COURS DE MATHÉMATIQUES

Terminale L

Valère BONNET (valere.bonnet@gmail.com)

12 septembre 2010

Lycée PONTUS DE TYARD
13 rue des Gaillardons
71100 CHALON SUR SAÔNE
Tél. : (33) 03 85 46 85 40
Fax : (33) 03 85 46 85 59
FRANCE

Table des matières

Première partie

ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Chapitre I

Suites numériques

I.1 Limites de références

THÉORÈME I.1.1
Soit k un nombre réel tel que $k > 0$:

$$\lim_{n\to+\infty} n^k = +\infty \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^k} = 0$$

Remarque *En particulier :*

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0.$$

THÉORÈME I.1.2
Soit q un nombre réel. Le comportement de q^n lorsque n tend vers $+\infty$ est donné par le tableau suivant.

	$q \leqslant -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$1 < q$
$\lim_{n\to+\infty} q^n$	pas de limite	0	1	$+\infty$

Remarque *La condition, $-1 < q < 1$, s'exprime souvent sous la forme : $\left|q\right| < 1$*

I.2 Opérations algébriques sur les limites

Nous admettons les résultats suivants concernant la limite de la somme, du produit ou du quotient de deux suites. Le symbole « fi » signifie : forme indéterminée ; cela signifie que lers règles usuelles liant les opérations et le calcul de limites ne permettent pas de déterminer la limite éventuelle dans la configuration étudiée.

Limite de la somme de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	fi

Limite du produit de deux suites

$\lim_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	ℓ' $(\ell' \neq 0)$	ℓ' $(\ell' \neq 0)$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n\to+\infty} (u_n v_n)$	$\ell\ell'$	$\begin{cases} +\infty & \text{, si } \ell' > 0 \\ -\infty & \text{, si } \ell' < 0 \end{cases}$	$\begin{cases} -\infty & \text{, si } \ell' > 0 \\ +\infty & \text{, si } \ell' < 0 \end{cases}$	fi	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Limite de l'inverse d'une suite

On suppose ici que la suite de terme général $\frac{1}{v_n}$ est bien définie.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ $(\ell \neq 0)$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{u_n}$	$\frac{1}{\ell}$	0	0	$\begin{cases} +\infty & \text{, si } (u_n) \text{est strictement positive à partir d'un certain indice} \\ -\infty & \text{, si } (u_n) \text{est strictement négative à partir d'un certain indice} \end{cases}$

Limite du quotient de deux suites

On suppose ici que la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$ est bien définie.
Pour calculer la limite de la suite de terme général $\frac{u_n}{v_n}$, il suffit de remarquer que pour tout nombre entier, n, ou elle est définie : $\frac{u_n}{v_n} = u_n \times \frac{1}{v_n}$.
Le résultat désiré se déduit alors des considérations sur les limites de somme et d'inverse de suites.

I.3 Suites arithmétiques, suites géométriques

	suites arithmétiques	suites géométriques
Définition par récurrence	$\begin{cases} u_{n_0} = a \\ \forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$ Le premier terme est, $u_{n_0} = a$ et la raison est r.	$\begin{cases} u_{n_0} = a \\ \forall n \geqslant n_0,\ u_{n+1} = q u_n \end{cases}$ Le premier terme est, $u_{n_0} = a$ et la raison est q.
Les suites arithmétiques et géométriques sont déterminées par leur raison et leur premier terme		
relation entre deux termes	Pour $n \geqslant n_0$ et $p \geqslant n_0$: $u_n = u_p + r(n-p)$	Pour $n \geqslant n_0$ et $p \geqslant n_0$: $u_n = u_p q^{n-p}$
expression explicite Plus généralement : ou k désigne une constante	Pour $n \geqslant n_0$: $u_n = u_{n_0} + r(n-n_0)$ $u_n = rn + k$	Pour $n \geqslant n_0$: $u_n = u_{n_0} q^{n-n_0}$ $u_n = k \times q^n$
en particulier pour : $n_0 = 0$	Pour $n \geqslant 0$: $u_n = u_0 + nr$	Pour $n \geqslant 0$: $u_n = u_0 q^n$
Somme de termes consécutifs	$\sum\limits_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\frac{u_p + u_n}{2}$ somme = nombres de termes×moyenne des extrêmes	$\sum\limits_{k=p}^{n} u_k = \frac{u_p - u_{n+1}}{1-q}$ $\text{somme} = \frac{\text{premier terme} - \text{suivant du dernier}}{1 - \text{raison}}$