Annales de l'épreuve de spécialité mathématiques du Baccalauréat série S

Valère BONNET

15 mai 2007

Résumé

Les énoncés ont, pour la plupart,été téléchargés sur internet. Depuis 2004 les sources sont de Denis VERGÈS. Les corrigés sont de Valère BONNET.

Table des matières

I Nouvelle Calédonie mars 2007

Pour coder un message, on procède de la manière suivante : à chacune des 26 lettres de l'alphabet, on commence par associer un entier n de l'ensemble
$\Omega = \{0 ; 1 ; 2 ; \dots ; 24 ; 25\}$ *selon le tableau ci-dessous :*

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

a et b étant deux entiers naturels donnés, on associe à tout entier n de Ω le reste de la division euclidienne de $(an+b)$ par 26 ; ce reste est alors associé à la lettre correspondante.
Exemple *: pour coder la lettre P avec $a = 2$ et $b = 3$, on procède de la manière suivante :*

Étape 1 *On lui associe l'entier $n = 15$.*

Étape 2 *Le reste de la division de $2 \times 15 + 3 = 33$ par 26 est 7.*

Étape 3 *On associe 7 à H. Donc P est codé par la lettre H.*

1. *Que dire alors du codage obtenu lorsque l'on prend $a = 0$?*

Si on prend $a = 0$, alors toute s les lettres seront codées par la lettre dont le numéro est leassociée au reste modulo 26 de b.

$\boxed{\textbf{Aucun décodage ne sera donc possible.}}$

2. *Montrer que les lettres A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit* $a = 13$.

A et C sont respectivement associées à b et à $26 + b$; ces deux nombres ayant le même reste modulo 26, nous en déduisons que :

$\boxed{\textbf{A et C sont codées par la même lettre lorsque l'on choisit } \boldsymbol{a = 13}.}$

3. Dans toute la suite de l'exercice, *on prend* $a = 5$ *et* $b = 2$.

a. *On considère deux lettres de l'alphabet associées respectivement aux entiers* n *et* p. *Montrer, que si* $5n+2$ *et* $5p+2$ *ont le même reste dans la division par 26 alors* $n-p$ *est un multiple de* 26. *En déduire que* $n = p$.

On a :

$$\begin{array}{rcll} 5n+2 \equiv 5p+2 \pmod{26} & \Longrightarrow & 5n \equiv 5p \pmod{26} & \\ & \Longrightarrow & n \equiv p \pmod{26} & \text{(car 5 est premier avec 26)} \\ & \Longrightarrow & n-p \equiv 0 \pmod{26} & \end{array}$$

$\boxed{\textbf{si } \boldsymbol{5n+2} \textbf{ et } \boldsymbol{5p+2} \textbf{ ont le même reste dans la division par 26 alors } \boldsymbol{n-p} \textbf{ est un multiple de 26.}}$

On a : $\begin{cases} 0 \leqslant n \leqslant 25 \\ -25 \leqslant -p \leqslant 0 \end{cases}$; donc : $-25 \leqslant n-p \leqslant 25$.

Or le seul multiple de 26 entre -25 et 25 est 0, donc : $n-p = 0$; d'où :

$$\boxed{\boldsymbol{n = p}}.$$

b. *Coder le mot AMI.*

On a :

lettre	A	M	I
n	0	12	8
$5n+2$	2	62	42
reste modulo 26 de $5n+2$	2	10	16
code	C	K	Q

4. *On se propose de décoder la lettre E.*

a. *Montrer que décoder la lettre E revient à déterminer l'élément* n *de* Ω *tel que* $5n - 26y = 2$, *où* y *est un entier.*

Soit n l'entier associé à la lettre dont le code est E et y le quotient de la division de $5n+2$ par 26. L'entier associé à E est 4, donc : $5n+2 = 26y = 4$; d'où nous tirons :

$$\boxed{\boldsymbol{5n - 26y = 2}}.$$

Réciproquement, d'après **3.a.**, il ne pas y avoir deux lettres distinctes de l'alphabet dont l'entier associé est une valeur solution de l'inconnue n ; donc :

$\boxed{\textbf{décoder la lettre E revient à déterminer l'élément } \boldsymbol{n} \textbf{ de } \boldsymbol{\Omega} \textbf{ tel que } \boldsymbol{5n - 26y = 2}\textbf{, où } \boldsymbol{y} \textbf{ est un entier.}}$

b. *On considère l'équation* $5x - 26y = 2$, *avec* x *et* y *entiers relatifs.*

i. *Donner une solution particulière de l'équation* $5x - 26y = 2$.

$\boxed{\boldsymbol{(-10\,;-2)} \textbf{ est une solution particulière de l'équation } \boldsymbol{5x - 26y = 2}.}$

ii. *Résoudre alors l'équation* $5x - 26y = 2$.

Raisonnons par condition nécessaire. Soit $(x\,;y)$ un solution de l'équation. On a :

$$5x - 26y = 2 = 5 \times (-10) - 26 \times (-2)$$

donc :

$$5(x+10) = 26(y+2)$$

26 divise $5(x+10)$ et est premier avec 5 donc, d'après le théorème de Gauss, 26 divise $(x+10)$; on en déduit qu'il existe un entier k tel que : $x + 10 = 26k$.
D'où : $26(y+2) = 5(x+10) = 5 \times 26k$; c'est-à-dire : $y = 5k - 2$.
Nous en déduisons que toutes les solutions de l'équation sont de la forme :

$$(26k - 10\,; 5k - 2) \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Réciproquement, soit $k \in \mathbb{Z}$, posons : $(x\,;y) = (26k - 10\,; 5k - 2)$. On a :

$$5x - 26y = 5(26k - 10) - 26(5k - 2) = 5 \times 26k + 50 - 26 \times 5k + 52 = 2.$$

$$\boxed{\mathbf{S} = \left\{ \boldsymbol{(26k - 10\,; 5k - 2)} \,\middle|\, \boldsymbol{k \in \mathbb{Z}} \right\}}.$$

iii. *En déduire qu'il existe un unique couple $(x\,;\,y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \leqslant x \leqslant 25$.*

Soit $(x;y)$ une solution de l'équation précédentetelle que : $0 \leqslant x \leqslant 25$.
On a : $0 \leqslant 26k - 10 \leqslant 25 \Longleftrightarrow 10 \leqslant 26k \leqslant 35$.
Le seul multiple 26 compris entre 10 et 35 est 26, donc : $0 \leqslant 26k - 10 \leqslant 25 \Longleftrightarrow k = 1 \Longleftrightarrow (x;y) = (16;3)$.

il n'existe qu'un couple $(x\,;\,y)$ solution de l'équation précédente, avec $0 \leqslant x \leqslant 25$: $(16;3)$.

c. *Décoder alors la lettre E.*

D'après l'étude précédente, la lettre dont le code est E est la lettre associée à 16, c'est-à-dire : Q.

