cette propriété est vraie ? Justifier.
   b. Quel est le reste de la division euclidienne de 3^2 par 7 ?
2. **a.** Montrer que, pour tout nombre entier naturel n,
   $$9\left(3^{2n} - 2^n\right) + 7 \times 2^n = 3^{2(n+1)} - 2^{n+1}.$$
   b. En utilisant l'égalité précédente démontrer que, si pour un certain entier naturel n, $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7, alors $3^{2(n+1)} - 2^{n+1}$ est aussi divisible par 7.
3. **Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.**
   Le nombre $3^{2n} - 2^n$ est-il toujours divisible par 7, quel que soit le nombre entier naturel n ?

EXERCICE 3 **6 points**

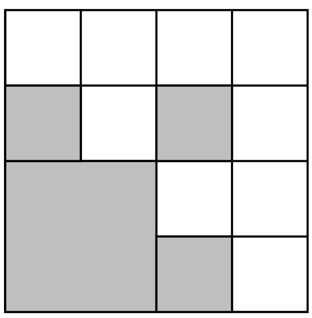
On effectue un coloriage en plusieurs étapes d'un carré de côté de longueur 2 cm.

Première étape du coloriage :
On partage ce carré en quatre carrés de même aire et on colorie le carré situé en bas À gauche comme indiqué sur la figure ci-dessous (la figure n'est pas en vraie grandeur).



Deuxième étape du coloriage :

On partage chaque carré non encore colorié en quatre carrés de même aire et on colorie dans chacun, le carré situé en bas À gauche, comme indiqué sur la figure ci-dessous.



On poursuit les étapes du coloriage en continuant le même procédé.

Pour tout entier naturel n, supérieur ou égal À 1, on désigne par A_n l'aire, exprimée en cm^2, de la surface totale coloriée après n coloriages.
On a ainsi $A_1 = 1$.
La surface coloriée sur la figure À la 2e étape du coloriage a donc pour aire A_2.

Les deux parties suivantes A et B de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Calculer A_2 puis montrer que $\mathrm{A}_3 = \dfrac{37}{16}$.
2. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	P un entier naturel non nul.
Initialisation :	N = 1 ; U = 1.
Traitement :	Tant que N $\leqslant$ P : Afficher U Affecter À N la valeur N +1 Affecter À U la valeur $\dfrac{5}{4} \times \mathrm{U} + \dfrac{1}{2}$

   a. Faire fonctionner cet algorithme avec P = 3.

   b. Cet algorithme permet d'afficher les P premiers termes d'une suite U de terme général U_n.
   Dire si chacune des deux propositions suivantes est vraie ou fausse. Justifier la réponse.
   Proposition 1 : Il existe un entier naturel n strictement supérieur À 1 tel que $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}_n$.
   Proposition 2 : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal À 1, $\mathrm{U}_n = \mathrm{A}_n$.

Partie B

On admet que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal À 1, $\mathrm{A}_{n+1} = \dfrac{3}{4}\mathrm{A}_n + 1$.

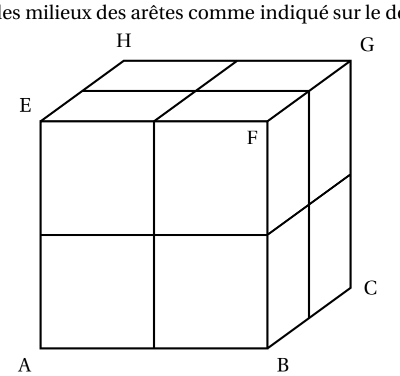
1. On pose pour tout entier n supérieur ou égal À 1, $\mathrm{B}_n = \mathrm{A}_n - 4$.
   a. Calculer B_1.
   b. Montrer que pour tout entier n supérieur ou égal À 1, $\mathrm{B}_{n+1} = \dfrac{3}{4}\mathrm{B}_n$.
   c. Quelle est la nature de la suite (B_n) ?
   d. Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal À 1, le terme général B_n de la suite (B_n) en fonction de n.
2. Quel est le comportement de A_n lorsque n tend vers $+\infty$? Justifier la réponse.
   Donner une interprétation de ce résultat en rapport avec l'aire de la surface coloriée.

EXERCICE 4 **5 points**

Dans tout l'exercice, A, B, C, D, E, F, G et H sont les sommets d'un cube opaque dont la face ABCD est posée sur le sol.

Trois dessins sont donnés en annexes. Ils corrcspondent aux trois questions de l'exercice qui sont indépendantes. Ces dessins sont À compléter au fur et À mesure de la résolution de l'exercice et À rendre avec la copie. On laissera apparents les traits de construction.

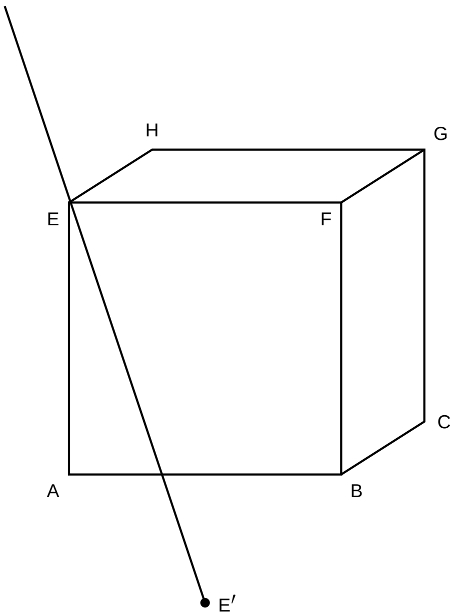
1. Le dessin no 1 donné en annexe est la représentation en perspective parallèle du cube ABCDEFGH. Ce cube est éclairé par le soleil suivant la direction indiquée par l'ombre E′ du sommet E. Compléter ce dessin par l'ombre de ce cube sur le sol, les rayons du soleil étant considérés parallèles. On repassera en couleur le dessin fini de l'ombre au soleil du cube pour en améliorer la lisibilité.
2. On veut construire sur le dessin no 2 la représentation en perspective centrale du cube ABCDEFGH, l'arête [BF] étant dans le plan frontal. Les images des sommets A, B, C,... sont désignées par les lettres minuscules a, b, c, ...
   On a tracé la ligne d'horizon (Δ) et la diagonale [ac] qui est parallèle À la ligne d'horizon.
   a. Construire les points de distance d_1 et d_2.
   b. Terminer la représentation en perspective centrale du cube en repassant le dessin en couleur pour en améliorer la lisibilité.
3. On entoure ce cube d'une ficelle passant par les milieux des arêtes comme indiqué sur le dessin ci-dessous.



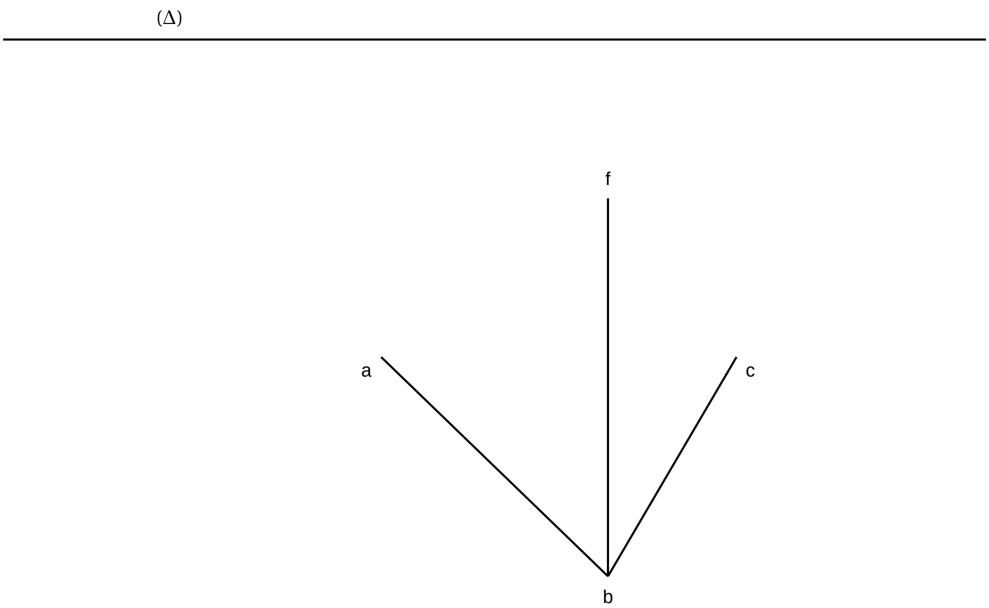
   Le dessin no 3 est la représentation en perspective centrale du cube ABCDEFGH, la face ABFE étant placée dans un plan frontal. (Δ) est la ligne d'horizon.
   Compléter le dessin no 3 par une représentation de cette ficelle.

Annexe 1 (À compléter et À rendre avec la copie)

Dessin n° 1

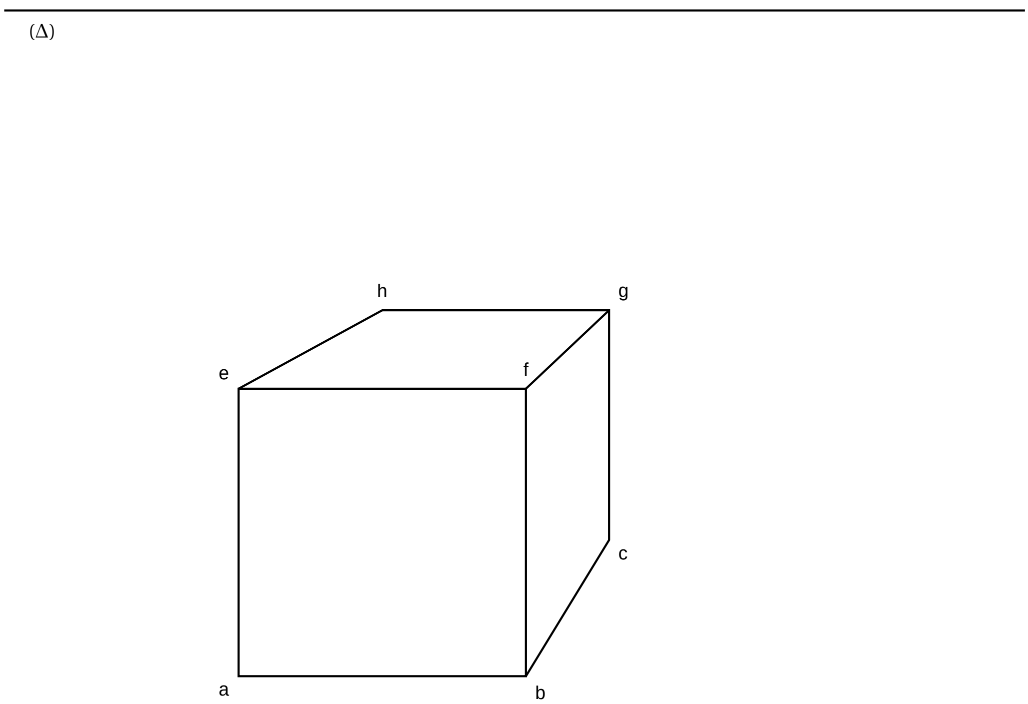


Dessin n° 2



Annexe 2 (À compléter et À rendre avec la copie)

Dessin n° 3



27 Liban juin 2009

EXERCICE 1 **4 points**

Un supermarché organise une campagne publicitaire en offrant, À chaque client qui passe À la caisse, un ticket de jeu sur lequel il ya une grille de 28 cases.
Chaque grille contient 3 cases noires et 25 cases blanches réparties au hasard parmi les 28 cases; la couleur de chaque case est cachée et il faut gratter la case pour la découvrir.
La règle du jeu est la suivante :

Chaque joueur gratte deux cases de la grille;
s'il découvre deux cases noires, il gagne un bon d'achat de 10 €;
s'il ne découvre qu'une seule case noire, il gagne un bon d'achat de 2 €; sinon il ne gagne rien.

On appelle N_1, N_2, B_1 et B_2 les évènements suivants :

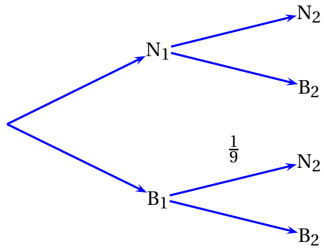
N_4 : « la première case grattée est noire »,
N_2 : « la deuxième case grattée est noire »,
B_1 :« la première case grattée est blanche »,
B_2 : « la deuxième case grattée est blanche ».

Sauf pour la question 2**, il est demandé de justifier la réponse À chaque question. Les probabilités demandées seront données sous la forme de fractions irréductibles.**

1. **a.** Un client gratte au hasard une première case.
Quelle est la probabilité qu'il découvre une case blanche?

b. Un client a découvert une case blanche en grattant la première case.
Démontrer que la probabilité qu'il découvre une case noire en grattant la seconde case est égale À $\frac{1}{9}$.

2. Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité suivant (on ne demande pas de justification).



Soit E l'évènement « le client a gagné un bon d'achat de 10 € » et F l'évènement « le client a gagné un bon d'achat de 2 € ».
Quelle est la probabilité de E?
Démontrer que la probabilité de F est égale À $\frac{25}{126}$.

EXERCICE 2 **6 points**

On considère l'algorithme suivant :

Entrée	:	N est un entier naturel
Initialisation	:	Donner À P la valeur 0
		Donner À U la valeur 4
		Donner À S la valeur 4
Traitement	:	Tant que $P < N$
		│ Donner À P la valeur $P+1$
		│ Donner À U la valeur $4+2P$
		│ Donner À S la valeur $S+U$
Sortie	:	Afficher S

1. Faire fonctionner l'algorithme pour $N = 5$.
On fera apparaître les différentes étapes du déroulement de l'algorithme dans un tableau comme ci-dessous À reproduire sur la copie.

	Valeur de P	Valeur de U	Valeur de S
Initialisation	0	4	4
Étape 1	1	6	10
Étape 2	2		
… … …			
Affichage			

2. On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$U_{n+1} = U_n + 2 \quad \text{et} \quad U_0 = 4.$$

a. Calculer U_1, U_2 et U_3.

b. Soit p un nombre entier naturel.
Donner, en fonction de p, la valeur de U_p. Calculer U_{21}.

3. On fait fonctionner l'algorithme pour $N = 20$, la valeur affichée par S est alors 504.
   Quelle est la valeur affichée par S si on fait fonctionner l'algorithme pour
   $N = 21$?
4. On fait fonctionner l'algorithme pour un entier naturel N quelconque.
   Exprimer la valeur affichée S À l'aide des termes de la suite (U_n).

EXERCICE 3 **5 points**

On considère la fonction T définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par :

$$T(x) = 40\mathrm{e}^{-0,1x} + 20$$

1. Calculer $T(0)$.
2. On désigne par T' la fonction dérivée de T.
   a. pour tout réel x de l'intervalle $[0~;~+\infty[$, calculer $T'(x)$.
   b. En déduire que la fonction est décroissante sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.
3. Résoudre dans l'intervalle $[0~;~+\infty[$ l'équation $T(x) = 30$.
4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   La température du circuit de refroidissement par eau d'une machine est régulée par un système qui se déclenche quand la température de l'eau atteint 60 degrés Celsius et cesse de fonctionner dès qu'elle atteint 30 degrés Celsius.
   On admet que la température de l'eau, en degrés Celsius, x secondes après le déclenchement du système est égale À $T(x)$.
   Quelle est la durée de la phase de refroidissement du circuit ? On arrondira À la seconde.

