DEVOIR EN TEMPS LIBRE

EXERCICE I

On considère les nombres A_n définis par $A_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$ où n est un entier naturel.

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4
A_n					
Reste dans la division euclidienne de A_n par 13					

2. Les nombres suivants sont écrits dans le système de numération à base trois :

$$x = \left(1110\right)_{\text{trois}} \;;\; y = \left(1010100\right)_{\text{trois}} \;;\; z = \left(1001001000\right)_{\text{trois}}$$

Sont-ils divisibles par 13 ? Justifier en utilisant ce qui précède.

3. On s'intéresse au reste dans la division euclidienne de $A_{1\,000}$ par 13.

a. Justifier que $3^3 \equiv 1 \quad \text{mod } 13$.

b. En déduire le reste dans la division euclidienne de $3^{1\,000}$ par 13.

c. Quel est le reste dans la division euclidienne de $A_{1\,000}$ par 13 ?

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit les propositions :

(P_0) : pour tout entier naturel n, A_n est un multiple de 13.

(P_1) : il existe au moins un entier naturel n tel que A_n est un multiple de 13.

(P_2) : pour tout entier naturel n, si n est un multiple de 3, alors A_n n'est pas un multiple de 13 .

Dire si chacune de ces propositions est vraie ou fausse. Justifier.

EXERCICE II

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	n un entier naturel.
Initialisation :	affecter à u la valeur 1 ; affecter à S la valeur 1 ; affecter à i la valeur 0.
Traitement :	tant que $i < n$ affecter à u la valeur $2u + 1 - i$; affecter à S la valeur $S + u$; affecter à i la valeur $i + 1$.
Sortie :	afficher u ; afficher S.

Justifier que, pour $n = 3$, l'affichage obtenu est 11 pour u et 21 pour S.

Reproduire et compléter le tableau suivant :

Valeur de n	0	1	2	3	4	5
Affichage pour u				11		
Affichage pour S				21		

Partie B

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = 2u_n + 1 - n.$$

et la suite (S_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$.

1. Pour un entier naturel n donné, que représentent les valeurs affichées par l'algorithme de la partie 1 ?

2. Le but de cette question est d'exprimer u_n en fonction de n.

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5
u_n						
$u_n - n$						

b. Quelle conjecture peut-on faire à partir des résultats de ce tableau ?

c. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 2^n + n$.

3. Le but de cette question est de calculer S_n en fonction de n et d'utiliser un résultat de la première partie pour contrôler l'exactitude de ce calcul.

a. Exprimer en fonction de n les sommes : $1 + 2 + \cdots + n$ et $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n$.

b. En déduire une expression de S_n en fonction de n.

c. Vérifier le résultat obtenu dans la première partie pour $n = 5$.