II Pondichéry avril 2007

1. Dans cette question, il est demandé au candidat d'exposer des connaissances
On suppose connus les résultats suivants :

- *La composée de deux similitudes planes est une similitude plane ;*
- *la transformation réciproque d'une similitude plane est une similitude plane ;*
- *une similitude plane qui laisse invariants trois points non alignés du plan est l'identité du plan.*

Soient A, B et C trois points non alignés du plan et s et s' deux similitudes du plan telles que $s(\mathrm{A}) = s'(\mathrm{A})$, $s(\mathrm{B}) = s'(\mathrm{B})$ et $s(\mathrm{C}) = s'(\mathrm{C})$. Montrer que $s = s'$.

s^{-1} est une similitude plane donc $s^{-1} \circ s'$ (composée de deux similitudes) est une similtude plane.
Posons : $\mathrm{A}' = s(\mathrm{A}) = s'(\mathrm{A})$, $\mathrm{B}' = s(\mathrm{B}) = s'(\mathrm{B})$ et $\mathrm{C}' = s(\mathrm{C}) = s'(\mathrm{C})$.
On a : $s^{-1} \circ s'(\mathrm{A}) = s^{-1}\left(\mathrm{A}'\right) = \mathrm{A}$, $s^{-1} \circ s'(\mathrm{B}) = s^{-1}\left(\mathrm{B}'\right) = \mathrm{B}$ et $s^{-1} \circ s'(\mathrm{C}) = s^{-1}\left(\mathrm{C}'\right) = \mathrm{C}$.
$s^{-1} \circ s'$ est une similtude plane qui laisse invariants trois points non alignés (A, B et C) donc : $s^{-1} \circ s' = \mathrm{Id}$.
D'où : $s \circ s^{-1} \circ s' = s \circ \mathrm{Id}$; c'est-à-dire :

$$\boxed{s = s'}.$$

2. *Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. La figure sera complétée au fur et à mesure. On donne les points A d'affixe 2, E d'affixe $1 + i$, F d'affixe $2 + i$ et G d'affixe $3 + i$.*

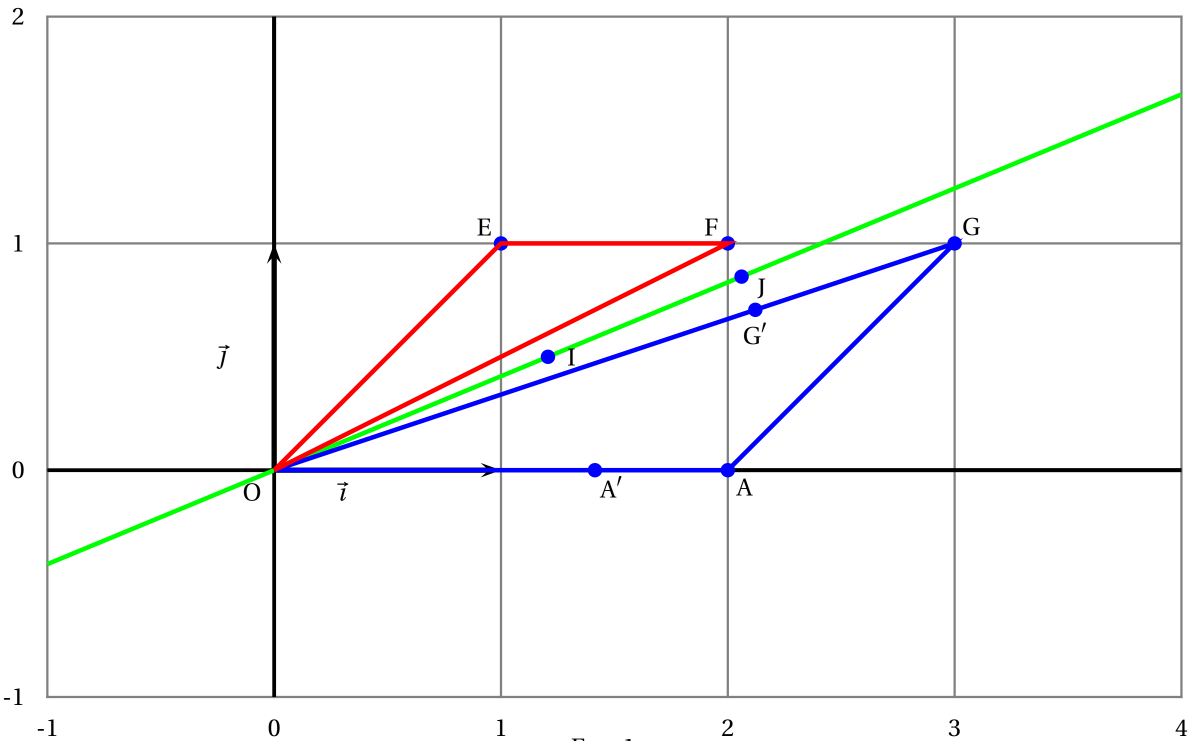

FIG. 1 –

a. *Calculer les longueurs des côtés des triangles OAG et OEF. En déduire que ces triangles sont semblables.*

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ ont respectivement pour affixes : 2 ; $3 + i$ et $1 + i$; donc :

$$\boxed{\mathbf{OA = 2 \qquad OG = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10} \qquad AG = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}}}.$$

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ ont respectivement pour affixes : $1 + i$; $2 + i$ et 1 ; donc :

$$\boxed{\mathbf{OE = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \qquad OF = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \qquad EF = 1}}.$$

On en déduit que :

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OE}}=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\qquad \frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OF}}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{5}}=\sqrt{2}\qquad \frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{EF}}=\sqrt{2}.$$

Donc :

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{OE}}=\frac{\mathrm{OG}}{\mathrm{OF}}=\frac{\mathrm{AG}}{\mathrm{EF}}.$$

Nous en déduisons que :

les triangles OAG et OEF sont semblables.

b. *Montrer que OEF est l'image de OAG par une similitude indirecte* S, *en déterminant l'écriture complexe de* S.

Soit S la similitude indirecte qui laisse O invariant et qui transforme A en E et $z'=a\bar{z}+b$ son écriture complexe avec $a\in\mathbb{C}^{\star}$ et $b\in\mathbb{C}$.

On a : S(O) = O et S(A) = E ; donc : $\begin{cases} 0=a\bar{0}+b \\ 1+i=a\bar{2}+b\end{cases}$; d'où : $\begin{cases} b=0 \\ a=\dfrac{1+i}{2}\end{cases}$.

Pour $z=3+i$, on a donc : $z'=\dfrac{1+i}{2}\overline{(3+i)}=\dfrac{3+1+3i-i}{2}=2+i$.

Nous en déduisons que :

la similitude S d'écriture complexe : $z'=\dfrac{1+i}{2}\bar{z}$; transforme OAG en OEF.

c. *Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. On pose :* $\mathrm{A}'=h(\mathrm{A})$ *et* $\mathrm{G}'=h(\mathrm{G})$, *et on appelle I le milieu de* $[\mathrm{EA}']$. *On note σ la symétrie orthogonale d'axe (OI). Montrer que* $\mathrm{S}=\sigma\circ h$.