EXERCICE 4 **5 points**

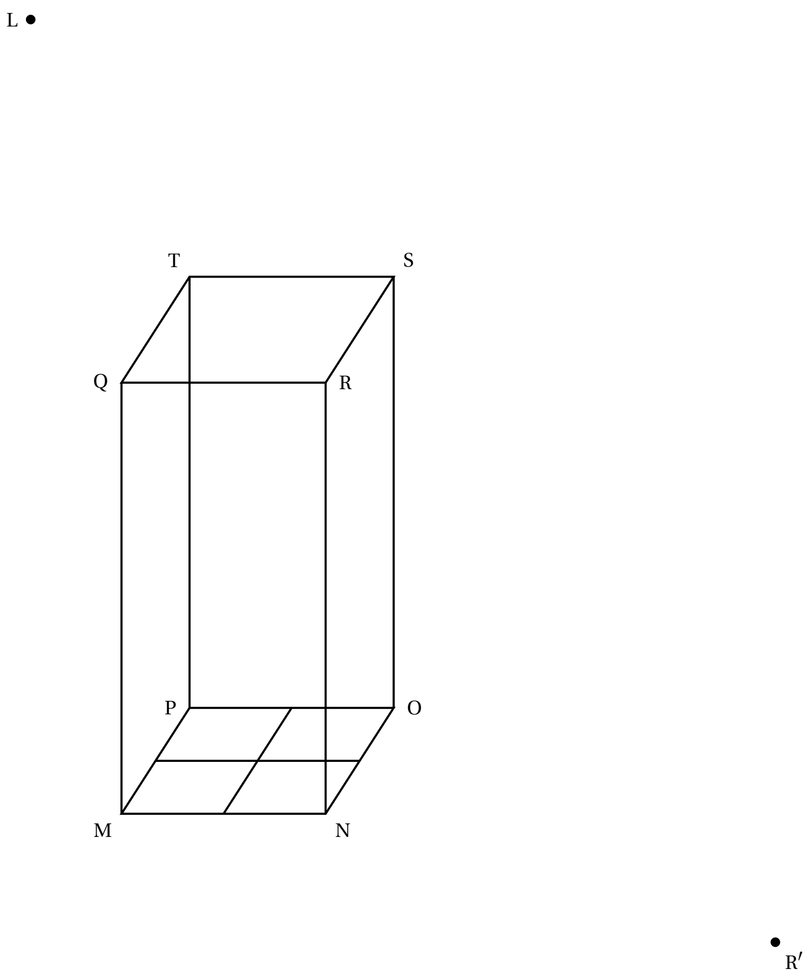
Dans une salle d'un musée, les œuvres d'art sont présentées À l'intérieur de pavés droits en plexiglas. Chaque pavé droit est posé sur sa base carrée et recouvre quatre carreaux carrés du sol.

On laissera apparents, dans tout l'exercice. tous les traits de construction et repassera en couleur les représentations demandées.

1. On a représenté en **annexe 1**, le dessin en perspective cavalière du pavé MNOPQRST en plexiglas posé sur le sol.
   Le point L représente l'endroit où se trouve la source lumineuse et le point R′ est l'ombre du sommet R sur le sol.
   Terminer le dessin de l'ombre du pavé en plexiglas sur le sol. On fera apparaître l'ombre de chacune des arêtes du pavé.
2. En **annexe 2**, on a donné les représentations $[mn]$ et $[mq]$ en perspective centrale des arêtes [MN] et [MQ] du pavé en plexiglas, situées dans un plan frontal. Le point ω est le point de fuite principal et le point d_1 un point de distance.
   a. Terminer, sur l'annexe 2, la représentation du carrelage situé sous le pavé.
   b. Représenter le pavé.

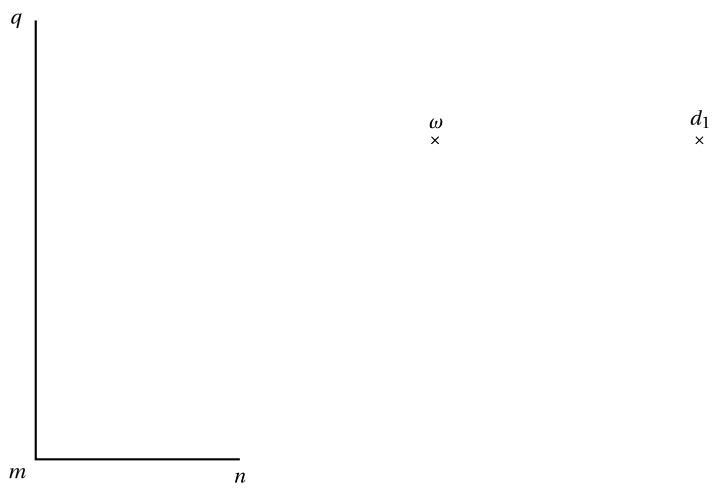
ANNEXE 1

Cette annexe est À rendre avec la copie



ANNEXE 2

Cette annexe est À rendre avec la copie



28 Polynésie juin 2009

EXERCICE 1 **5 points**

On a réalisé une étude auprès d'une population étudiante d'une grande ville. Cette étude a permis d'établir que 60 % des étudiants lisent un quotidien et que 50 % des étudiants lisent un hebdomadaire.
On choisit au hasard un étudiant de cette ville.
On note Q l'événement « l'étudiant lit un quotidien » et H l'événement « l'étudiant lit un hebdomadaire ».

On pourra s'aider d'un tableau pour traiter l'exercice.
Dans tout l'exercice, on donnera les solutions sous forme de fractions irréductibles.

1. Calculer la probabilité de l'événement « l'étudiant lit un quotidien et lit un hebdomadaire ».
2. Montrer que la probabilité de l'événement « l'étudiant lit un hebdomadaire et ne lit pas de quotidien » est égale À $\frac{1}{20}$.
3. Calculer la probabilité de l'événement « l'étudiant lit un hebdomadaire ou lit un quotidien ».
4. Calculer la probabilité que l'étudiant lise un quotidien sachant qu'il ne lit pas d'hebdomadaire.
5. Les événements Q et H sont-ils indépendants ?

EXERCICE 2 **5 points**

Pour tout nombre entier naturel n, on pose $A(n) = 5^n - 1$.
Le but de l'exercice est d'étudier la divisibilité de $A(n)$ par 13.

1. Calculer $A(2)$, $A(3)$, $A(4)$. Sont-ils divisibles par 13 ?
2. On considère l'algorithme suivant :
   Entrée : Saisir un nombre entier naturel non nul N.
   Initialisation : Affecter À m la valeur N.
   Traitement : Tant que $m > 6$ affecter À m la valeur $m - 13$.
   Sortie : Afficher n.

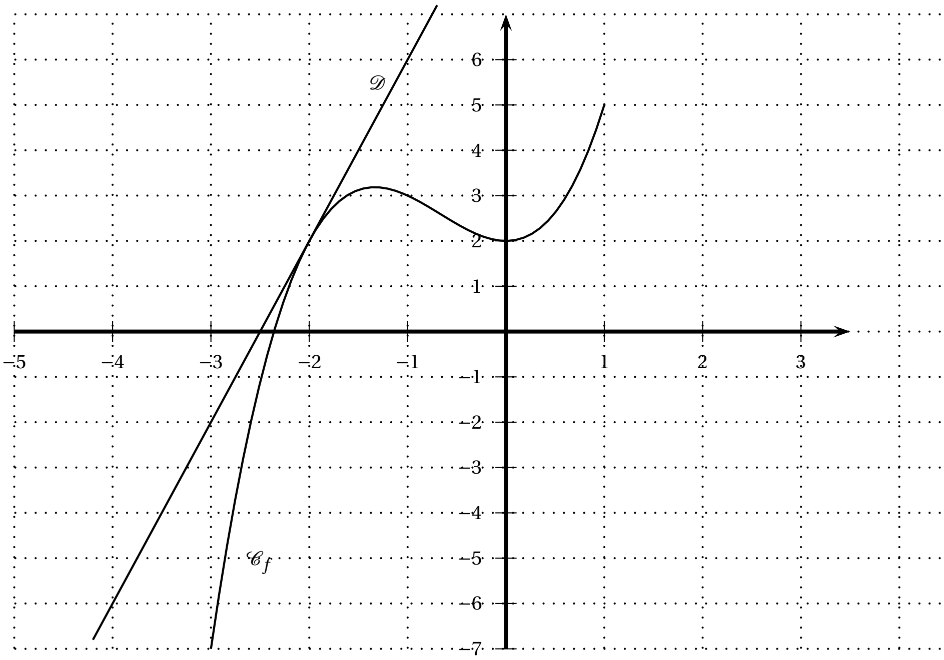
   a. Faire fonctionner l'algorithme avec $N = 25$ puis $N = 125$.
   b. Qu'obtiendrait-on en sortie si on faisait fonctionner cet algorithme avec $N = 5^4$?
3. **a.** Démontrer que, pour tout nombre entier naturel k :
   $5^{4k} \equiv 1 \pmod{13}$
   $5^{4k+1} \equiv 5 \pmod{13}$
   $5^{4k+2} \equiv -1 \pmod{13}$
   $5^{4k+3} \equiv -5 \pmod{13}$

   b. Application : Quel est le reste dans la division euclidienne de $5^{2009} - 1$ par 13 ?
   c. Pour quelles valeurs de l'entier n, l'entier $A(n)$ est-il divisible par 13 ?

EXERCICE 3 **4 points**

Cet exercice est un QCM. Pour chaque question, quatre réponses sont proposées dont une seule est exacte.
Les questions sont indépendantes, on n'enlevera pas de point en cas de réponse fausse.
Pour chaque question, recopier la réponse exacte. Aucune justifiaction n'est demandée.

1. Sur le graphique ci-dessous sont représentées :
– la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3; 1]$;
– la tangente $\mathscr{D}$ À la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.



a) $f'(-2) = 2$ b) $f'(-2) = 4$ c) $f(0) = -2,5$ d) $f(-2,5) = 0$

2. La fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$, a pour dérivée la fonction g' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $g'(x) = 1$ b) $g'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ c) $g'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$ d) $g'(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$

3. La fonction h, définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = e^{2x} + 7e^x + 6$. L'image de $\ln 3$ par h est :

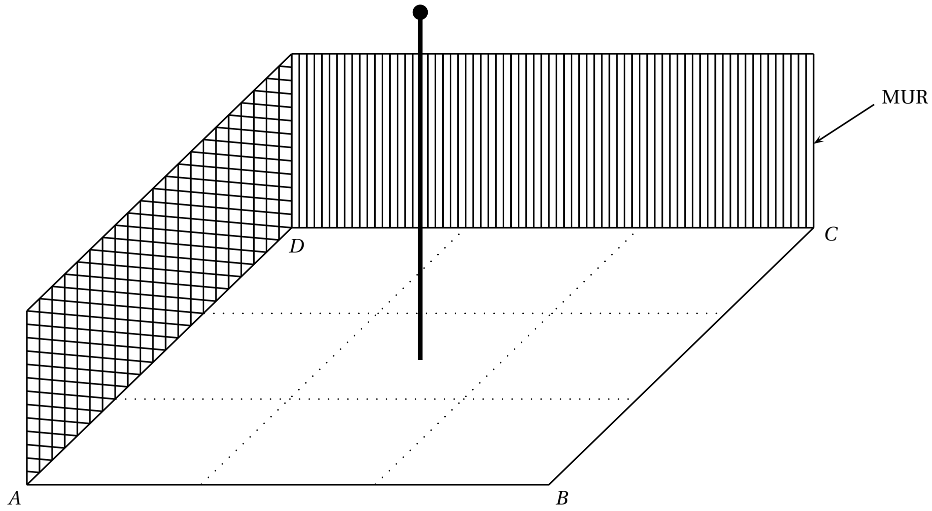
a) $h(\ln 3) = 6$ b) $h(\ln 3) = 30 + e^2$ c) $h(\ln 3) = 0$ d) $h(\ln 3) = 36$

4. On note S l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\ln(x + 2) \leqslant 1$. On a :

a) $S =]-2\,;\, e-2]$ b) $S =]-\infty\,;\, e-2]$ c) $S = [e-2\,;+\infty[$ d) $S = [-2\,;\, e-2[$

EXERCICE4 **6 points**

On a représenté en perspective cavalière un terrain de jeu carré horizontal et limité par deux murs verticaux. Le sol est pavé de dalles carrées et un lampadaire est positionné verticalement au centre du terrain.



L'objectif de l'exercice est de représenter ce terrain en perspective centrale.
Toutes les constructions seront faites sur la feuille Annexe.
Le dessin devra être soigné et tous les traits de construction seront laissés apparents.

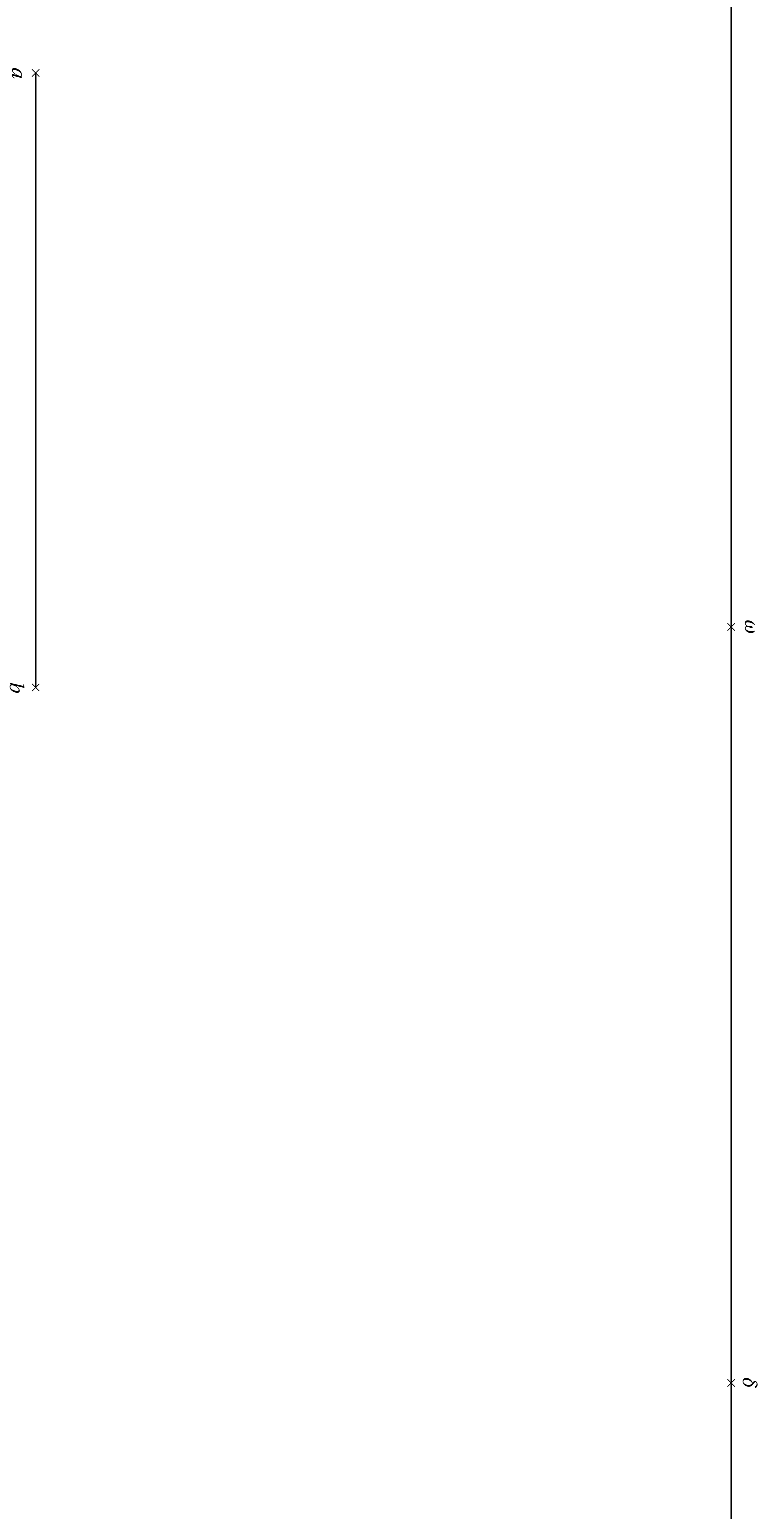
Sur la feuille annexe sont tracés :

– le segment $[ab]$ représentant le côté $[AB]$;
– la ligne d'horizon, le point de fuite principal ω et un point de distance δ.

On précise que la droite (ab) est parallèle À la ligne d'horizon.

1. Justifier que les droites (AD) et (BC) ont le même point de fuite.
   Est-ce le point de fuite principal ? Si oui, pourquoi ?
2. Sur la feuille annexe, compléter la figure en représentant le sol du terrain ainsi que son pavage.
3. Sachant que la hauteur des murs est le tiers de la longueur du côté du terrain, représenter les murs.
4. Sachant que la hauteur du lampadaire est le double de la hauteur de celle du mur, représenter le lampadaire.

Feuille Annexe À rendre avec la copie



29 Liban 3 juin 2010

EXERCICE 1 **5 points**

Dans cet exercice, pour chacune des questions, **une et une seule** des réponses proposées est exacte.
Aucune justification n'est attendue, il est seulement demandé de répondre en donnant le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse correcte.
Chaque bonne réponse rapporte 1 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point.

