À rendre le mardi 15 mars 2011

DEVOIR EN TEMPS LIBRE

EXERCICE I

On considère la suite (u_n) géométrique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison 3.

1. Déterminer les termes u_1, u_2, u_3 et u_4.

a. Donner l'écriture en base 7 de u_2.

b. Montrer que l'écriture en base 7 de u_3 est $\overline{105}^7$.

c. Pour obtenir l'écriture en base 7 de u_4, un élève a effectué la multiplication ci-dessous. Dire s'il a ou non raison et expliquer pourquoi.

$$\begin{array}{rccc} & 1 & 0 & 5 \\ \times & & & 3 \\ \hline & 3 & 1 & 5 \end{array}$$

2. a. Montrer que $u_5 = 486$.

b. On considère l'agorithme suivant :

Entrée : a un entier naturel.

Initialisation : L liste vide
Affecter la valeur a à x.

Traitement : Tant que $x > 0$;
Effectuer la division euclidienne de x par 7 ;
Affecter son reste à r et son quotient à q ;
Mettre la valeur de r au début de la liste L ;
Affecter q à x.

Sortie : Afficher les élements de la liste L.

Faire fonctionner cet algorithme pour $a = 486$. On reproduira sur la copie un tableau analogue à celui donné ci-dessous et on le complétera :

	r	q	L	x
Initialisation			vide	486
Fin étape 1				
Fin étape 2				
…				
…				
…				

Expliquer le lien entre les éléments de la liste L et l'écriture de u_5 en base 7.

3. On a divisé le terme u_{10} de la suite (u_n) par un certain entier. On obtient le quotient Q dont l'écriture décimale est Q = 14,727 272 727 272 72… écriture dans laquelle les chiffres 7 et 2 se répètent à l'infini.

On note (v_n) la suite géométrique de premier terme $0,72$ et de raison $0,01$

a. Calculer $v_0 + v_1 + v_2$.

b. On pose $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ où n est un entier naturel non nul.
Calculer S_n. En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

c. En déduire une écriture de 0,727 272... où les chiffres 7 et 2 se répètent à l'infini sous la forme du quotient de deux entiers.

d. Quel est le nombre par lequel on a divisé u_{10} ?

EXERCICE II

On considère les fonctions u et v définies sur l'intervalle $[0\,;2]$ par :

$$u(x) = 10\,\mathrm{e}^{-2x} \quad \text{et} \quad v(x) = 0,1\,\mathrm{e}^{2x}.$$

On étudie la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;2]$ par $f(x) = u(x) + v(x)$.
Soient $\mathcal{C}_u$, $\mathcal{C}_v$ et $\mathcal{C}_f$ les courbes représentant respectivement les fonctions u, v et f dans un repère orthogonal $(\mathrm{O}x, \mathrm{O}y)$.

1. a. Calculer la fonction dérivée f' de f

b. Vérifier que, pour tout nombre réel x de $[0\,;2]$, $f'(x) = 2(v(x) - u(x))$.

c. En déduire que les inéquations $f'(x) > 0$ et $v(x) > u(x)$ ont même ensemble de solutions.

Les courbes $\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{C}_v$ sont tracées sur la feuille de l'annexe 1. On note α l'abscisse du point d'intersection des deux courbes $\mathcal{C}_u$ et $\mathcal{C}_v$.

2. Dans cette question, on résout graphiquement l'inéquation $v(x) > u(x)$.

a. Ajouter sur le graphique le nom des courbes.

b. Déterminer graphiquement, avec la précision permise par le graphique, une valeur approchée du nombre α.

c. Résoudre graphiquement, avec la précision permise par le graphique, l'inéquation $v(x) > u(x)$.

3. Donner le tableau de variation de la fonction f.

4. Compléter le graphique de l'annexe 1 en traçant la courbe $\mathcal{C}_f$.

ANNEXE I – à rendre avec la copie

EXERCICE II