Première méthode h a pour écriture complexe : $z'=\dfrac{1}{\sqrt{2}}z$; nous en déduisons les affixes respectives de A′ et G′ : $\sqrt{2}$ et $(3+i)\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Désignons par J le milieu du segment $[\mathrm{FG}']$. les points I et J ont respectivement pour affixes : $\dfrac{1+\sqrt{2}+i}{2}$ et $\dfrac{3\sqrt{2}+4+i\left(\sqrt{2}+2\right)}{4}$. Ona :

$$\frac{\sqrt{2}+2}{2}\times\frac{1+\sqrt{2}+i}{2}=\frac{3\sqrt{2}+4+i\left(\sqrt{2}+2\right)}{4}.$$

Donc J est un point de (OI). On a : $\mathrm{OA}'=\dfrac{\mathrm{OA}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=\mathrm{OE}$ et $\mathrm{OG}'=\dfrac{\mathrm{OG}}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}=\mathrm{OF}$; donc les triangle OEA′ et OFG′ sont isocèles en O. Or I est le milieu du segment $[\mathrm{EA}']$ et J est le milieu de $[\mathrm{FG}']$, donc : σ échange d'une part E et A′, et d'autre part F et G′. Nous en déduisons que :

$$\sigma\circ h(\mathrm{O})=\sigma\big(h(\mathrm{O})\big)=\sigma(\mathrm{O})=\mathrm{O};\qquad \sigma\circ h(\mathrm{A})=\sigma\big(h(\mathrm{A})\big)=\sigma\left(\mathrm{A}'\right))=\mathrm{E};\qquad \sigma\circ h(\mathrm{G})=\sigma\big(h(\mathrm{G})\big)=\sigma\left(\mathrm{G}'\right))=\mathrm{F}.$$

Les similitudes S et $\sigma\circ h$ coïncident en trois points non alignés (O, A et G), donc :

$$\boxed{\mathbf{S}=\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{h}}.$$

Deuxième méthode On a : $\mathrm{OA}'=\dfrac{\mathrm{OA}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}=\mathrm{OE}$; donc le triangle OEA' est isocèle en O. Or I est le milieu du segment $[\mathrm{EA}']$, donc : σ échange E et A′.

La transformation $\mathrm{S}^{-1}\circ\sigma\circ h$ est la composée de deux similitudes indirectes et d'une similitude directe, $\mathrm{S}^{-1}\circ\sigma\circ h$ est donc une similitude directe.

De plus : $\mathrm{S}^{-1}\circ\sigma\circ h(\mathrm{O})=\mathrm{S}^{-1}(\sigma(h(\mathrm{O})))=\mathrm{S}^{-1}(\sigma(\mathrm{O}))=\mathrm{S}^{-1}(\mathrm{O})=\mathrm{O}$
et $\mathrm{S}^{-1}\circ\sigma\circ h(\mathrm{A})=\mathrm{S}^{-1}(\sigma(h(\mathrm{A})))=\mathrm{S}^{-1}(\sigma(\mathrm{A}'))=\mathrm{S}^{-1}(\mathrm{E})=\mathrm{A}$.

$\mathrm{S}^{-1}\circ\sigma\circ h$ est une similitude directe qui a deux points fixes distincts (O et A), donc :

$$\mathrm{S}^{-1}\circ\sigma\circ h=\mathrm{Id}.$$

En composant à gauche membre à membre par S, nous en déduisons que :

$$\boxed{\mathbf{S}=\boldsymbol{\sigma}\circ\boldsymbol{h}}.$$

III Pondichéry avril 2006

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra 5 cm pour unité graphique. Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z'=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)z+1.$$

1. *Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω (d'affixe ω), le rapport k et l'angle θ.*

f a une écriture complexe de forme : $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^\star$ et $b \in \mathbb{C}$; donc f est une similitude directe. De plus : $f(\Omega) = \Omega$; donc : $\omega = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)\omega + 1$;

d'où : $\omega = \dfrac{1}{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i} = 1 + i$.

De plus : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$; donc :

$$\boxed{\textbf{f est la similitude directe de centre $\Omega(1+i)$, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et l'angle $\frac{\pi}{4}$.}}$$

2. *On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n, on pose : $\mathrm{A}_{n+1} = f(\mathrm{A}_n)$.*

a. *Déterminer les affixes des points A_1, A_2 et A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3.*

Introduisons la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des affixes des points A_n. On a :

$$a_0 = 0 \qquad \text{et} \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)a_n + 1.$$

Nous en déduisons les affixes des points demandés :

point	A_0	A_1	A_2	A_3
affixe	0	1	$\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$	$\frac{3}{2} + i$

Nous en déduisons la figure 2 :

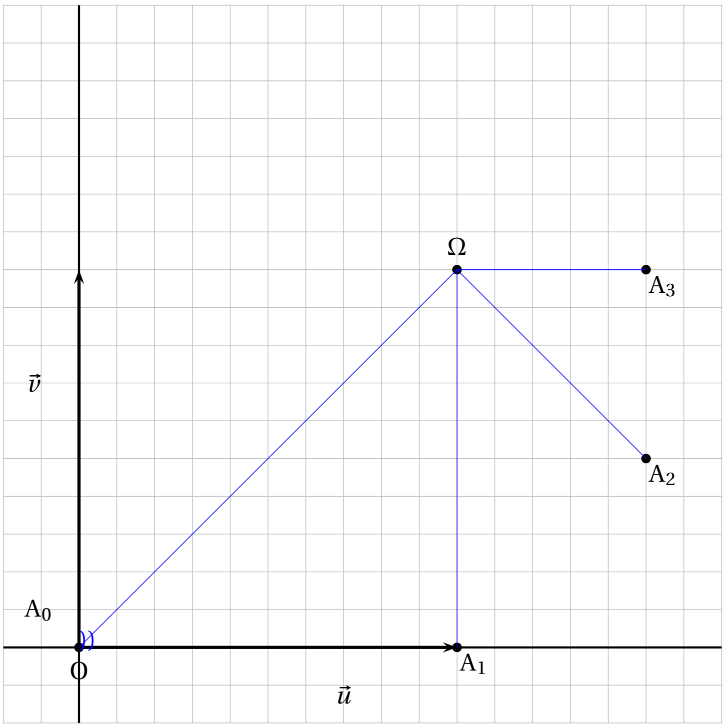

FIG. 2 –

b. *Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \Omega\mathrm{A}_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n : $u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$.*

f est une similtude de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$; elle multiplie donc les distance par $\frac{\sqrt{2}}{2}$, c'est-à-dire par $\frac{1}{\sqrt{2}}$. De plus : $f(\Omega) = \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(\mathrm{A}_{n+1}) = \mathrm{A}_n$; donc pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\Omega\mathrm{A}_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\Omega\mathrm{A}_n$. C'est-à-dire :

$$u_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}u_n.$$

(u_n) est donc la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme : $u_0 = \text{O}\Omega = |1+i| = \sqrt{2}$. Nous en déduisons que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\boxed{\boldsymbol{u_n = u_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}}.$$

c. *À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon $0,1$?*

Désignons par D le disque fermé de centre Ω et de rayon $0,1$, pour out entier n on a :

$$\begin{array}{lll}
\text{A}_n \in \text{D} & \iff & \Omega\text{A}_n \leqslant 0,1 \\
 & \iff & u_n \leqslant 0,1 \\
 & \iff & \sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n \leqslant 0,1 \\
 & \iff & \ln\left(\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\right) \leqslant \ln 0,1 \qquad \text{car ln est strictement croissante sur } \mathbb{R}^{+\star} \\
 & \iff & \dfrac{1}{2}\ln 2 - n\dfrac{1}{2}\ln 2 \leqslant -\ln 10 \qquad \text{car } -\dfrac{1}{2}\ln 2 < 0 \\
 & \iff & n \geqslant 1 + 2\dfrac{\ln 10}{\ln 2}
\end{array}$$

Or : $1 + 2\dfrac{\ln 10}{\ln 2} = 7,64\cdots$; donc :

Tous les points A_n appartiennent au disque de centre Ω et de rayon 0, 1 à partir de l'indice 8 (inclus).