Questions	A	B	C
1. Le nombre de solutions réelles de l'équation $\left(e^x+1\right)\left(e^x-2\right)=0$ est :	0	1	2
2. L'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ de l'inéquation $\left(e^x-1\right)(1-x)\geqslant 0$ est l'intervalle :	$[0\,;\,1]$	$]-\infty\,;\,1]$	$[1\,;\,+\infty[$
3. La fonction dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(x^2+1\right)e^x$ est telle que :	$f'(x)=2x+e^x$	$f'(x)=(x+1)^2e^x$	$f'(x)=2xe^x$
4. Pour tous les réels strictement positifs a et b, le réel $e^{\ln(a)+\ln(b)}$ est égal à :	ab	$a+b$	$\dfrac{a}{b}$
5. La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=2^n+2^{n+1}$ est :	Une suite arithmétique	Une suite géométrique	Une suite ni arithmétique, ni géométrique

EXERCICE 2 **5 points**

Lors d'une étude statistique sur les performances d'un joueur professionnel de basket, il a été établi que lorsqu'il joue à domicile (sur le terrain de son équipe), il marque le panier sur 68 % de ses tirs mais que lorsqu'il joue à l'extérieur (sur le terrain de l'équipe adverse), il ne marque le panier que sur 42 % de ses tirs.
De plus, lors d'une saison, il joue 60 % de ses matchs à domicile.

1. Ce joueur dispute un match à domicile. Il effectue successivement deux tirs. On admet que les résultats de ces deux tirs sont indépendants.
   a. Quelle est la probabilité p_1 que le joueur marque deux paniers ?
   b. Quelle est la probabilité p_2 que le joueur marque au moins un panier ?
2. On regarde un match à la télévision auquel participe ce joueur mais sans savoir s'il joue à domicile ou à l'extérieur. Il effectue un tir.
   On note D l'évènement « Le joueur dispute son match à domicile » et M l'évènement « Le joueur marque le panier ».
   a. Donner la probabilité $p(D)$ de l'évènement D et la probabilité $p_D(M)$ de M sachant D.
   b. Calculer la probabilité $p(M\cap D)$ de l'évènement $M\cap D$.
   c. Démontrer que la probabilité de l'évènement M est $p(M)=0,576$.
   d. Le joueur marque le panier. Quelle est la probabilité qu'il joue à domicile ? On arrondira au millième.

EXERCICE 3 **5 points**

Alain et Alice ont l'habitude d'échanger entre eux des messages secrets. Afin que ces messages ne puissent être déchiffrés, ils décident de les coder.
Leurs messages ne sont écrits qu'en lettres majuscules, sans espace entre les mots.
À chaque lettre de l'alphabet, on fait conespondre un rang selon le tableau ci-dessous.

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Rang	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

La lettre de rang x est codée par la lettre de rang r, où r est le reste de la division euclidienne de $3x+20$ par 26.
Par exemple, la lettre T a pour rang 19. Le reste de la division euclidienne de $3\times 19+20=77$ par 26 est 25, qui est le rang de la lettre Z. Ainsi T est codée par Z.

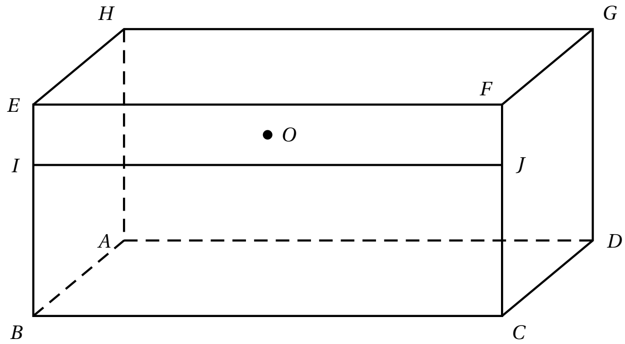
1. Vérifier que la lettre M est codée par la lettre E.
2. Coder le message suivant : « MATHS ».
3. On veut déterminer la lettre codée par B. On appelle x son rang.
   Montrer que $3x\equiv 7\quad[\text{mod } 26]$ et conçlure.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
Recopier le tableau ci-dessous et le compléter pour décoder le message « JUASBG » en expliquant la démarche :

Lettre	F			I		
Rang	5			8		
Rang lettre codée	9	20	0	18	1	6
Lettre codée	J	U	A	S	B	G

EXERCICE 4 **5 points**

La figure ci-dessous est la représentation en perspective parallèle d'un élément de cuisine ayant la forme d'un pavé $ABCDEFGH$. Le rectangle $EJJF$ qui représente un tiroir est tel que $EI = \frac{1}{4}EB$. Le point O, centre du rectangle $EIJF$ représente la poignée du tiroir.

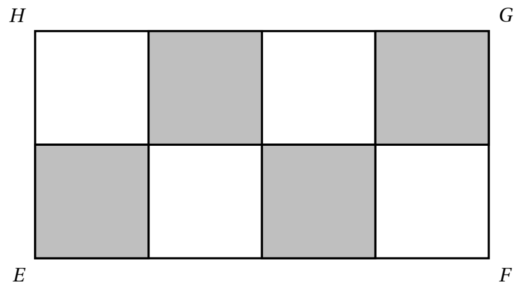


On complètera les figures données en annexe et on laissera apparents tous les traits de construction.

1. La figure 1 donnée en annexe amorce une représentation en perspective centrale du meuble. La face $ABCD$ est horizontale et l'arête $[BE]$ est dans un plan frontal.
Les points $A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, O$ sont respectivement représentés par les points $a,\ b,\ e,\ d,\ e,\ j,\ g,\ h,\ i,\ j,\ o$. La droite Δ est la ligne d'horizon.

a. Construire les points de fuite f_1 et f_2 des droites (ab) et (bc).
b. Construire les points $d,\ e,\ f,\ g,\ h$.
c. Placer les points $i,\ j,\ o$.

2. La face EFGH de ce meuble est un plan de travail que l'on souhaite carreler avec des carreaux carrés de deux couleurs comme indiqué ci-dessous.



Sur la figure 2 de l'annexe, on a commencé la représentation en perspective centrale de ce plan de travail en supposant que $[EF]$ est dans un plan frontal. La droite Δ est la ligne d'horizon.
Représenter le carrelage et griser les carreaux foncés.

Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

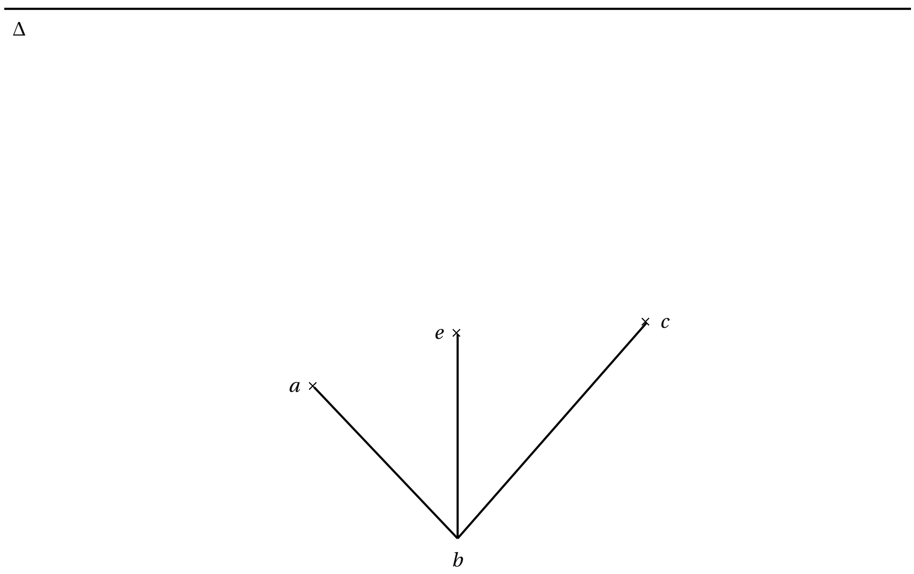
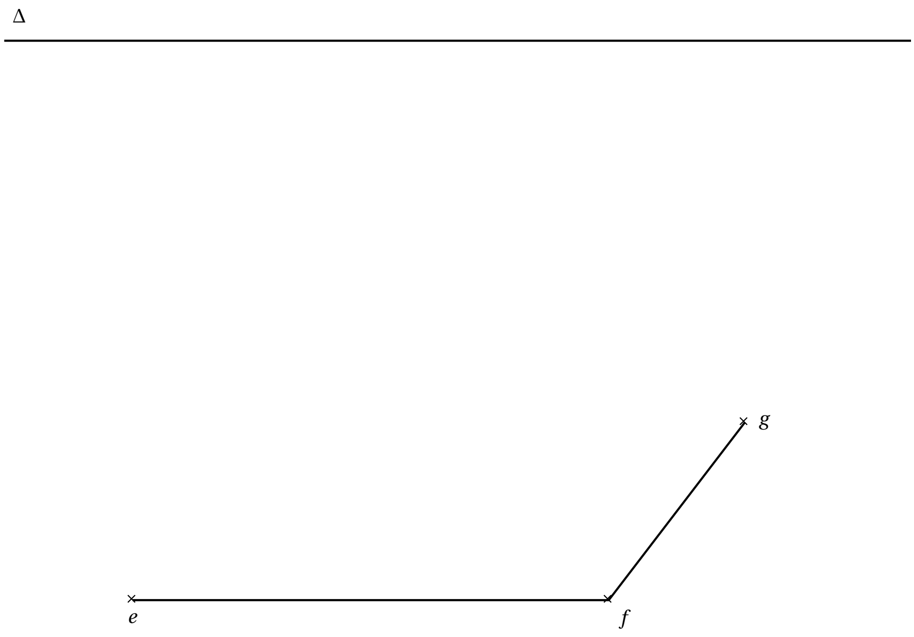


Figure 2



30 Amérique du nord juin 2010

EXERCICE 1 **6 points**

Une chocolaterie fabrique chaque jour des bonbons au chocolat dont certains contiennent aussi des amandes. Sa production journalière se répartit ainsi :

- 50 % des bonbons sont au chocolat noir,
- 40 % des bonbons sont au chocolat au lait,
- 10 % des bonbons sont au chocolat blanc,
- 25 % des bonbons au chocolat noir contiennent des amandes,
- 50 % des bonbons au chocolat au lait contiennent des amandes,
- 5 % des bonbons au chocolat blanc contiennent des amandes.

Charlie prend au hasard un bonbon dans la production journalière.
On considère les évènements suivants :

N : « le bonbon choisi est au chocolat noir »,
L : « le bonbon choisi est au chocolat au lait »,
B : « le bonbon choisi est au chocolat blanc »,
A : « le bonbon contient des amandes ».

Les probabilités demandées seront données sous forme décimale en arrondissant éventuellement au millième. On pourra utiliser un arbre de probabilités. Dans ce cas. il conviendra de le représenter sur la copie.

1. Donner les probabilités P(N) et $P_N(A)$.Calculer $P_N\left(\overline{A}\right)$ et $P(N \cap A)$.
2. Charlie est allergique aux amandes et n'aime que le chocolat noir.
   Quelle est la probabilité que le bonbon choisi lui convienne ?
3. Démontrer que $P(A) = 0,33$.
4. Le bonbon choisi par Charlie ne contient pas d'amandes.
   Quelle est la probabilité qu'il soit au chocolat noir ?

EXERCICE 2 **6 points**

ABCDEFGH est un tronc de pyramide obtenu à partir d'un cube IJKDEFGH, les points A, B et C étant les symétriques respectifs du point D par rapport aux points I, J et K.

Partie A - Représentation en perspective parallèle

Sur la figure 1 donnée en annexe, on a représenté en perspective parallèle les sommets du cube IJKDEFGH.
Construire sur la figure 1, les points A, B et C et tracer les arêtes du tronc de pyramide ABCDEFGH.

Partie B - Représentation en perspective centrale

La figure 2 donnée en annexe amorce une représentation en perspective centrale de ce tronc de pyramide, sa face ABCD étant posée sur le sol. Les points A, B, C, D, E, F, G, H, I, J sont représentés par les points $a, b, c, d, e, f, g, h, i, j$.
On laissera apparents tous les traits de construction.

1. Construire le point de fuite principal ω et le point d.
2. Construire les points i et j.
3. Justifier que le quadrilatère $i\,j\,f\,e$ est un carré.
4. En déduire une construction des points e et f puis terminer la construction du tronc de pyramide.

EXERCICE 3 **8 points**

Les deux parties sont indépendantes

Une denrée alimentaire est placée dans un congélateur maintenu à la température de −30 degrés Celsius. Lorsque cette denrée reste placée dans le congélateur pendant une durée t, exprimée en heures. la température à cœur $C(t)$ de cette denrée, exprimée en degrés Celsius, est donnée par :

$$C(t) = a\mathrm{e}^{-kt} - 30$$

où a et k sont des constantes réelles.
Partie A - Détermination de a et k

1. Déterminer a sachant que $C(0) = 5$.
2. Calculer la valeur exacte de k sachant qu'au bout d'une heure, la température à cœur est égale à −23 degrés Celsius.

Partie B - Étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle [0 ; 3] par :

$$f(x) = 35\mathrm{e}^{-1,6x} - 30$$

1. La fonction dérivée de f est notée f'.
   a. Déterminer l'expression de $f'(x)$ en fonction de x sur l'intervalle [0 ; 3].
   b. Préciser le signe de $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 3].

2. Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous (les résultats seront arrondis au dixième).

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5	3
$f(x)$									

3. Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal en prenant 4 cm pour unité sur l'axe des abscisses et 0,5 cm pour unité sur l'axe des ordonnées.

4. En utilisant le graphique, déterminer graphiquement le temps nécessaire pour que la température atteigne -25 degrés Celsius.

5. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Retrouver le résultat de la question **4.** par le calcul.

Annexe à rendre avec la copie

Figure 1

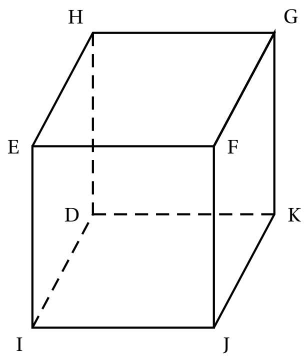
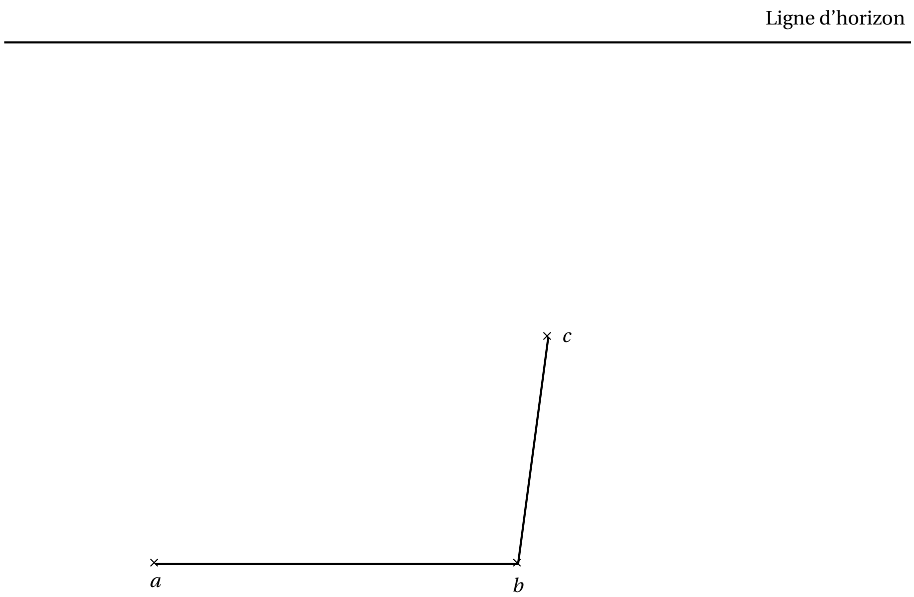


Figure 2



31 Antilles–Guyane Juin 2010

EXERCICE 1 **6 points**

Une urne A contient 100 boules indiscernables au toucher : 90 rouges et 10 noires.
Une urne B contient également 100 boules indiscernables au toucher : 30 rouges et 70 noires.

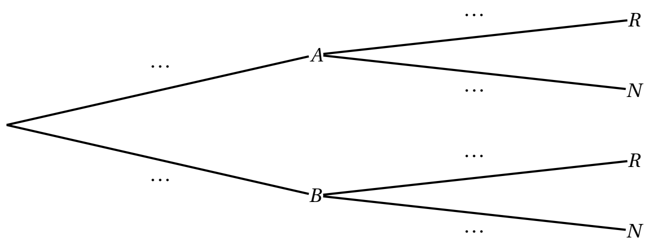
On réalise l'expérience suivante :
On lance un dé cubique équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

- si le numéro affiché par le dé est 1, on tire une boule dans l'urne A et on note sa couleur.
- Sinon, on tire une boule dans l'urne B et on note sa couleur.

On note :

- A l'évènement « tirer une boule dans l'urne A » ;
- B l'évènement « tirer une boule dans l'urne B » ;
- R l'évènement « tirer une boule rouge » ;
- N l'évènement « tirer une boule noire ».

1. Donner la probabilité $p(A)$ de l'évènement A.
2. Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



3. Décrire l'évènement $A \cap R$ et calculer sa probabilité.
4. Montrer que $p(R) = 0,40$.
5. **a.** Sachant que la boule obtenue après tirage est rouge, calculer la probabilité qu'elle provienne de l'urne A.

   b. Les évènements A et R sont-ils indépendants ?
6. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   On désire maintenant modifier la composition de l'urne B pour que, lorsqu'on réalise l'expérience décrite ci-dessus, on ait autant de chances d'obtenir une boule rouge qu'une boule noire.
   Proposer une composition de l'urne B qui convient. Expliquer la démarche de recherche.

EXERCICE 2 **4 points**

Soit (u_n) la suite définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_{n+1} & = & 0,9u_n + 90 \\ u_0 & = & 1000. \end{array}\right.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$v_n = u_n - 900.$$

   a. Calculer v_0 et v_1.

   b. Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = 0,9v_n$.

   c. Quelle est la nature de la suite (v_n) ? Écrire v_n en fonction de n.
3. En déduire que pour tout nombre entier n, $u_n = 100 \times (0,9)^n + 900$.
4. Quelle est la limite de u_n lorsque n tend vers l'infini ?
5. À partir de quel nombre entier n a-t-on $u_n \leqslant 901$?

EXERCICE 3 **6 points**

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = [1\ ;\ 7]$ par

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 6x + 4 + 8\ln(x).$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Compléter le tableau de valeurs donné dans **l'annexe 1**. On donnera des valeurs approchées à 10^{-1} près.
2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$, pour x dans l'intervalle I.

   b. Montrer que pour tout nombre réel x de l'intervalle I, $f'(x) = \dfrac{(x-2)(x-4)}{x}$.

   c. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I, puis dresser le tableau de variations de f.
3. Montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ admet deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses.
4. **a.** Dans le repère fourni dans l'annexe 1, construire la courbe $\mathscr{C}_f$ et ses deux tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

b. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle I.

EXERCICE 4 **4 points**

La *figure 1* représente le dessin en perspective cavalière d'un banc, dont l'assise rectangulaire $ABCD$ est composée de deux carrés de même taille : $AIJD$ et $BCJI$. Le point K désigne le centre du rectangle $ABCD$. Les quatre pieds $[AE]$, $[BF]$, $[CG]$ et $[DH]$ du banc ont tous la même longueur.

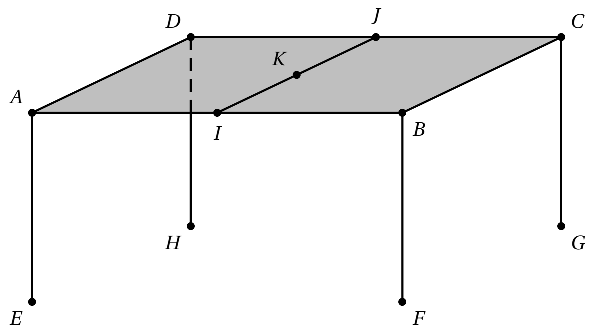


Figure 1

Dans toutes les constructions, laisser apparents les traits de construction. Repasser en gras la figure du banc.

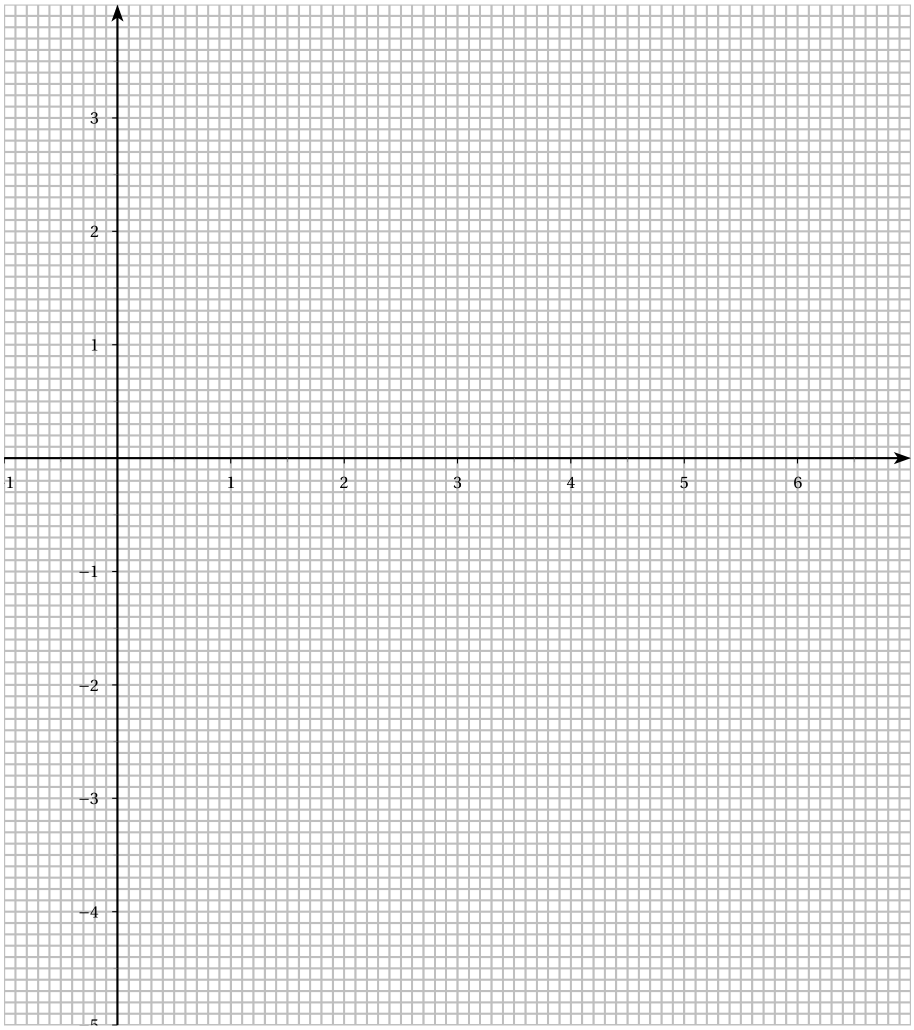
Les images de A, B, C, ... dans les représentations en perspective centrale sont notées avec des lettres minuscules : a, b, c, ...
$\mathscr{H}$ désigne la ligne d'horizon.

Les points I, B et F sont situés dans un plan frontal.
La *figure 2* de **l'annexe 2** représente le début du dessin de ce même banc dans une perspective centrale. Le point d_1 est l'un des points de distance de la perspective.

1. Construire le point de fuite principal. On le notera w.
2. Construire d_2, le deuxième point de distance et justifier la construction par une propriété des points de distance.
3. Construire l'image $abcd$ de l'assise $ABCD$ du banc.
4. Construire l'image k du point K puis terminer la construction de la représentation du banc.

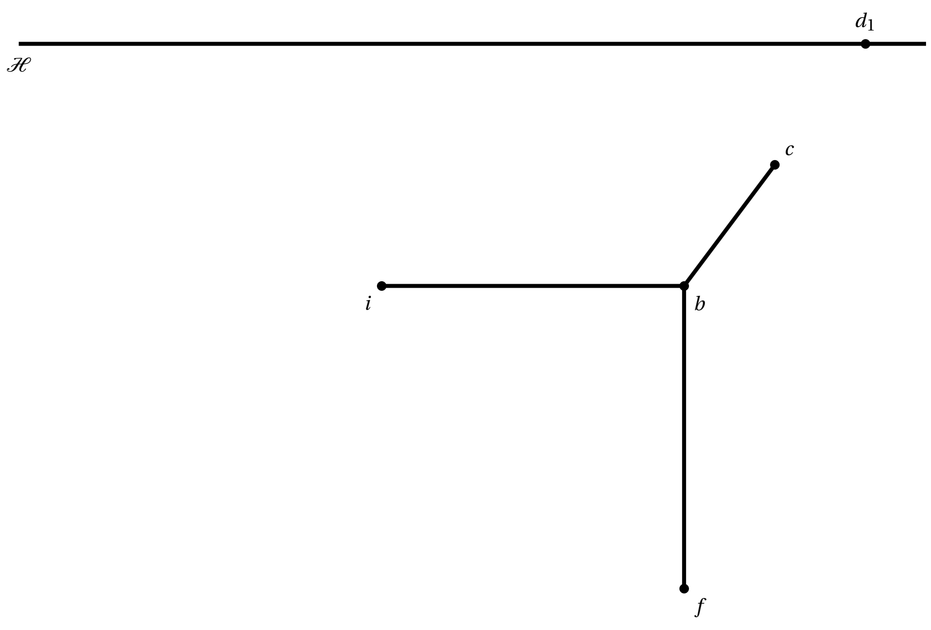
ANNEXE 1 (à rendre avec la copie)

x	1	2	3	4	5	6	7
$f(x)$ (à 10^{-1} près)			$-0,7$		$-0,6$	0,3	



ANNEXE 2 (à rendre avec la copie)

Figure 2



32 Asie Juin 2010

EXERCICE 1 **5 points**

Il s'agit de remplir la grille suivante dont chaque case blanche doit contenir exactement un chiffre (entre 0 et 9).

1. Pour y parvenir, il faut déterminer les quatre nombres entiers correspondants aux définitions ci-dessous. **Chaque réponse devra être justifiée**.

	A	B	C	D
1				
2				
3				
4				

Ligne 1 : Somme des 50 premiers termes de la suite arithmétique (u_n) de premier terme $u_1 = 4,37$ et de raison $r = 0,74$.
Ligne 2 : Nombre compris entre 5700 et 7800 et congru à 0 modulo 1134.
Ligne 3 : Nombre affiché en sortie de l'algorithme ci-dessous si on le fait fonctionner pour $n = 3$.

Entrée	a, b, i et n sont des entiers
Initialisation	
	Donner à i la valeur 0
	Donner à a la valeur 0
	Donner à b la valeur 0
Traitement	
	Tant que $i < n$:
	donner à i la valeur $i+1$;
	donner à a la valeur $46+a$.
	donner à b la valeur $a+b$.
Sortie	Afficher b.

Ligne 4 : $\lim_{n\to+\infty} -3(0,5)^n + 500$

2. **Élément de vérification**
On considère la fonction f définie sur$\mathbb{R}$ par $f(x) = \text{e}^{2070x}$.
a) Calculer $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.
b) Calculer $f'(0)$.
Le nombre de la colonne C est le nombre $f'(0)$.

EXERCICE 2 **5 points**

Les parties I et II peuvent être traitées indépendamment.

Partie I

Soit a et b deux nombres réels et f la fonction définie sur $]0\,;\,3]$ par $f(x) = -x^2 + a + b\ln x$.

Déterminer les réels a et b sachant que la courbe représentative de la fonction f passe par le point $A(1\,;\,1)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Partie II

On admet que pour le nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,3]$, on a : $f(x) = -x^2 + 2 + 2\ln(x)$

1. Rappeler la valeur de $\lim_{x\to 0} \ln(x)$ et en déduire $\lim_{x\to 0} f(x)$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f
a) Calculer $f'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\,;\,3]$, puis vérifier que $f'(x) = \dfrac{2(1-x)(1+x)}{x}$.
b) En déduire le tableau des variations de la fonction f.
3. On a représenté sur l'**annexe 1** la courbe $\mathscr{C}$ représentative de la fonction f dans le plan rapporté à un repère orthogonal.
a) Le point $B(\sqrt{2}\,;\,\ln(2))$ appartient-il à la courbe $\mathscr{C}$? Justifier.
b) À l'aide du graphique, déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $]0\,;\,3]$.
c) À l'aide de la calculatrice, donner un encadrement d'amplitude 0,01 de la plus grande de ces solutions.

EXERCICE 3 **5 points**

Un compagnie d'assurance automobile fait un bilan des frais d'intervention parmi ses dossiers d'accidents de la circulation.
92 % des dossiers entraînent des frais de réparation matérielle et 23 % des frais de dommages corporels.
De plus, parmi les dossiers entraînant des frais de réparation matérielle, 12 % entraînent aussi des frais de dommages corporels.

On choisit au hasard un dossier. Tous les dossiers ont la même probabilité d'être tirés.
On note :
M l'événement : « le dossier choisi entraîne des frais de réparation matérielle ».
C l'événement : « le dossier choisi entraîne des frais de dommages corporels ».

1. En utilisant les notations M et C, exprimer les trois pourcentages de l'énoncé en termes de probabilité ; les résultats seront donnés sous forme décimale.
2. a) Montrer que la probabilité de l'événement $M \cap C$ est égale à $0,1104$.
   b) Interpréter l'événement $M \cap \overline{C}$ puis calculer sa probabilité.
   c) Calculer la probabilité que le dossier choisi entraîne des frais de réparation matérielle sachant qu'il a entraîné des frais de dommages corporels.
3. *Dans cette question toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   L'assureur sait que 45 % des accidents sont dus à des excès de vitesse et que parmi ces dossiers avec excès de vitesse, 30 % ont entraîné des dommages corporels.
   On choisit au hasard un dossier. Sachant que l'accident correspondant entraîne des frais de dommages corporels, quelle est la probabilité que cet accident soit dû à un excès de vitesse ?
   Donner le résultat à 10^{-3} près.

EXERCICE 4 **5 points**

En Allemagne, au mois de novembre, la population célèbre traditionnellement la fête de la Saint-Martin. Cela se traduit par des cortèges nocturnes dans les rues accompagnés de chants. Pour cette occasion, chaque écolier fabrique une lanterne. La fête de la Saint-Martin est ainsi également appelée « Fête des Lanternes ».

Dans cet excercie, on va s'intéresser à la représentation des lanternes de deux écoliers : Marie et Daniel. Les dessins à compléter en annexe sont **à rendre avec la copie**.

On laissera apparents les traits de construction.

1. La *figure 1* représente la lanterne de Marie en perspective cavalière. Cette lanterne a la forme d'un parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ ouvert sur le dessus avec un fond $DCGH$ rigide et transparent : ses 4 faces latérales sont également transparentes et ses arêtes sont des tiges de bois rectilignes. Au centre de la face $DCGH$ est fixée une bougie dont la longueur est égale à la moitié de l'arête $[AD]$.

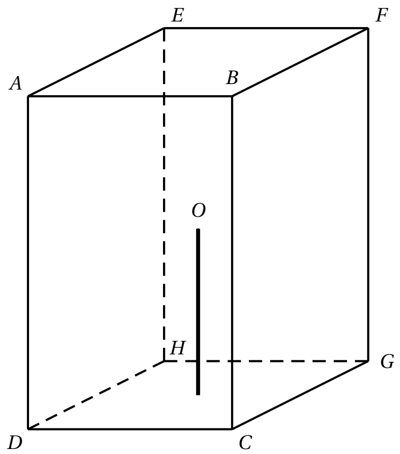


figure 1

   On veut construire sur le **dessin n° 1 de l'annexe 2** la représentation en perspective centrale de cette lanterne, la face $ABCD$ étant frontale.
   Les images de points $A, B, C, \cdots$ sont désignées par les lettres minuscules $a, b, c, \cdots$
   On a tracé la ligne d'horizon $\mathscr{H}$, le point de fuite principal ω et un point de distance d_1.
   a) Construire le deuxième point de distance d_2.
   b) Compléter la représentation du pavé droit $ABCDEFGH$.
   c) Terminer cette représentation en y construisant l'image de la bougie dans cette perspective centrale.
2. Daniel a fabriqué une lanterne de forme cubique $A'B'C'D'E'F'G'H'$. De plus il a choisi de décorer uniquement les deux faces $A'B'C'D'$ et $B'F'G'C'$ en dessinant des carrés identiques dont chaque sommet est le milieu d'une arête et il n'a pas mis de bougie au fond de sa lanterne.
   La **figure 2 de l'annexe 2** est une représentation en perspective cavalière de la lanterne de Daniel.