3. **a.** *Quelle est la nature du triangle $\Omega\text{A}_0\text{A}_1$?*
En déduire, pour tout entier naturel n, la nature du triangle $\Omega\text{A}_n\text{A}_{n+1}$.

On a : $\dfrac{\omega - a_1}{a_0 - a_1} = 0 - 11 + i - 1 = \dfrac{i^2}{i} = i = \text{e}^{i\frac{\pi}{2}}$; donc :

le triangle $\Omega\text{A}_0\text{A}_1$ est un triangle direct, rectangle et isocèle en A_1.

f est une similitude directe, elle transforme donc un triangle en un triangle directement semblable. On en déduit par récurrence que pour tout entier naturel n :

le triangle $\Omega\text{A}_n\text{A}_{n+1}$ est un triangle direct, rectangle et isocèle en A_{n+1}.

b. *Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée $\text{A}_0\text{A}_1\text{A}_2\ldots\text{A}_{n-1}\text{A}_n$.*
On a ainsi : $\ell_n = \text{A}_0\text{A}_1 + \text{A}_1\text{A}_2 + \cdots + \text{A}_{n-1}\text{A}_n$.
Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

In troduisons la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $v_n = \text{A}_n\text{A}_{n+1}$.

On démontrer de même qu'en **2.b.** que (u_n) est la suite géométrique de raison $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et de premier terme : $v_0 = \text{A}_0\text{A}_1 = 1$. Nous en déduisons que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = v_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$:

$$\boxed{\boldsymbol{\ell_n = v_0 + \cdots + v_{n-1} = \frac{v_0 - v_n}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\,\frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n}{\sqrt{2} - 1}}}.$$

On a : $\left|\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right| < 1$; donc : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0$; d'où, par soustraction, quotient et produit :

$$\boxed{\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} \ell_n = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = 2 + \sqrt{2} = 3,414\cdots}}.$$

IV La Réunion juin 2006

On complètera la figure donnée en annexe 1 au fur et à mesure des questions, et on la rendra avec la copie.

ABCD est un carré tel que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$. Soit I le centre du carré ABCD. Soit J le milieu du segment [CD].
On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de la similitude s. Dans la partie A on utilisera des raisonnements géométriques ; dans la partie B on utilisera les nombres complexes.

Partie A

1. *Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.*

Avec $s(\mathrm{A}) = \mathrm{I}$ et $s(\mathrm{B}) = \mathrm{J}$, le rapport de la similitude est $\dfrac{\mathrm{IJ}}{\mathrm{AB}} = \dfrac{1}{2}$.
De même l'angle de la similitude està 2π près $\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,,\,\overrightarrow{\mathrm{IJ}}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$.

$$\boxed{\textbf{s est la similitude directe de rapport } \frac{1}{2} \textbf{ et d'angle } \frac{\pi}{2}.}$$

2. *On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre [AI], Γ_2 est le cercle de diamètre [BJ]. Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2. Placer Ω sur la figure.*

s est une similitude directe d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ qui transforme A en I et B en J, donc les triangles ΩAI et ΩAI sont rectangles en Ω et orientés dans le sens directs, on en déduit que :

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega} \textbf{ est le point d'intersection des cercles } \boldsymbol{\Gamma_1} \textbf{ et } \boldsymbol{\Gamma_2} \textbf{ tel que le triangle } \boldsymbol{\Omega}\textbf{AI est orienté dans le sens direct.}}$$

3. *Donner l'image par s de la droite (BC). En déduire le point image par s du point C, puis le point K image par s du point I.*

L'image de la droite (BC) est la droite contenant J (image par s de B) et perpendiculaire à (BC) (angle de la similitude).

$$\boxed{\boldsymbol{s} \textbf{ transforme (BC) en (CD).}}$$

Donc C' image de C par s appartient à la droite (CD) et comme $s(\mathrm{B}) = \mathrm{J}$ et $s(\mathrm{C}) = \mathrm{C}'$, $\mathrm{JC}' = \dfrac{1}{2}\mathrm{BC} = \dfrac{1}{2}\mathrm{CD}$.
Donc on a $\mathrm{C}' = \mathrm{C}$ ou $\mathrm{C}' = \mathrm{D}$. Comme C n'est pas le point invariant de la similitude soit Ω, donc : $\mathrm{C}' = \mathrm{D}$.

$$\boxed{\boldsymbol{s} \textbf{ transforme C en D.}}$$

I est le milieu de [AC] et a pour image K, de plus les similitudes conservent le milieu, donc :

$$\boxed{\textbf{K est le milieu du segment image [ID].}}$$

4. *On pose $h = s \circ s$ (composée de s avec elle même).*

a. *Donner la nature de la transformation h (préciser ses éléments caractéristiques).*

$s = h \circ h$ composée de deux similitudes de même centre, Ω, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est la similitude de même centre Ω, de rapport $\dfrac{1}{4}$ et d'angle π c'est-à-dire :

$$\boxed{\boldsymbol{h} \textbf{ est l'homothétie de centre } \boldsymbol{\Omega} \textbf{ et de rapport } -\frac{1}{4}.}$$

b. *Trouver l'image du point A par h. En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.*

On a : $s(\mathrm{A}) = h\big(h(\mathrm{A})\big) = h(\mathrm{I}) = \mathrm{K}$.

$$\boxed{\boldsymbol{h} \textbf{ transforme A en K.}}$$

Dans une homothétie un point, son image et le centre sont alignés, donc :

$$\boxed{\textbf{A, K et } \boldsymbol{\Omega} \textbf{ sont alignés.}}$$

Partie B

Le plan complexe est rapporté à un repère $(\mathrm{A}; \vec{u}, \vec{v})$ orthonormal direct, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixe respectives : 0 ; 2 ; $2+2i$ et $2i$.

1. *Démontrer que l'écriture complexe de la similitudes est $z' = \dfrac{1}{2}iz + 1 + i$.*

s a une écriture complexe de la forme : $z' = az + b$.
De plus s transforme A(0) en $\mathrm{I}(1+i)$ et B(2) en $\mathrm{J}(1+2i)$, donc :

$$a = \frac{z_\mathrm{J} - z_\mathrm{I}}{z_\mathrm{B} - z_\mathrm{A}} = \frac{i}{2}.$$

On a : $s(\mathrm{A}) = \mathrm{I}$; donc b est solution de l'équation : $1 + i = \dfrac{1}{2}i \times 0 + b$; d'où : $b = 1 + i$.
s a pour écriture complexe :