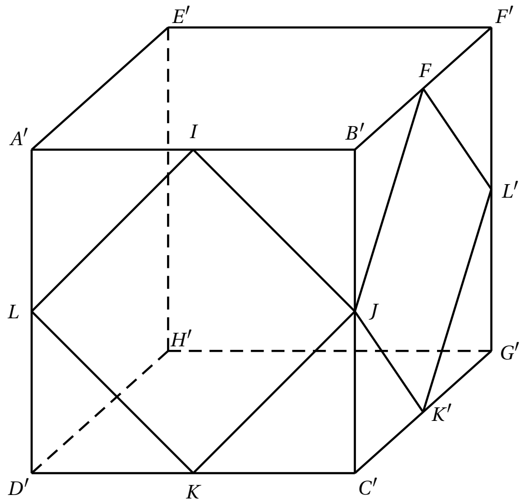
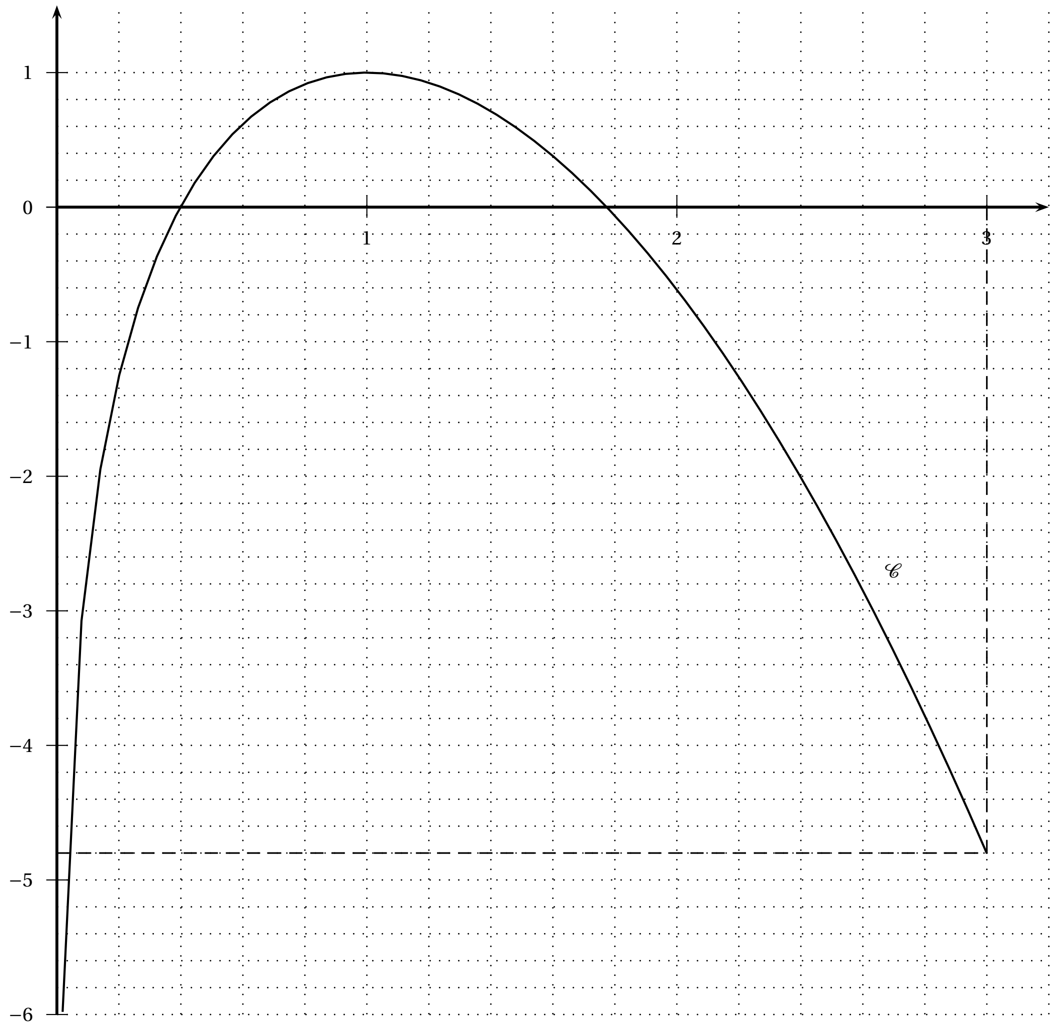


figure 2

Le **dessin n° 2 de l'annexe 2** est la représentation de la lanterne de Daniel en perspective centrale, l'arête $[B'C']$ étant dans le plan frontal. On a tracé la ligne d'horizon $\mathscr{H}$.

Compléter le **dessin n° 2 de l'annexe 2** par une représentation des décorations de Daniel.

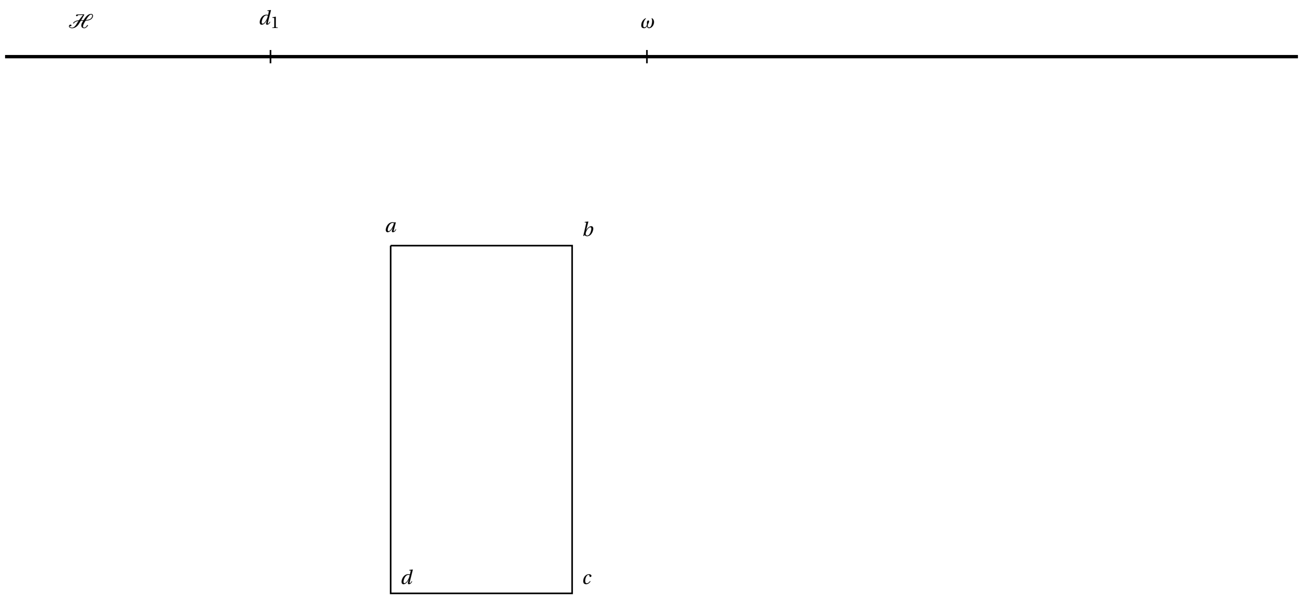
Exercice 2



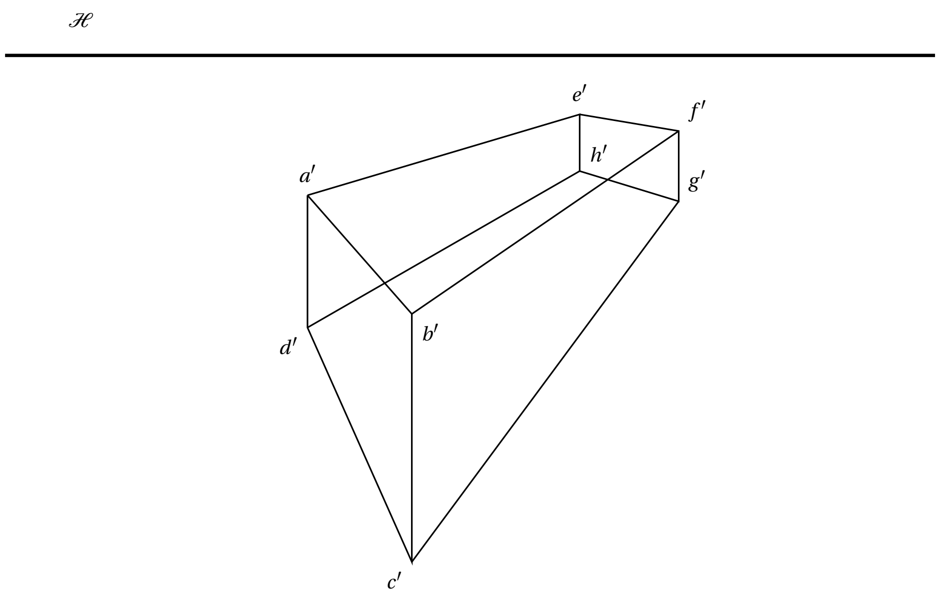
ANNEXE 2 (à compléter et à rendre avec la copie)

Exercice 4

dessin 1



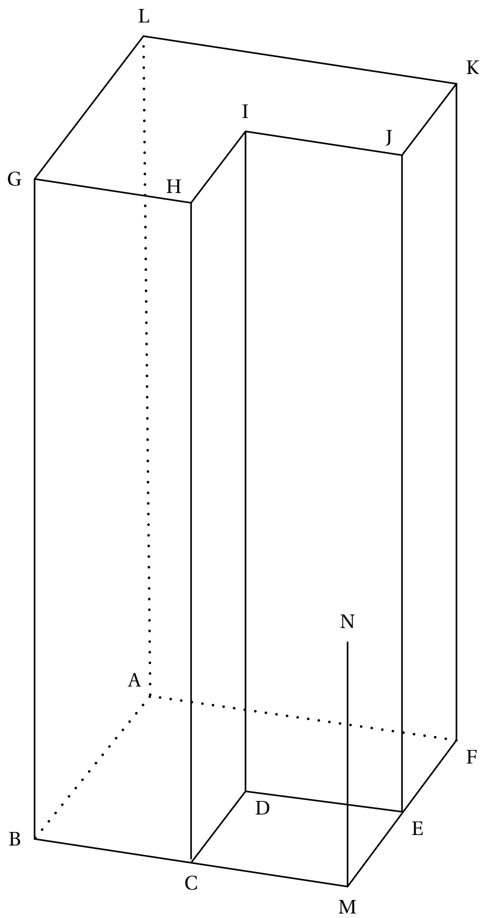
dessin 2



33 Métropole–La Réunion juin 2010

EXERCICE 1 **5 points**

Un immeuble a la forme du solide ABCDEFGHIJKL dont une représentation en perspective parallèle est donnée ci-dessous.



Une esplanade, qui a la forme du carré CDEM, jouxte cet immeuble.

À un coin de cette esplanade se trouve un mât vertical représenté par [MN].

ABMF est un carré de centre D.

Les points E et C sont les milieux respectifs des segments [MF] et [MB].

Trois dessins sont donnés en annexe. Ils sont à compléter et à rendre avec la copie, en laissant apparents les traits de construction.

1. On place un projecteur, qui est donc une source de lumière ponctuelle, au point H. Le dessin donné en **annexe 1** est une représentation de l'immeuble en perspective parallèle.
   a. Sur ce dessin représenter l'ombre du mât sur le sol.
   b. On note P le milieu du mât. Construire l'ombre `p` du point P.
2. À une certaine heure, les rayons du soleil sont parallèles à la droite (GC). Le dessin donné en **annexe 2** est encore une représentation de l'immeuble en perspective parallèle.
   a. Sur ce dessin représenter l'ombre au soleil du mât sur le sol à cette heure.
   b. L'ombre au soleil du milieu du mât est-elle le milieu de l'ombre du mât ? Justifier.
3. En **annexe 3** on a amorcé une représentation en perspective centrale de cet immeuble.
   On suppose que la face BCHG est située dans un plan frontal.
   Les points `b, g, k, f` et `m` sont les images des points B, G, K, F et M dans cette perspective. La droite (δ) est la ligne d'horizon.
   a. Construire les images `c, d` et `e` des points C, D et E (l'ordre de construction n'est pas imposé).
   b. Compléter la représentation en perspective centrale de l'immeuble. *On ne représentera ni le mât ni les arêtes cachées.*

EXERCICE 2 **6 points**

Soit la suite U de terme général U_n définie par $U_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, par :

$$U_{n+1} = U_n + 2(n+1).$$

1. Montrer que $U_1 = 2$ et que $U_2 = 6$. Calculer U_3.
2. Chacune des trois propositions suivantes est-elle vraie ou fausse ?
   Justifier les réponses.
   Proposition 1 : « La suite U est arithmétique. »
   Proposition 2 : « Il existe au moins une valeur de n pour laquelle $U_n = n^2 + 1$. »
   Proposition 3 : « Pour toutes les valeurs de n, on a $U_n = n^2 + 1$. »

3. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	N un entier naturel non nul
Initialisation :	P = 0
Traitement :	Pour K allant de 0 à N :
	Affecter à P la valeur P + K
	Afficher P
Fin de l'algorithme	

   a. Faire fonctionner cet algorithme avec N = 3.
   Obtient-on à l'affichage les valeurs des quatre premiers termes de la suite U ?

   b. Modifier cet algorithme de manière à obtenir à l'affichage les valeurs des N premiers termes de la suite U.

4. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel k, $\left(k^2+k\right)+2(k+1)=(k+1)^2+k+1$.

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\mathrm{U}_n = n^2+n$.

EXERCICE 3 **4 points**

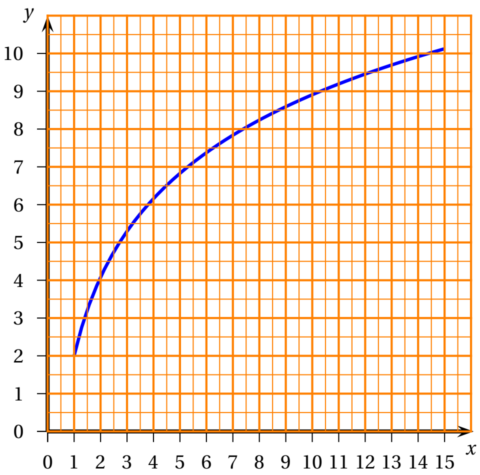
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,15]$ par

$$f(x) = 2+3\ln x.$$

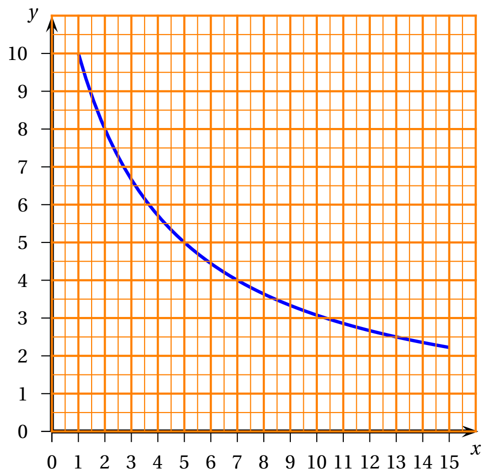
On appelle $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.
On note f' la fonction dérivée de f.

1. Calculer $f'(x)$, pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;\,15]$.
2. Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ en son point d'abscisse 1.
3. Résoudre l'équation $f(x) = 8$.
4. Parmi les trois représentations graphiques données ci-dessous, une seule représente la fonction f.
   Préciser quelle est cette représentation et justifier l'élimination de chacune des deux autres.

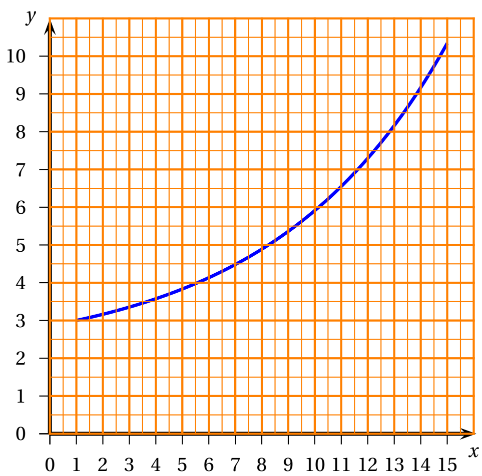
n° 1



n° 2



n° 3



EXERCICE 4 **5 points**

1. Justifier que $10^3 \equiv -1 (\text{modulo } 13)$.
2. **a.** En déduire le reste de la division euclidienne de 10^6 par 13.

   b. Montrer que $10^9 \equiv -1 (\text{modulo } 13)$ et que $10^{12} \equiv 1 (\text{modulo } 13)$.
3. Soit l'entier N = 5292729824628.

   a. En remarquant qu'une autre écriture de N est :

$$\mathrm{N} = 5 \times 10^{12} + 292 \times 10^9 + 729 \times 10^6 + 824 \times 10^3 + 628$$

   démontrer que N est congru à 246 modulo 13.

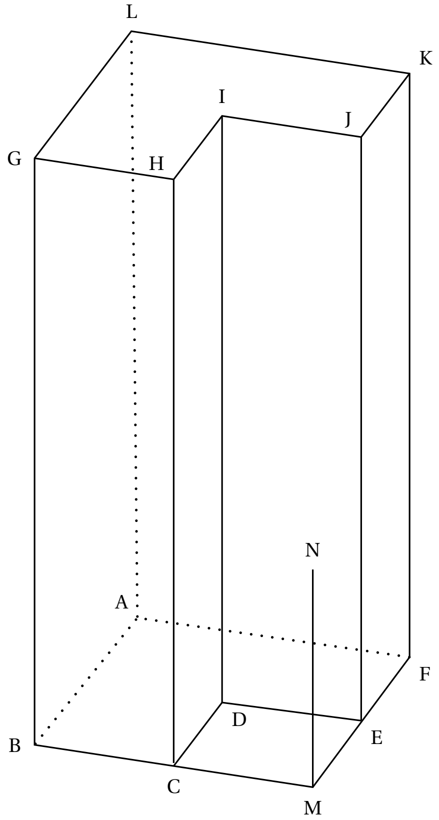
   b. N est-il divisible par 13 ?

   c. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

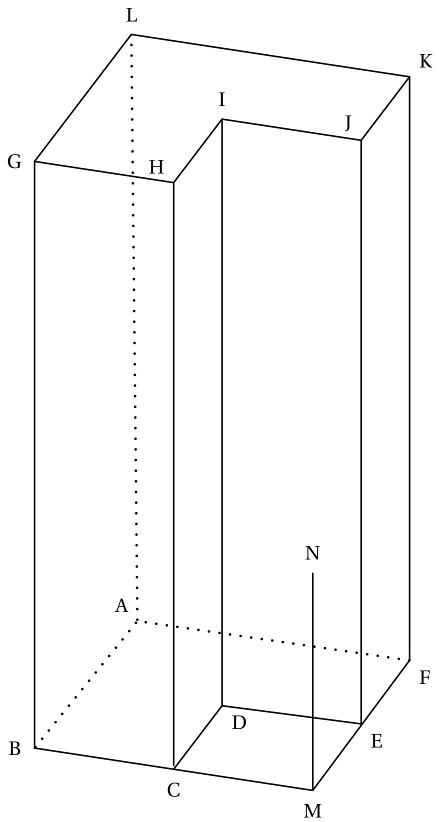
   Démontrer que le nombre $10^{2010} + 12$ est divisible par 13.

ANNEXES (à compléter et à rendre avec la copie)

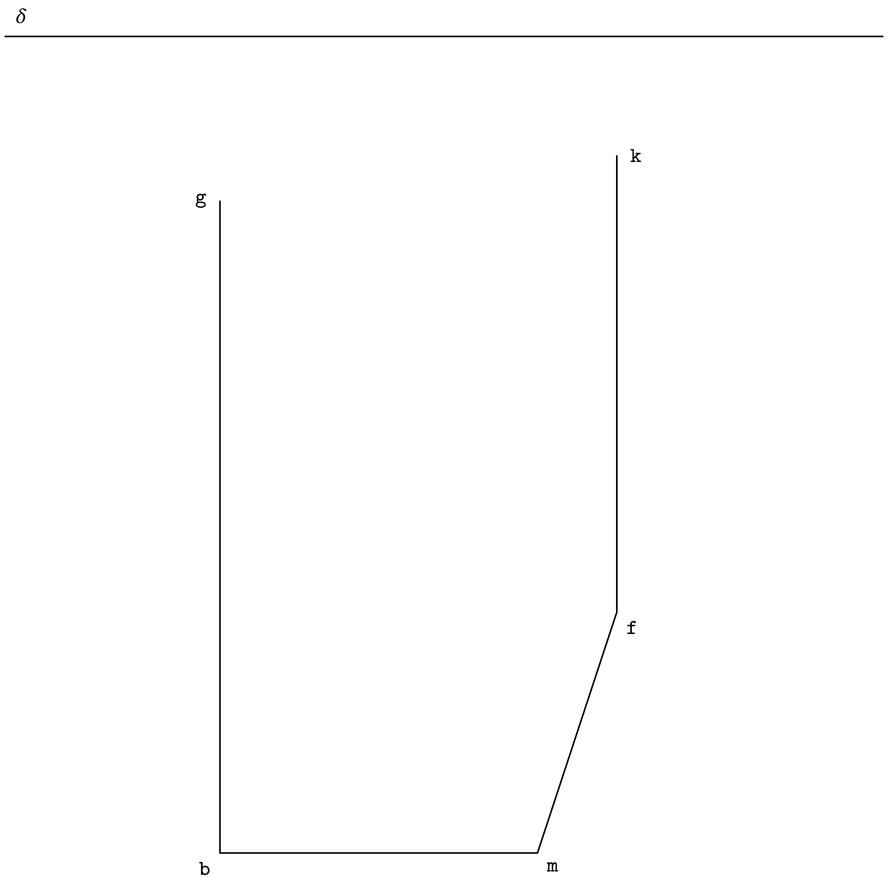
Annexe 1 – Exercice 1



Annexe 2 – Exercice 1



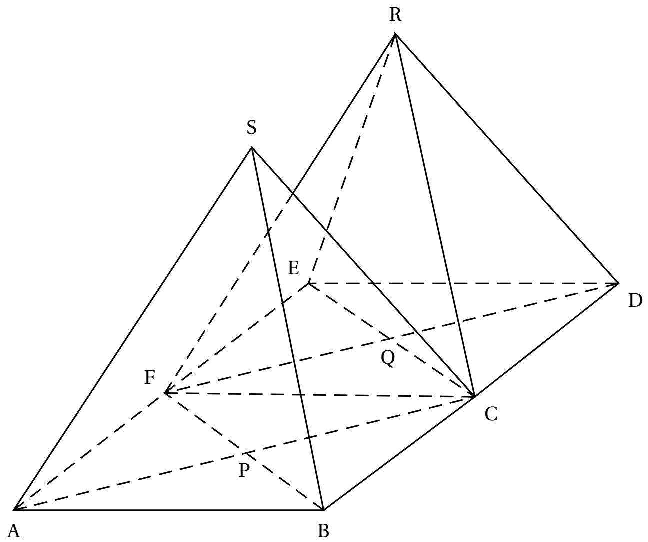
Annexe 3 – Exercice 1



34 Polynésie juin 2010

EXERCICE 1 **5 points**

On a représenté ci-dessous en perspective parallèle deux pyramides régulières à base carrée SABCF et RFCDE, de même hauteur SP et RQ, où P est le centre du carré ABCF et Q le centre du carré CDEF.
Le plan horizontal contient les six points A, B, C, D, E et F.
Les points A et B sont dans un plan frontal.



On veut reproduire cette figure en perspective centrale sur la feuille de l'annexe 1, à rendre avec la copie.
On laissera apparents tous les traits de construction

Dans la perspective centrale, on convient de noter avec une lettre minuscule les images des points. Ainsi `a` est l'image de A, `b` est l'image de B, etc. Sur la feuille de l'annexe 1, on a tracé la ligne d' horizon, notée (h), les segments [`ab`] et [`bc`] ainsi que le point `s`.

1. Placer le point de fuite `m` de la droite (BC) et le point de fuite `n` de la droite (AC).
2. Construire l'image `f` du point F. Donner deux propriétés de la perspective centrale qui justifient la construction du point `f`.
3. Construire les points `d` et `e` images respectives des points D et E.
4. Quel est le point de fuite de la droite (SR) ? On ne demande pas de justification.
5. Terminer la construction des deux pyramides.

EXERCICE 2 **5 points**

On considère les fonctions u et v définies sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$$u(x) = 10\mathrm{e}^{-2x} \quad \text{et} \quad v(x) = 0,1\mathrm{e}^{2x}.$$

On étudie la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par $f(x) = u(x) + v(x)$.
Soient $\mathscr{C}_u$, $\mathscr{C}_v$ et $\mathscr{C}_f$ les courbes représentant respectivement les fonctions u, v et f dans un repère orthogonal (Ox, Oy).

1. **a.** Calculer la fonction dérivée f' de f.
   b. Vérifier que, pour tout nombre réel x de $[0\,;2]$, $f'(x) = 2(v(x) - u(x))$.
   c. En déduire que les inéquations $f'(x) > 0$ et $v(x) > u(x)$ ont même ensemble de solutions.
   Les courbes $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$ sont tracées sur la feuille de l'annexe 2. On note α l'abscisse du point d'intersection des deux courbes $\mathscr{C}_u$ et $\mathscr{C}_v$.
2. Dans cette question, on résout graphiquement l'inéquation $v(x) > u(x)$.
   a. Ajouter sur le graphique le nom des courbes.
   b. Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, une valeur approchée du nombre α.
   c. Résoudre graphiquement, avec la précision permise par le graphique, l'inéquation $v(x) > u(x)$.
3. Donner le tableau de variation de la fonction f.
4. Compléter le graphique de l'annexe 2 en traçant la courbe $\mathscr{C}_f$.

EXERCICE 3 **5 points**

Dans cet exercice, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation

Trois amis Alain, Bernard et Corinne vont dîner à l'« Auberge de Bernoulli ». L'aubergiste propose de tirer au sort la personne qui payera le dîner. Il leur présente un sachet opaque qui contient quatre boules, dont trois blanches et une noire. Le premier des trois amis qui tire la boule noire paie tous les repas. Si aucun des trois ne tire la boule noire, l'aubergiste offre le dîner. Les trois amis veulent comparer deux méthodes différentes de tirer les boules.

Dans cet exercice, on notera :

- A l'évènement « Alain tire une boule noire »,
- B l'évènement « Bernard tire une boule noire »,
- C l'évènement « Corinne tire une boule noire »,
- $\overline{A}$, $\overline{B}$ et $\overline{C}$ les évènements contraires des précédents.

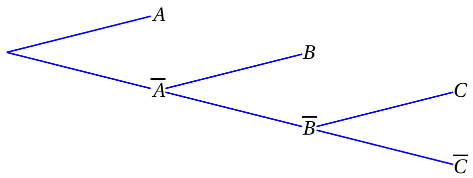
Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles

1. **Première méthode**

   Alain, Bernard et Corinne doivent tirer au hasard et l'un après l'autre, dans l'ordre alphabétique de leur prénom, **une boule puis la remettre dans le sachet**. Lorsque la boule noire est tirée, on arrête les tirages.

   a. Calculer la probabilité de l'évènement A, notée $p(A)$, et la probabilité conditionnelle de l'évènement B sachant que $\overline{A}$ est réalisé, notée $p_{\overline{A}}(B)$.

   b. Recopier et compléter l'arbre de probabilités suivant :



   c. Calculer $p(B)$ et $p(C)$.

   d. Quelle est la probabilité de l'évènement « l'aubergiste offre le dîner » ?

2. **Deuxième méthode**

   Alain, Bernard et Corinne doivent tirer au hasard et l'un après l'autre, dans l'ordre alphabétique de leur prénom, **une boule sans la remettre dans le sachet**. Lorsque la boule noire est tirée, on arrête les tirages.

   a. Calculer les probabilités des évènements A, B et C.
   Calculer la probabilité de l'évènement « l'aubergiste offre le diner ».

3. Expliquer pourquoi Corinne préfère la première méthode.
   Quelle est la méthode la plus favorable à l'aubergiste ?

EXERCICE 4 **5 points**

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	:	Affecter à N la valeur 0.
		Affecter à U la valeur 10.
Traitement	:	Tant que $U \leqslant 100$
		Affecter à N la valeur N + 1.
		Affecter à U la valeur 2U - 5.
Sortie	:	Afficher N.

Faire fonctionner cet algorithme en complétant certaines des cases du tableau de l'annexe 2.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 2u_n - 5$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. On veut démontrer, pour tout nombre entier naturel n, l'égalité (E_n) :

$$u_n = 5 \times 2^n + 5$$

   a. Soit k un nombre entier naturel. Montrer que si l'égalité $\left(E_k\right)$ est vraie, alors l'égalité $\left(E_{k+1}\right)$ est vraie.

   b. Que reste-t-il à vérifier pour démontrer que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 5 \times 2^n + 5$?

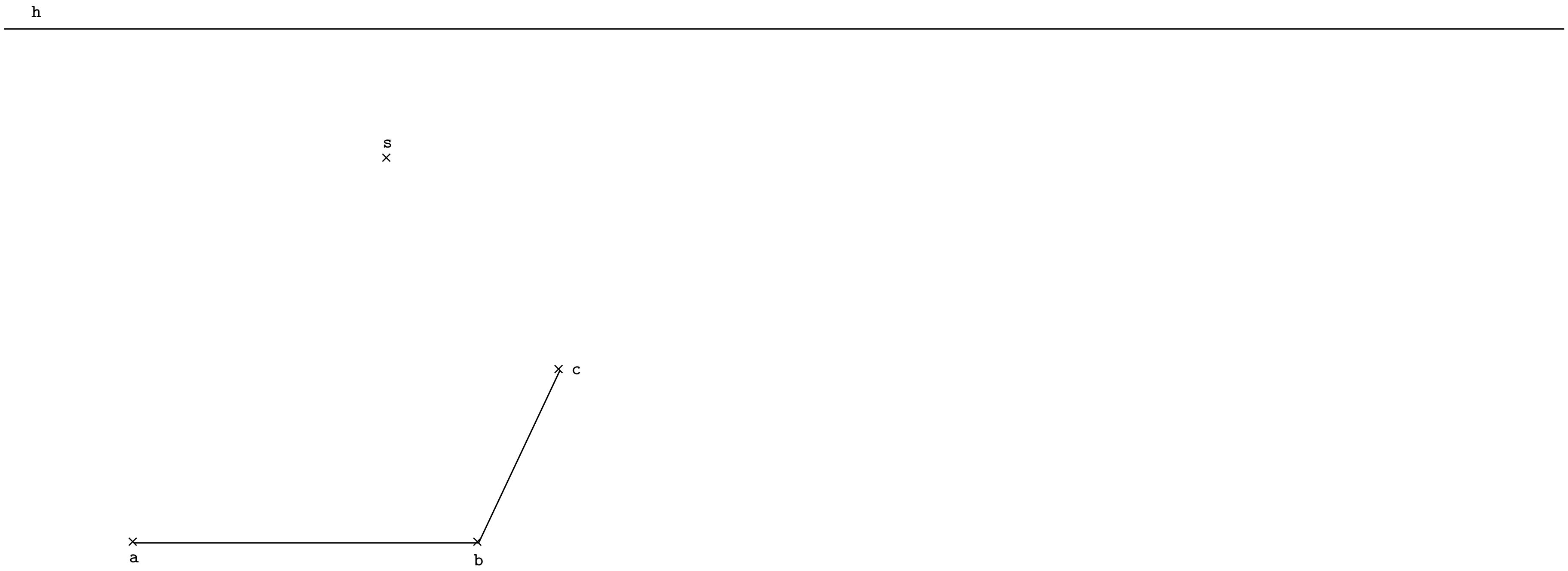
Partie C

On cherche la plus petite valeur n_0 de n telle que $u_n > 1000$.