$$\boxed{\boldsymbol{z' = \frac{1}{2}i\,z + 1 + i}}.$$

2. *Calculer l'affixe du point Ω.*

ANNEXE I – À compléter et à rendre avec la copie

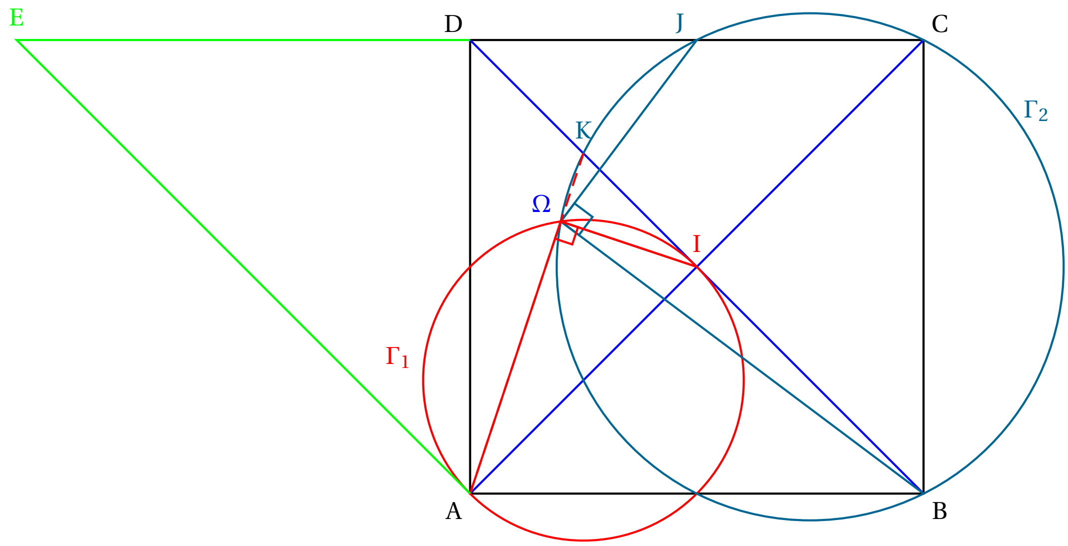

FIG. 3 – Annexe de l'exercice IV

Ω est l'unique point fixe de s, son affixe est donc solution de l'équation : $z = \frac{1}{2}i\,z + 1 + i$.

On en déduit que : $\omega = \frac{1+i}{1-\frac{1}{2}i} = \frac{2+2i}{2-i} = \frac{(2+2i)(2+i)}{5} = \frac{2}{5} + \frac{6}{5}i$.

$$\boxed{\omega = \frac{2}{5} + \frac{6}{5}i}.$$

3. *Calculer l'affixe du point E tel que s(E) = A. Placer le point E sur la figure.*

On a : E $= s^{-1}$(A) ; de plus, s^{-1} a pour écriture complexe : $z = \frac{1}{2}i\,z' + 1 + i$; c'est-à-dire : $z' = -2i\,z - 2 + 2i$; donc :

$$\boxed{\textbf{E a pour affixe } -2+2i\,.}$$

V France juin 2006

Partie A – Questions de cours

1. *Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.*

Théorème de Bézout Deux entiers a et b sont premiers entre eux si, et seulement si, il existe deux entiers u et v tels que : $au + bv = 1$.

Théorème de Gauss Soit a, b et c trois entiers relatifs. Si a divise le produit bc et si a est premier avec b, alors a divise c.

2. *Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.*

Soit a, b et c trois entiers tels que a divise bc et a est premier avec b.
a divise bc, il existe donc un entier k tel que : $bc = ka$.
a et b sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, il existe donc deux entiers u et v tels que : $au + bv = 1$.
En multipliant membre à membre cette dernière égalité par c, il vient :

$$c = auc + bcv = auc + kav = a(\underbrace{uc + kv}_{\in\mathbb{Z}}).$$

donc :

$$\boxed{a \textbf{ divise } c}$$

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$\begin{cases} n \equiv 13 & \pmod{19} \\ n \equiv 6 & \pmod{12} \end{cases} \qquad \text{(S)}$$

1. *Démontrer qu'il existe un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs tel que :*

$$19u + 12v = 1.$$

(On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $\mathrm{N} = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).

19 est un nombre premier et 12 n'est pas multiple de 19, donc 12 et 19 sont premiers entre eux. D'après le théorème de Bézout, il existe donc un couple $(u\,;\,v)$ d'entiers relatifs tel que :

$$\boxed{\mathbf{19u + 12v = 1}}.$$

On a : $\mathrm{N} - 13 = 13 \times 12v + 6 \times 19u - 13 = 13(12v - 1) + 19 \times 6u = 13(-19u) + 19 \times 6u = 19\underbrace{(-7u)}_{\in\mathbb{Z}}$; donc :

$$\boxed{\mathbf{N \equiv 13 \pmod{19}}}.$$

On a : $\mathrm{N} - 6 = 13 \times 12v + 6 \times 19u - 6 = 13 \times 12v + 6(19u - 1) = 12 \times 13v + 6 \times (-12v) = 12 \times \underbrace{(-7v)}_{\in\mathbb{Z}}$; donc :

$$\boxed{\mathbf{N \equiv 6 \pmod{12}}}.$$

2. a. *Soit n_0 une solution de (S). Vérifier que le système (S) équivaut à*

$$\begin{cases} n \equiv n_0 & \pmod{19} \\ n \equiv n_0 & \pmod{12} \end{cases}$$

On a : $\begin{cases} n_0 \equiv 13 & \pmod{19} \\ n_0 \equiv 6 & \pmod{12} \end{cases}$; donc par transitivité :

$$\boxed{\begin{cases} n \equiv 13 & \pmod{19} \\ n \equiv 6 & \pmod{12} \end{cases} \iff \begin{cases} n \equiv n_0 & \pmod{19} \\ n \equiv n_0 & \pmod{12} \end{cases}}.$$

b. *Démontrer que le système* $\begin{cases} n \equiv n_0 & \pmod{19} \\ n \equiv n_0 & \pmod{12} \end{cases}$ *équivaut à* $n \equiv n_0 \quad (12 \times 19)$.

On a :

$$\begin{cases} n \equiv n_0 & \pmod{19} \\ n \equiv n_0 & \pmod{12} \end{cases} \iff \begin{cases} n - n_0 \equiv 0 & \pmod{19} \\ n - n_0 \equiv 0 & \pmod{12} \end{cases} \iff \begin{cases} 19 \mid (n - n_0) \\ 12 \mid (n - n_0) \end{cases} \iff \mathrm{PPCM}\,(12;19) \mid (n - n_0).$$

12 et 19 sont premiers entre eux, donc : $\mathrm{PPCM}\,(12;19) = 12 \times 19$. D'où :

$$\boxed{\begin{cases} n \equiv n_0 & \pmod{19} \\ n \equiv n_0 & \pmod{12} \end{cases} \iff (12 \times 19) \mid (n - n_0) \iff n \equiv n_0 \quad (12 \times 19)}.$$

3. a. *Trouver un couple $(u\,;\,v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.*

Utilisons l'algoithme d'Euclide :

$19 = 12 + 7$	$1 = 5 - 2 \times 2$	
$12 = 7 + 5$	$= 5 - 2(7 - 5)$	$= -2 \times 7 + 3 \times 5$
$7 = 5 + 2$	$= -2 \times 7 + 3(12 - 7)$	$= 3 \times 12 - 5 \times 7$
$5 = 2 \times 2 + 1$	$= 3 \times 12 - 5(19 - 12)$	$= -5 \times 19 + 8 \times 12$

Donc :

$$\boxed{\mathbf{(-5\,;\,8) \text{ est une solution de l'équation : } 19u + 12v = 1.}}$$

La valeur de N correspondante est :

$$\boxed{\mathbf{N = 13 \times 12v + 6 \times 19u = 13 \times 12 \times 8 - 6 \times 19 \times 5 = 678}}.$$

b. *Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question **B.2.b.**).*

D'après **B.1.**, **B.2.b.** et **B.3.a.** :

$$(S) \iff (n-678) \mid (12\times 19) \iff n \equiv 678 \pmod{228} \iff n \equiv 222 \pmod{228}$$

Nous en déduisons l'ensemble des solutions de (S) :

$$\boxed{\mathbf{S} = \{222 + 228k \mid k \in \mathbb{Z}\}}.$$

4. *Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12, le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19, le reste est 13. On divise n par $228 = 12\times 19$. Quel est le reste, r, de cette division ?*

On a : $\begin{cases} n \equiv 13 & \pmod{19} \\ n \equiv 6 & \pmod{12} \end{cases}$; donc d'après **B.3.b.** : $n \equiv 222 \pmod{228}$; or : $0 \leqslant 222 < 228$; donc :

$$\boxed{r = 222}.$$

VI Centres étrangers 1 juin 2006

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel.
On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :
« si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ».