1. Expliquer comment modifier l'algorithme de la partie A pour obtenir cette valeur n_0.
2. Déterminer cette valeur n_0.

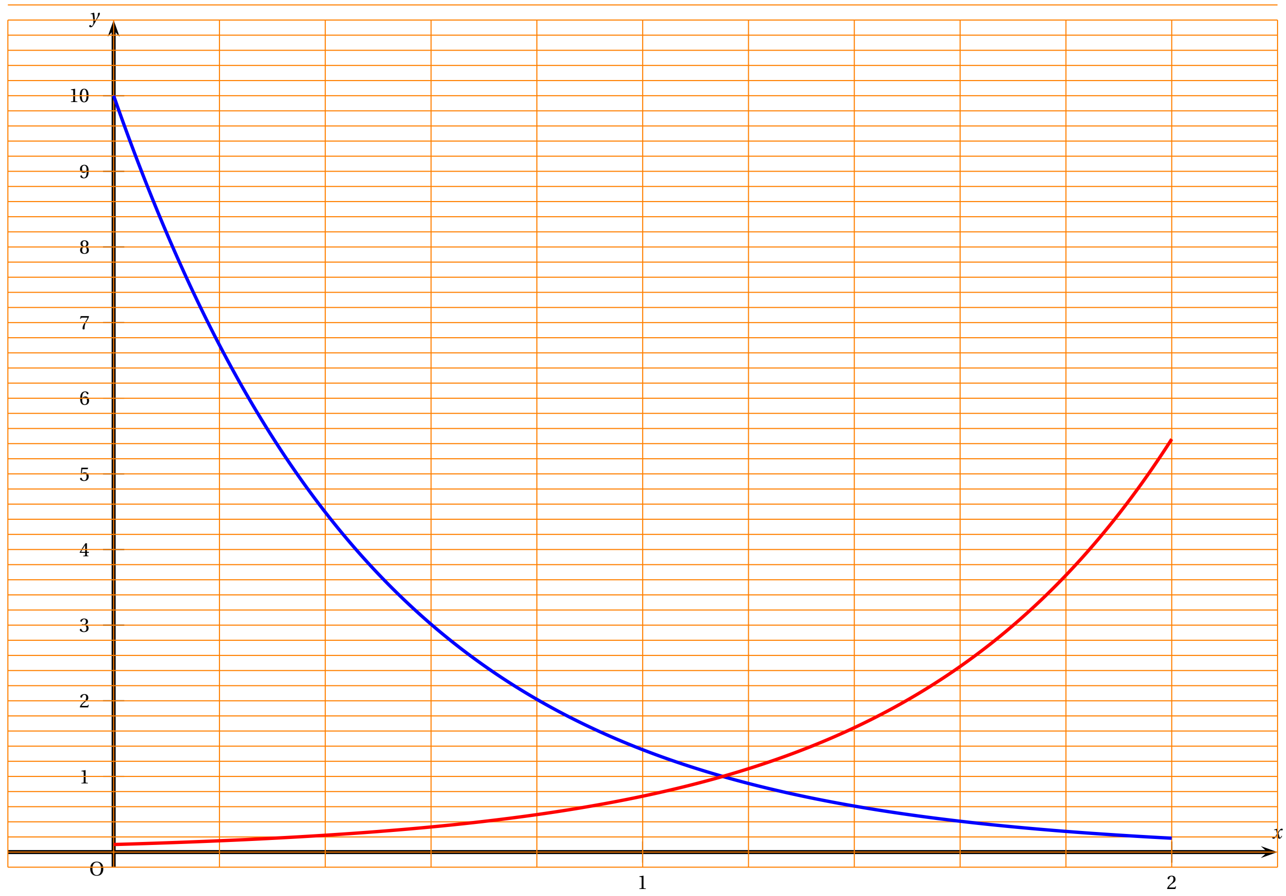
Annexe 1 (à rendre avec la copie :

Exercice 1



Annexe 2 (à rendre avec la copie)

Exercice 2



Exercice 4

initialisation											
	N										
	U										
traitement		étape 1	étape 2	étape 3	…	…	…	…	…	…	…
	N										
	U										
sortie											

35 Centres étrangers juin 2010

EXERCICE 1 **4 points**

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 3]$ par

$$f(x) = x + 4\ln(3x + 1) + 3.$$

1. On désigne par f' la fonction dérivée de f sur $[0 ; 3]$.
   Montrer que, pour tout nombre x appartenant à $[0 ; 3]$, $f'(x) = \dfrac{3x + 13}{3x + 1}$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur $[0 ; 3]$ et dresser son tableau de variation.

Partie B

Dans cette partie, on considère un enfant dont le poids à la naissance est 3 kg.
Pendant les trois premières années de la vie de l'enfant, on estime que son poids (en kg) est donné en fonction de son âge x (en année) par $f(x) = x + 4\ln(3x + 1) + 3$.
La courbe représentative de la fonction f est donnée dans l'Annexe 1 à rendre avec la copie.

1. Calculer le poids de cet enfant à l'âge de 6 mois. On donnera une valeur arrondie au dixième.
2. Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, l'âge correspondant à un poids de 12 kg. On laissera apparents les traits de construction utiles à la lecture.

EXERCICE 2 **5 points**

1. **a.** Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $10^n \equiv 1 \pmod 9$.
   b. On considère quatre nombres entiers naturels a, b, c et d compris entre 0 et 9, a différent de 0. On pose $N = 1000a + 100b + 10c + d$.
   Montrer que $N \equiv a + b + c + d \pmod 9$.

   Dans la suite, on admettra que le résultat que l'on vient de montrer pour un nombre à quatre chiffres est valable pour tout nombre entier naturel, quel que soit son nombre de chiffres. Autrement dit, tout nombre entier naturel N est congru modulo 9 à la somme de ses chiffres.
2. En utilisant le résultat précédent, déterminer les restes dans les divisions par 9 des nombres 321765 et 415283.
3. En déduire le reste dans la division par 9 du produit 321765×415283.
4. Jules a posé la multiplication 321765×415283 et a obtenu 133623534485.
   Peut-on affirmer, sans effectuer l'opération, que le résultat n'est pas correct ? Justifier la réponse donnée.

EXERCICE 3 **4 points**

Le dessin donné dans la figure 1 de l'annexe 2 montre une partie du mur qui divisait Berlin. Le mur est vertical et de hauteur constante, il est bordé d'une allée horizontale et rectangulaire. La photo montre également l'ombre du mur, portée par le soleil sur le sol de l'allée. La ligne d'horizon est parallèle au bord inférieur du dessin.

1. Dessiner sur la figure 1 de l'annexe 2 les lignes de fuite du haut et du bas du mur puis la ligne d'horizon. Pour une meilleure lisibilité des tracés, on prolongera les lignes en dehors du cadre de la photo.
2. La figure 2 de l'annexe 2 est le début d'un dessin en perspective centrale de ce site. Le quadrilatère `abcd` est l'image du mur, le segment [`be`] est l'image de l'entrée de l'allée.
   a. Justifier que les deux droites (`ab`) et (`cd`) ont le même point de fuite ω. Placer ce point sur le dessin.
   b. Compléter le quadrilatère `abef` image de l'allée.
   c. À l'entrée de l'allée est posé un bac à fleur parallélépipédique EGHIJKLM.
   La base EGHI repose sur le sol et la face EGKJ est frontale. Les images `e, g, h` et `k` des points E, G, H et K sont placées sur la figure 2. Compléter sur le dessin l'image `eghijklm` de ce bac.

EXERCICE 4 **7 points**

Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante
Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Entrée	:	Saisir deux nombres entiers naturels non nuls m et n. Créer une liste vide L.
Initialisation	:	Affecter à i la valeur 1.
Traitement	:	Tant que $i \leqslant n+1$ Affecter à r le reste de la division de m par n. Affecter à m la valeur de $10r$. Ajouter le quotient de la division de m par n à la fin de la liste L. Affecter à i la valeur $i+1$.
Sortie	:	Afficher la liste L.

1. Appliquer cet algorithme à $m = 13$ et $n = 7$.
   On reproduira sur la copie un tableau analogue à celui donné ci-dessous et on le complétera.

	r	m	Liste L	i
Initialisation		13		1
Fin étape 1				
Fin étape 2				
……				
……				

2. Écrire le début du développement décimal de $\dfrac{13}{7}$, obtenu à la calculatrice.
   Que représente la liste L pour le nombre $\dfrac{13}{7}$?
3. Le nombre $\dfrac{13}{7}$ est-il un nombre décimal ? Justifier la réponse donnée.

Partie B

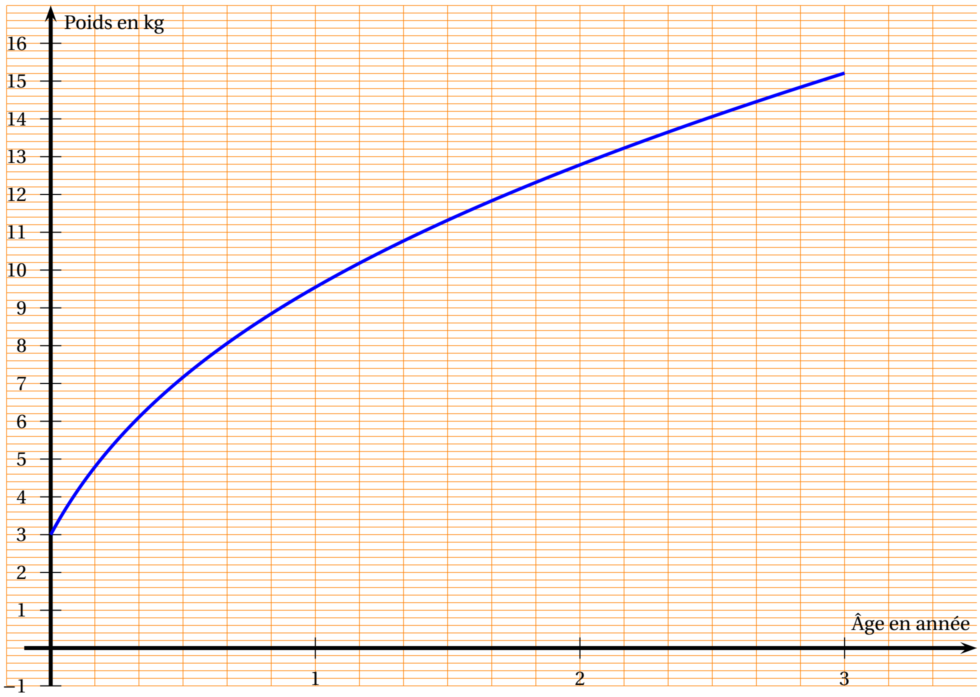
1. On considère le nombre B dont l'écriture décimale illimitée est 0,375375375… où 375 est répété indéfiniment. Le nombre B est-il rationnel ? Justifier la réponse donnée.
2. On considère la suite (u_n) définie par son premier terme $u_1 = 0,375$ et, pour tout nombre entier naturel n, $u_{n+1} = 10^{-3}u_n$.
   a. Quelle est la nature de la suite (u_n) ?
   b. On considère, pour tout nombre entier naturel n, la somme S_n des n premiers termes de la suite (u_n). On a donc $S_n = u_1 + u_2 + \ldots.. + u_n$.
   Exprimer S_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (S_n).
   c. En déduire l'écriture du nombre B sous la forme d'une fraction irréductible.

Partie C

Dans cette partie, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

On considère le nombre C dont l'écriture décimale illimitée est 2,585858… où 58 est répété indéfiniment. Écrire le nombre C sous la forme d'un quotient de deux nombres entiers.

Annexe 1 (à compléter et à rendre avec la copie)



Annexe 2 (à compléter et à rendre avec la copie)

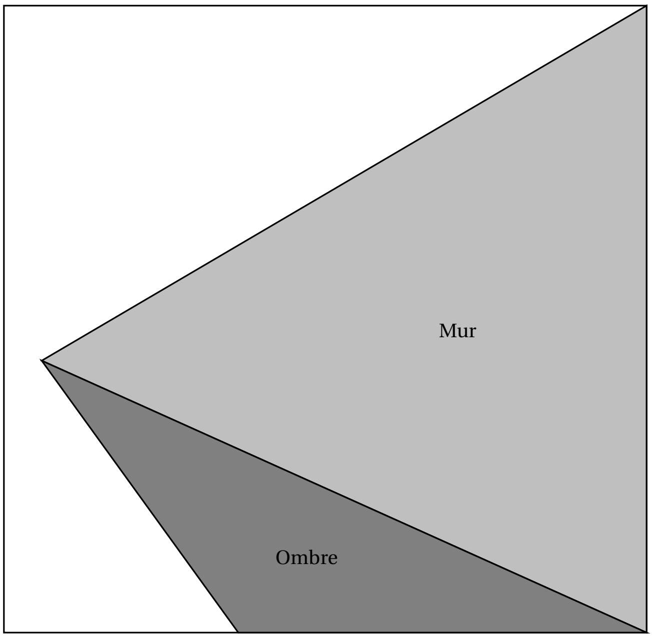
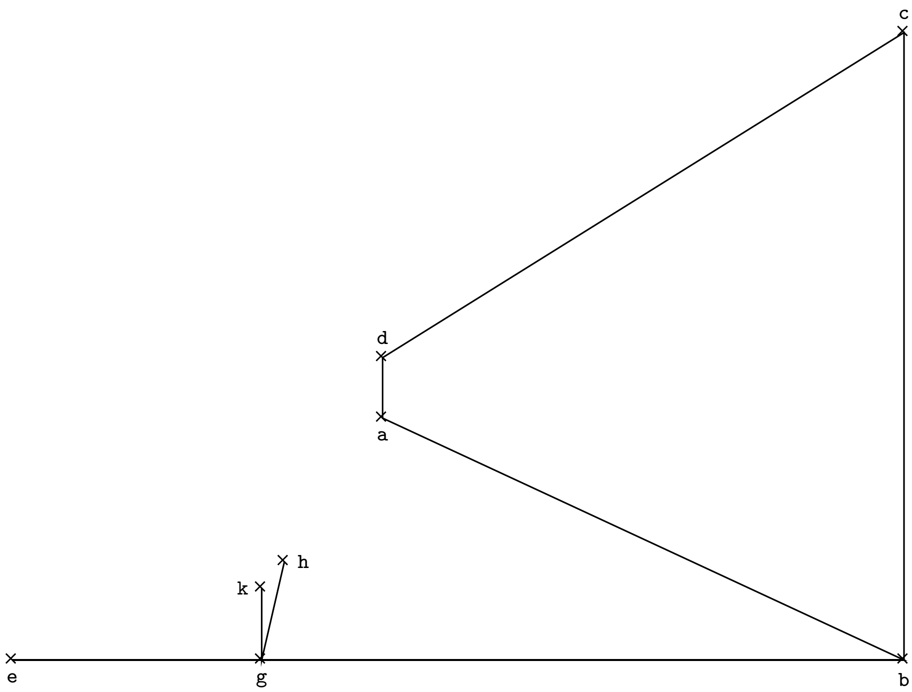


figure 1

figure 2

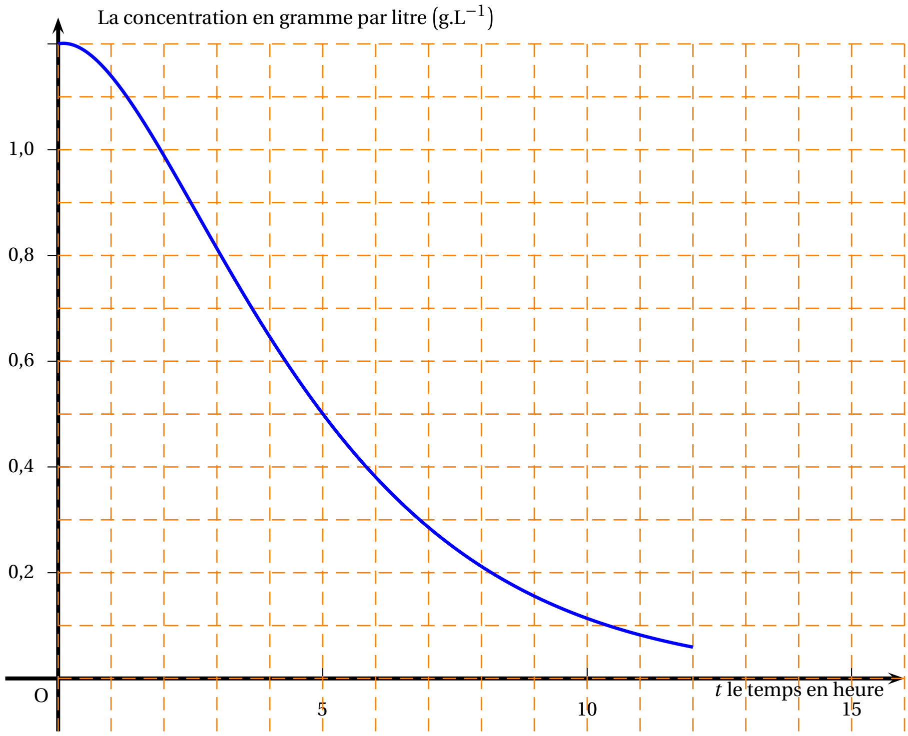


36 Métropole–La Réunion 17 septembre 2010

EXERCICE 1 **5 points**

Commun à tous les candidats

Un groupe de chercheurs étudie l'élimination d'un médicament dans le sang. Pour cela, on a injecté ce médicament par intraveineuse à un patient volontaire. On a fait une première mesure à un instant que l'on appelle instant initial. À partir de cet instant initial on a mesuré pendant 24 heures la concentration en gramme par litre $\left(\text{g.L}^{-1}\right)$ de médicament restant dans le sang du patient. Pour les 12 premières heures, on a ainsi obtenu la courbe suivante :



1. On répondra aux questions du 1. par simple lecture graphique.
   - **a.** Quelle est, en $\left(\text{g.L}^{-1}\right)$, la concentration du produit dans le sang du patient à l'instant initial ?
   - **b.** Que devient cette concentration au bout de 2 heures ?
   - **c.** Pour que la personne ait le droit de conduire, il faut que la concentration de médicament dans le sang soit inférieure à $0,4\ \left(\text{g.L}^{-1}\right)$. À partir de combien de temps après l'instant initial la personne peut-elle alors prendre le volant ?
2. On admet que l'on peut modéliser cette situation par la fonction f. Si t mesure le temps en heure, la concentration $f(t)$ à l'instant t est donnée par la formule :

$$f(t) = (0,5t + 1,2)\mathrm{e}^{-0,4t}, \text{ pour tout } t \text{ élément de } [0\ ;\ 24].$$

   - **a.** En utilisant ce modèle, retrouver les résultats des deux questions 1. a. et 1. b.
   - **b.** On appelle f' la fonction dérivée de f.
     Vérifier que, pour tout t de $[0\,;\,24]$, $f'(t) = (-0,2t + 0,02)\mathrm{e}^{-0,4t}$.
   - **c.** La fonction f est-elle décroissante sur $[0\,;\,24]$? Justifier.
   - **d.** En utilisant ce modèle et à l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de combien d'heures après l'instant initial, la concentration devient inférieure à $0,06\ \left(\text{g.L}^{-1}\right)$.