Partie A – Quelques exemples

1. *Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.*

On a : $4 \equiv 1 \pmod 3$; donc, pour tout entier naturel n : $4^n \equiv 1^n \pmod 3$; d'où il vient :

$$\boxed{\mathbf{4^n \equiv 1 \pmod 3}}.$$

2. *Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.*

4 est premier avec 29 (29 est premier). Donc d'après le petit théorème de Fermat $4^{29-1} - 1 \equiv 0 \pmod 2 9$ ou encore $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
3. *Pour $1 \leqslant n \leqslant 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.*

On a : $4^2 = 16 = 17 - 1$; donc : $4^2 \equiv -1 \pmod{17}$; on en déduit en élevant au carré membre à membre :

$$4^4 \equiv 1 \pmod{17}$$

Soit k un entier naturel, en élevant membre à membre à la puissance k, il vient : $\left(4^4\right)^k \equiv 1^k \pmod{17}$; c'est-à-dire : $4^{4k} \equiv 1 \pmod{17}$; ou encore : $4^{4k} - 1 \equiv 0 \pmod{17}$.
Pour tout entier naturel k :

$$\boxed{\mathbf{4^{4k} - 1 \text{ est divisible par 17.}}}$$

4. *Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?*

Soit n un entier naturel. On a : $4^4 \equiv -1 \pmod 5$; donc : $4^{4n} \equiv (-1)^n \pmod 5$;
c'est-à-dire : $4^{4n} - (-1)^n \equiv 0 \pmod 5$. On en déduit que :

- si n est pair alors $4^{4n} - 1$ est multiple de 5 ;
- si n est impair alors $4^{4n} + 1$ est multiple de 5, et donc $4^{4n} - 1$ ne l'est pas.

Pour tout entier naturel, n :

$$\boxed{\mathbf{4^n - 1 \text{ est divisible par 5 si et seulement si } n \text{ est pair.}}}$$

5. *À l'aide des questions précédentes déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.*

Diviseurs premiers de $4^{28} - 1$: la question **2.** a déjà donné le nombre 29 ; la question **3.** a donné le diviseur premier 17 ; la question **4.** a donné le diviseur 5.
On a donc quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$:

$$\boxed{\mathbf{3 ; 5 ; 17 ; 29}}.$$

L'écriture primaire de $4^{28} - 1$ est en fait :

$$4^{28} - 1 = 3\times 5\times 17\times 29\times 43\times 113\times 127\times 5\,790\,321.$$

Partie B – Divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier différent de 2.

1. *Démontrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $4^n \equiv 1 \pmod{p}$.*

$4 = 2^2$; si p est premier différent de 2, il est premier avec 4, donc d'après le petit théorème de Fermat $4^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ ou $4^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. Le premier premier différent de 2 est 3, donc $n = p - 1 \geqslant 1$.

2. *Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \pmod{p}$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \pmod{p}$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.*

a. *Démontrer que $4^r \equiv 1 \pmod{p}$. En déduire que $r = 0$.*

On a donc : $4^n \equiv 1 \pmod{p}$, $4^b \equiv 1 \pmod{p}$ et $n = bq + r$ avec $r < b$. On déduit de la seconde congruence que $4^{bq} \equiv 1 \pmod{p}$ et par quotient avec $4^{bq+r} \equiv 1 \pmod{p}$ que $4^r \equiv 1 \pmod{p}$. Or b étant le plus petit naturel vérifiant $4^b \equiv 1 \pmod{p}$, il en résulte que $4^r = 1$ ou encore $r = 0$.

b. *Prouver l'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.*

On vient démontrer dans la question précédente que si $4^n \equiv 1 \pmod{p}$, alors n est multiple de b, b étant le plus naturel positif tel que $4^b \equiv 1 \pmod{p}$.

Inversement si $n = kb$, de $4^b \equiv 1 \pmod{p}$, on déduit que $\left(4^b\right)^k \equiv 1^k \pmod{p}$ soit $4^n \equiv 1 \pmod{p}$. L'équivalence est donc démontrée.

c. *En déduire que b divise $p - 1$.*

D'après la question **B.1.** $4^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ et soit b le plus petit entier tel que $4^b \equiv 1 \pmod{p}$. D'après la question **2.b.** il en résulte que $p - 1$ est multiple de b ou encore b (non nul) divise $p - 1$.

VII Asie juin 2006

Étant donné un entier naturel $n \geqslant 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$.

Partie A – Étude de deux cas particuliers

1. *Dans cette question on suppose $n = 2$. Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la condition précédente.*

On a : $1^2 + 3^2 + 5^2 = 35 = 8 \times 4 + 3$, d'où : $1^2 + 3^2 + 5^2 \equiv 3 \pmod{4}$.

$$\boxed{\textbf{Le triplet } (1\,;3\,;5) \textbf{ est donc solution.}}$$

2. *Dans cette question, on suppose $n = 3$.*

a. *Soit m un entier naturel. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste r de la division euclidienne de m par 8 et le reste R de la division euclidienne de m^2 par 8.*

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R	0	1	4	1	0	1	4	1

Par exemple pour, $r = 3$, on a :

$$m \equiv 3 \pmod{8} \quad \Longrightarrow \quad m^2 \equiv 9 \pmod{8} \quad \Longrightarrow \quad m^2 \equiv 1 \pmod{8}$$

Donc, si $r = 3$, alors : R = 1.

b. *Peut-on trouver trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7 \pmod{8}$?*

Les seuls restes possibles sont donc 0, 1 et 4. Avec trois carrés la somme des restes ne peut être que 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, mais pas 7.

$$\boxed{\textbf{Il n'existe pas d'entiers } x,\ y,\ z \textbf{ tels que } x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7 \pmod{8}.}$$

Partie B – Étude du cas général où $n \geqslant 3$

Supposons qu'il existe trois entiers naturels x, y et z tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}.$$

1. *Justifier le fait que les trois entiers naturels x, y et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.*

S'il existe trois entiers naturels x, y et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \pmod{2^n}$ alors $x^2 + y^2 + z^2 = 2^n q + 2^n - 1 = 2^n(q+1) - 1$, donc cette somme est impaire. Donc :

- aucun des trois n'est pair ;
- il ne peut y avoir un pair et deux impairs car la somme des carrés serait paire ;
- il peut y avoir deux pairs ;
- il ne peut y avoir trois pairs, car la somme des carrés serait paire.

2. *On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors $x = 2q$, $y = 2r$, $z = 2s+1$ où q, r, s sont des entiers naturels.*

a. *Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1 \pmod 4$.*

Donc $x^2 + y^2 + z^2 = 4q^2 + 4r^2 + 4s^2 + 4s + 1 = 4 \times \left(q^2 + r^2 + s^2 + s\right) + 1$.
Conclusion $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1 \pmod 4$ **b.** *En déduire une contradiction.*

Or on a supposé que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1 \left(\bmod 2^n\right)$ soit $x^2 + y^2 + z^2 = 2^n \times q + 2^n - 1 = 4\alpha - 1$ (car n est au moins égal à 3).
Ceci est impossible : un multiple de 4 plus 1 ne peut être égal à un multiple de 4 moins 1.
En effet s'il existe α et β tels que :
$8\alpha - 1 = 8\beta + 1$ alors $8\alpha - 8\beta = 2 \iff 4\alpha - 4\beta = 1$. La différence de deux multiples de 4 ne peut être égale à 1. Conclusion ; il n'existe pas de triplet solution avec un seul impair. **3.** *On suppose que x, y, z sont impairs.*

a. *Prouver que, pour tout entier naturel k non nul, $k^2 + k$ est divisible par 2.*

Pour tout naturel k non nul, $k^2 + k = k \times (k+1)$,est le produit de deux naturels consécutifs, l'un d'eux est pair, donc :

$$\boxed{\boldsymbol{k^2 + k} \textbf{ est divisible par 2.}}$$

b. *En déduire que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3 \pmod 8$.*

Posons : $x = 2q+1$, $y = 2r+1$ et $z = 2s+1$; on a :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4q^2 + 4q + 1 + 4r^2 + 4r + 1 + 4s^2 + 4s + 1 = 4\left[\left(q^2 + q\right) + \left(r^2 + r\right) + \left(s^2 + s\right)\right] + 3.$$

Or d'après la question précédente chaque entier entre parenthèse est pair, donc $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \times (2x' + 2y' + 2z') + 3 = 8(x' + y' + z') + 3$; d'où il vient :

$$\boxed{\boldsymbol{x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3 \pmod 8}}.$$

c. *Conclure.*

Supposons qu'il existe une solution, (x, y, z). On aurait : $x^2 + y^2 + z^2 = 2^3 \times 2^{n-3} q - 1$.
Or puisque $n \geqslant 3$, on en déduirait que : $x^2 + y^2 + z^2 \equiv -1 \pmod 8$.
Ce qui est contradictoire avec le résultat établi en **B.3.b.** car : $-1 \not\equiv 3 \pmod 8$.

$$\boxed{\textbf{Pour } \boldsymbol{n \geqslant 3} \textbf{ le problème proposé n'a pas de solution.}}$$

VIII Amérique du nord juin 2006

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 4 cm).
Soit Ω le point d'affixe 2.
On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1. *On pose $\sigma = h \circ r$.*

a. *Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.*

σ est la composée de la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ par l'homothétie de même centre et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc :

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} \textbf{ est la similitude directe de centre } \boldsymbol{\Omega}\textbf{, de rapport } \boldsymbol{\frac{\sqrt{2}}{2}} \textbf{ et d'angle } \boldsymbol{\frac{\pi}{4}}}$$

b. *Montrer que l'écriture complexe de σ est : $z \longmapsto \dfrac{1+i}{2} z + 1 - i$.*

Soit $\mathrm{M}(z)$ un point quelconque et $\mathrm{M}'(z')$ son image par σ. D'après **1.a.**, on a :

$$z' - 2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathrm{e}^{i \frac{\pi}{4}} (z - 2) \qquad \text{(VIII-1)}$$

Or : $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \mathrm{e}^{i \frac{\pi}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{1}{2} + i \dfrac{1}{2} = \dfrac{1+i}{2}$. Donc :

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2} \mathrm{e}^{i \frac{\pi}{4}} (z-2) + 2 = \frac{1+i}{2} (z-2) + 2 = \frac{1+i}{2} z - (1+i) + 2 = \frac{1+i}{2} z + 1 - i.$$

$$\boxed{\boldsymbol{\sigma} \textbf{ a bien pour écriture complexe : } \boldsymbol{z \longmapsto \frac{1+i}{2} z + 1 - i}.}$$

c. *Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z - z' = i\left(2 - z'\right)$.*

D'après **1.b.** : $z' = \dfrac{1+i}{2}z + 1 - i$.

On en déduit que : $z' - i z' = (1-i)z' = (1-i)(1+i)\dfrac{1}{2}z + (1-i)^2 = z - 2i$; d'où :

$$\boxed{z - z' = i\left(2 - z'\right)}.$$

2. ***Question de cours***

Prérequis : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques des modules et des arguments.

a. *Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que $q - a = i(p - a)$.*

Si Q(q) est l'image de P(p) par le quart de tour direct de centre A(a) alors, d'après la définition du quart de tour direct, lorsque P $\neq$ A :

$$\left\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right\| = \left\|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right\| \qquad \text{et} \qquad \left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}, \overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

C'est-à-dire :

$$\frac{\left\|\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right\|}{\left\|\overrightarrow{\mathrm{AP}}\right\|} \qquad \text{et} \qquad \left(\overrightarrow{\mathrm{AP}}, \overrightarrow{\mathrm{AQ}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \tag{VIII-2}$$

Or les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ ont respectivement pour affixes $p - a$ et $q - a$ donc, daprès les propriétés géométriques du modules et des arguments, (VIII-2) se traduit par : $\dfrac{q-a}{p-a} = 1\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}} = i$; d'où il vient :

$$\boxed{q - a = i(p - a)}.$$

Si P est en A, alors A, Q, P sont confondus et donc : $a = p = q$. On en déduit que l'égalité recherchée est encore vérifiée.

b. *Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega\mathrm{MM}'$, pour M distinct de Ω.*

D'après **1.c.** : $z - z' = i\left(2 - z'\right)$; or $z - z'$ et $2 - z'$ sont les affixes respectives de $\overrightarrow{\mathrm{M'M}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{M'}\Omega}$ donc, d'après **2.a.**, Ω est l'image de M par le quart de tour direct de centre M' ; on en déduit que :

Le triangle $\Omega\mathrm{MM}'$ est isocèle rectangle en M' et orienté dans le sens indirect.

3. *Soit A_0 le point d'affixe $2 + i$.*
On considère la suite (A_n) de points du plan définis par :

$$\textit{pour tout entier naturel} \quad n,\ \mathrm{A}_{n+1} = \sigma(\mathrm{A}_n).$$

a. *Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par :*

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{i\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2.$$

D'après (VIII-1), pour tout entier naturel n :

$$a_{n+1} - 2 = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}(a_n - 2).$$

On en déduit que la suite $(a_n - 2)$ est une suite géometrique de raison $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}$ et de premier terme : $a_0 - 2 = (2+i) - 2 = i$.

Pour tout entier naturel n, on a donc :

$$a_n - 2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right)^n i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{i\frac{n\pi}{4}}\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{4}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{i\frac{(n+2)\pi}{4}}.$$

On en déduit que pour tout entier naturel n :

$$\boxed{a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{i\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2}.$$

b. *Déterminer l'affixe de A_5.*

En particulier, pour $n = 5$:

$$\boxed{a_5 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^5 \mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{4}} + 2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^6 \sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{4}} + 2 = \frac{1}{8}(1-i) + 2 = \frac{17}{8} - \frac{1}{8}i}.$$

4. *Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait :*
pour $n \geqslant n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon $0,01$.