EXERCICE 2 **4 points**

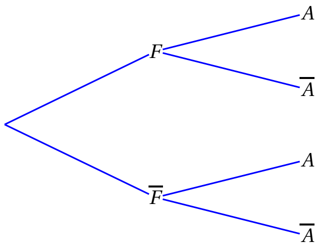
Commun à tous les candidats

On s'est aperçu que 35 % des personnes qui entraient dans un magasin de chaussures étaient des hommes. D'autre part, panni les personnes qui entrent dans ce magasin, 40 % des femmes et 55 % des hommes ont fait au moins un achat.

On interroge au hasard une personne à la sortie du magasin.

On note A l'évènement : « la personne interrogée a fait au moins un achat » et $\overline{A}$ l'évènement contraire de A.
On note F l'évènement : « la personne interrogée est une femme » et $\overline{F}$ évènement contraire de F.

1. Reproduire et compléter sur la copie l'arbre de probabilité donné ci-dessous.



2. Déterminer la valeur de $p(A)$.
3. Sachant qu'elle n'a fait aucun achat, quelle est la probabilité que la personne interrogée soit un homme ?
On arrondira au centième.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

On considère la suite v de terme général v_n définie par :

$$v_0 = 1000 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ \ v_{n+1} = v_n \times 1,005 + 30.$$

On considère l'algorithme suivant :

Entrées	:	Deux nombres entiers S et N
Traitement	:	Pour K allant de 1 à N
		Donner à S la valeur S $\times 1,005$
Afficher	:	S

Partie A :

1. Calculer v_1 et donner une valeur arrondie au millième de v_4.
2. Faire fonctionner cet algorithme pour S = 1000 et N = 4. Dans l'affichage final arrondir le résultat au millième.
3. Transformer l'algorithme proposé afin qu'il affiche en sortie finale v_4.

Partie B :

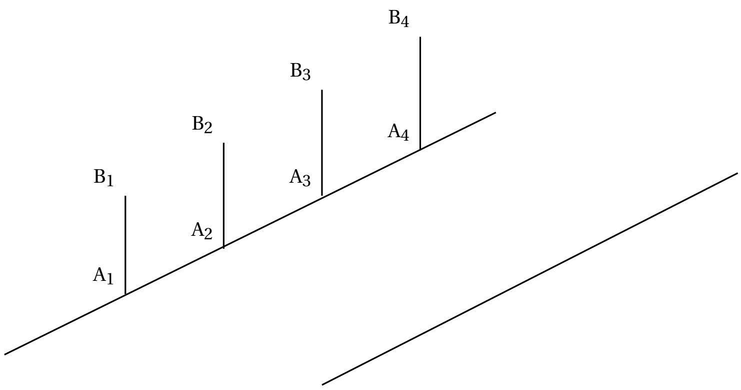
On place 1000 € sur un livret qui rapporte 0,5 % par mois à intérêts composés. Chaque fin de mois, on y verse la somme de 30 €. Ce livret est bloqué pour 5 ans ce qui signifie que, sur cette période, il est donc impossible de retirer de l'argent.

1. Vérifier qu'à la fin du premier mois, la somme présente sur le livret est égale à 1035 €.
2. Donner un algorithme qui permet d'afficher en sortie finale la somme présente sur ce livret au bout d'une année.
On ne demande pas de calculer cette somme.

EXERCICE 4 **6 points**
Commun à tous les candidats

Deux dessins sont donnés en annexe. Ils sont à compléter et à rendre avec la copie.
On laissera apparents les traits de construction. Aucune autre justification n'est demandée.

Des piquets de même hauteur et régulièrement espacés sont plantés sur l'un des bords d'une route rectiligne. Dans le dessin ci-dessous, on a représenté ces piquets en perspective parallèle par les segments $[A_1B_1]$, $[A_2B_2]$, $[A_3B_3]$ et $[A_4B_4]$.



Partie A :

Un lampadaire représenté par le segment [LS] est disposé sur l'autre bord de la route confonnément au dessin en perspective parallèle donné en **annexe 1**.

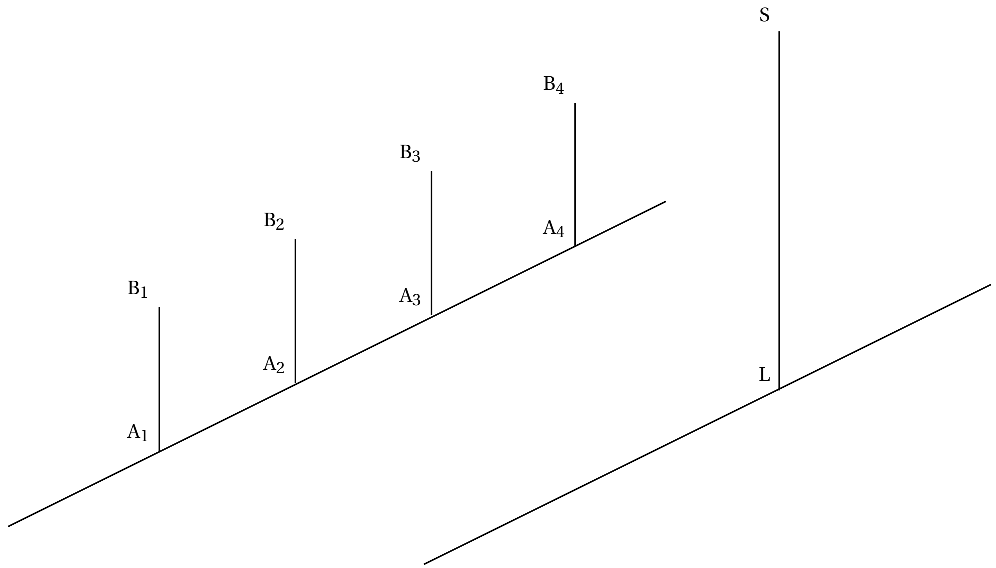
Tracer en **annexe 1** l'ombre sur le sol de chacun des quatre piquets du lampadaire. La source lumineuse est située au point S. On repassera les ombres des piquets en couleur.

Partie B :

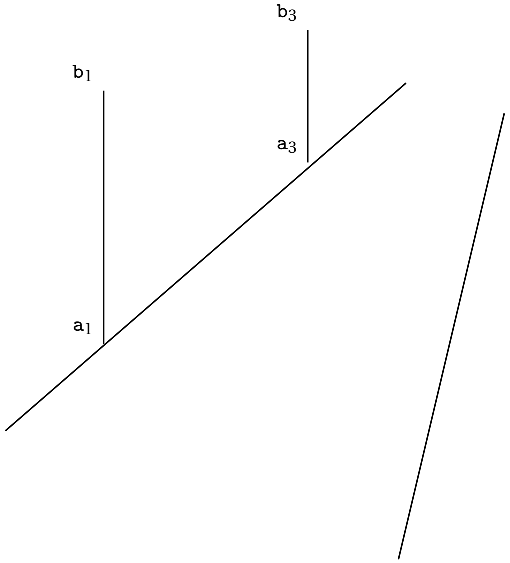
On dessine la même route en perspective centrale sur le dessin donné en **annexe 2**, les plans frontaux étant perpendiculaires à la route. On a représenté le premier et le troisième piquet par les segments $[\mathtt{a}_1\mathtt{b}_1]$ et $[\mathtt{a}_3\mathtt{b}_3]$. Les points $\mathtt{a}_1$, $\mathtt{b}_1$, $\mathtt{a}_3$ et $\mathtt{b}_3$ sont les images respectives par la perspective centrale des points A_1, B_1, A_3 et B_3.

1. Placer le point de fuite principal F.
2. Tracer la ligne d'horizon (δ).
3. Dessiner en **annexe 2** les images des deuxième et quatrième piquets.

Annexe 1 (à compléter et à rendre avec la copie)
Exercice 4



Annexe 2 (à compléter et à rendre avec la copie)
Exercice 4



37 Nouvelle–Calédonie novembre 2010

EXERCICE 1 **7 points**

Un Centre Culturel propose, pour l'année, différentes sortes de spectacles :

- 24 spectacles de théâtre,
- 12 spectacles de musique,
- 4 spectacles de danse.

Afin de recevoir davantage de public pour certaines manifestations, 25 % des spectacles de théâtre, 50 % des spectacles de musique et un seul spectacle de danse ont lieu sous chapiteau. Les autres spectacles ont lieu dans le Centre Culturel.
Une personne choisit au hasard un spectacle parmi les 40 spectacles programmés.

On note T l'événement « Le spectacle choisi est un spectacle de théâtre ».
On note M l'événement « Le spectacle choisi est un spectacle de musique ».
On note D l'événement « Le spectacle choisi est un spectacle de danse ».
On note P l'événement « Le spectacle choisi a lieu sous chapiteau ».

Partie 1

Compléter l'arbre de probabilité illustrant cette situation sur la feuille annexe 1 à remettre avec la copie.

Partie 2

*Pour chacune des propositions suivantes, une seule des réponses **A, B** ou **C** est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Une réponse exacte rapporte* 1 *point. Une réponse fausse n'enlève aucun point. L'absence de réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun.*

1. La probabilité que la personne choisisse un spectacle de musique est :

   A : $\frac{1}{3}$ B : 0,3 C : $\frac{1}{40}$

2. La personne ayant choisi un spectacle de théâtre, la probabilité de ne pas être sous chapiteau est :

   A : 0,75 B : $\frac{1}{4}$ C : $\frac{18}{40}$

3. La probabilité que la personne choisisse un spectacle de musique sous chapiteau est :

   A : 0,5 B : $\frac{3}{20}$ C : 0,12

4. La probabilité d'avoir choisi un spectacle sous chapiteau est :

   A : $\frac{76}{100}$ B : 0,33 C : $\frac{13}{40}$

5. Le spectacle ayant lieu sous chapiteau, la probabilité d'avoir choisi un spectacle de musique est

   A : $\frac{6}{13}$ B : 0,5 C : $\frac{13}{40}$

EXERCICE 2 **6 points**

Pierre affirme : « Pour tout entier naturel n, les nombres $n^2 - 1$ et $n^3 - n$ sont multiples de 3 ».
Jules dit « quel que soit l'entier naturel n, $2n^2 + n + 1$ n'est pas divisible par 3 ».

1. Pierre et Jules réalisent le tableau suivant que **vous recopierez et complèterez sur votre copie :**

n	n^2	n^3	$n^2 - 1$	$n^3 - n$	$2n^2 + n + 1$
1					
4					
5					
10					

2. La seule lecture du tableau précédent permet-elle de dire :
   a. que l'affirmation de Pierre est exacte ?
   b. que l'affirmation de Jules est exacte ?

3. **a.** Recopier le tableau suivant et le compléter en utilisant les propriétés des congruences. Les résultats donnés seront **des entiers naturels inférieurs ou égaux à 2**.

Si $n \equiv 0 \mod 3$	Si $n \equiv 1 \mod 3$	Si $n \equiv 2 \mod 3$
$n^2 \equiv \ldots \mod 3$	$n^2 \equiv \ldots \mod 3$	$n^2 \equiv \ldots \mod 3$
$n^2 - 1 \equiv \ldots \mod 3$	$n^2 - 1 \equiv \ldots \mod 3$	$n^2 - 1 \equiv \ldots \mod 3$
$n^3 \equiv \ldots \mod 3$	$n^3 \equiv \ldots \mod 3$	$n^3 \equiv \mod 3$
$n^3 - n \equiv \ldots \mod 3$	$n^3 - n \equiv \ldots \mod 3$	$n^3 - n \equiv \ldots \mod 3$

b. Que peut-on en conclure pour l'affirmation de Pierre ?

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

En utilisant une méthode similaire à celle développée dans la question 3., démontrer que la propriété énoncée par Jules est exacte.

EXERCICE 3 **7 points**

On considère la fonction exponentielle définie sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$, notée f et définie par $f(x) = \mathrm{e}^x$. La représentation graphique $\mathscr{C}$ de cette fonction dans un repère est donnée sur la feuille **annexe 2**.

Les points à placer et les tracés demandés seront effectués sur l'annexe 2 à remettre avec la copie.

1. Placer sur la courbe $\mathscr{C}$ le point A_0 d'abscisse 1. Quelles sont ses coordonnées (donner les valeurs exactes) ?
2. On a placé sur l'axe des abscisses les points B_0, B_0, B_02, B_0 d'abscisses respectives 0, -1, -2, -3. En appliquant l'algorithme suivant, compléter le dessin :

   Initialisation : affecter à i la valeur 0.
   A_0 est le point défini dans la question 1.
   Traitement : tant que $i \leqslant 3$ tracer le segment $[A_iB_i]$,
   Affecter à i la valeur $i+1$.
   Placer le point $A_i(1-i\,;\, f(1-i))$ ».
   (*Aide* : on trouvera comme point A_1 le point de coordonnées $(0\,;\,1)$ ».
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A_0. Démontrer que cette tangente est la droite (A_0B_0).
4. Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A_1. Démontrer que cette tangente est la droite (A_1B_1).

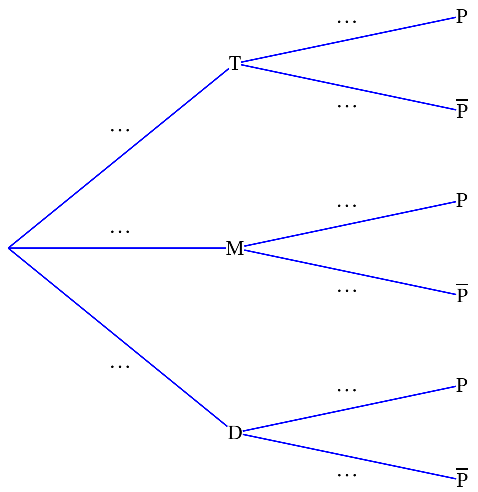
   On admettra que cette propriété démontrée dans les questions 3. et 4. pour les droites (A_0B_0) et (A_1B_1) est encore vraie pour toute droite (A_nB_n), c'est-à-dire que la droite (A_nB_n) est la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A_n, où A_n est le point obtenu par application de l'algorithme précédent et B_n est le point de l'axe des abscisses d'abscisse $-n$, n étant un entier naturel quelconque,
5. Tracer avec précision la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse -3. Justifier la construction.
6. Dans cette question on donnera la **valeur exacte** des résultats,
   a. Placer le point I(1 ; 0).
   b. On note a_0 l'aire du triangle A_0B_0I. Calculer a_0.
   c. On note a_1 et a_2 les aires respectives des triangles $A_1B_1B_0$ et $A_2B_2B_1$. Calculer a_1 et a_2.

   (Aide : L'aire d'un triangle rectangle est égale à $\dfrac{b \times c}{2}$, b et c désignant les longueurs des côtés de l'angle droit.)
7. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on désigne par a_n l'aire du triangle $A_nB_nB_{n-1}$. On admet que (a_n) est une suite géométrique de raison q.
   a. Vérifier cette affirmation pour a_0, a_1 et a_2 ; montrer que $q = \dfrac{1}{\mathrm{e}}$.
   b. Déterminer l'expression du terme général a_n de cette suite. Quelle est la limite de la suite (a_n) quand n tend vers $+\infty$?

Annexe 1

(à remettre avec la copie)

Exercice 1
1



Annexe 2

(à remettre avec la copie)

Exercice 3