D'après **3.a.**, pour tout entier naturel n, on a :

$$A_n\Omega = |a_n - 2| = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n.$$

La distance entre A_n et Ω est donc une fonction décroissante de n, de plus : $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{13} = 0,011\cdots$ et $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{14} = 0,007\cdots$;

donc :

$$\boxed{n_0 = 14}.$$

IX Antilles Guyane juin 2006

Sur la figure donnée en ANNEXE 2*, on considère les carrés* OABC *et* OCDE *tels que :*

$$\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OC}\right) = \left(\overrightarrow{OC}\,;\overrightarrow{OE}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

On désigne par I *le milieu du segment* [CD]*, par* J *le milieu du segment* [OC] *et par* H *le point d'intersection des segments* [AD] *et* [IE]*.*

1. *Justifier l'existence d'une similitude directe s transformant* A *en* I *et* D *en* E*.*

Une similitude directe est déterminée par deux points distoincts et leur image. A et D sont distincts, I et E aussi ; donc :

Il existe une unique similitude directe s transformant A en I et D en E.

2. *Déterminer le rapport de cette similitude s.*

Le rapport cherché est : $\dfrac{\text{IE}}{\text{AD}}$.
Soit r le quart de tour direct dont le centre est celui du carré OCDE. r transforme respectivement O, C, D, E en C, D, E, O et conserve le milieu donc : $r(\text{J}) = \text{I}$.
Les isométries conservent les longueurs donc : $\text{IE} = \text{JD} = \frac{1}{2}\text{AD}$.

s est une similitude de rapport $\frac{1}{2}$.

On admet que l'angle de la similitude s est égal à $\frac{\pi}{2}$.

3. *Donner, sans justifier, l'image de* B *par s.*

s est une similtude d'angle $\frac{\pi}{2}$, elle transforme donc une droite en une droite perpendiculaire.
On a : $s(\text{A}) = \text{D}$; donc : $s(\text{AB}) = (\text{DB})$; de même : $s(\text{DB}) = (\text{ED})$.
B est le point d'intersection des droites (AB) et (DB), donc son image par s est le point d'intersection des droites (DB) et (ED).

$$\boxed{s(\text{B}) = \text{D}}.$$

4. *Déterminer et placer l'image de* C *par s.*

C est le milieu du segment [BD] et s conserve le milieu donc $s(\text{C})$ est le milieu de $[s(\text{B})s(\text{D})]$, c'est-à-dire de [DE]. Désignons par K ce point.

$$\boxed{s(\text{C}) = \text{K}}.$$

5. *Soit Ω le centre de la similitude s.*

a. *Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre* [AI] *et à celui de diamètre* [DE]*.*

s est similitude de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{2}$, qui transforme A en I, donc : $\left(\overrightarrow{\Omega A}\,,\overrightarrow{\Omega I}\right) = \frac{\pi}{2}$. On en déduit que :

Ω est un point du cercle de diamètre [AI]

D'après l'énoncé : $s(\text{D}) = \text{E}$; on en déduit de même que :

Ω est un point du cercle de diamètre [DE]

b. *Montrer que Ω ne peut être le point* H*.*

Si H était Ω, en utilisant le rapport de la similitude s, on aurait : $\text{HE} = \frac{1}{2}\text{HD}$.
Or H est un point du segment [DJ] qui est lui-même inclus dans le demi-pln fermé de frontière la médiatrice de [DE] et contenant D, donc H est un point de ce demi-plan d'où : $\text{HD} \leqslant \text{HE}$.
La proposition : « $\text{HE} = \frac{1}{2}\text{HD}$ » est donc fausse.

Ω n'est pas le point H.

ANNEXE II – À compléter et à rendre avec la copie

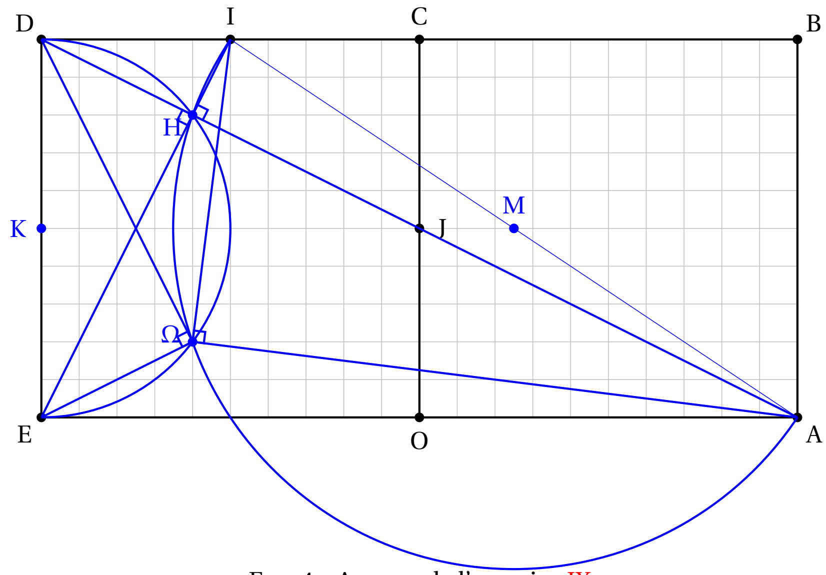

FIG. 4 – Annexe de l'exercice IX

c. *Construire* Ω.

L'intersection de deux deux cercles est constituée au maximum de deux points distincts. H et Ω sont deux points distincts de l'intersection des cercles de diamètres [AI] et [DE].
Pour construire Ω, il suffit donc de tracer ces deux cercles et Ω est le point d'intersection qui n'est pas H (voir annexe 2).

6. *On considère le repère orthonormal direct* $\left(\text{O}; \overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OC}}\right)$.

a. *Déterminer l'écriture complexe de la similitude s.*

s est une similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$, de plus : $\frac{1}{2}\text{e}^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{i}{2}$; donc s à une écriture complexe de la forme : $z' = \frac{i}{2}z + b$.

De plus s transforme A(1) en I$(-\frac{1}{2} + i)$, donc b vérifie : $-\frac{1}{2} + i = \frac{i}{2} \times 1 + b$; d'où : $b = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.
s a pour

$$\boxed{z' = \frac{i}{2}z - \frac{1}{2} + \frac{i}{2}}.$$

b. *En déduire l'affixe du centre* Ω *de s.*

Ω est le point fixe de s, son affixe est donc solution de l'équation :

$$z = \frac{i}{2}z - \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \qquad \text{(IX-3)}$$

(IX-3) $\iff$ $(2 - i)z = -1 + i$ $\iff$ $z = \frac{(-1+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}$ $\iff$ $z = -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i$.

$$\boxed{\textbf{Ω a pour affixe : } -\frac{3}{5} + \frac{1}{5}i.}$$

X Polynésie juin 2006

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

1. ***Proposition 1 :*** *« pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre* $2^{2n} - 1$ *».*

Vrai.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $4 - 1 = 3$; donc : $4 \equiv 1 \pmod 3$; d'où : $4^n \equiv 1^n \pmod 3$; or : $4^n = \left(2^2\right)^n = 2^{2n}$; donc : $2^{2n} - 1 \equiv 0 \pmod 3$.

2. ***Proposition 2 :*** *« Si un entier relatif x est solution de l'équation* $x^2 + x \equiv 0 \pmod 6$ *alors* $x \equiv 0 \pmod 3$ *».*

Faux.

Pour $x=2$, on a : $x^2+x\equiv 0\,(\text{mod}\,6)$ et $x\equiv 2\,(\text{mod}\,3)$.

3. ***Proposition 3 :*** *« l'ensemble des couples d'entiers relatifs* $(x\,;\,y)$ *solutions de l'équation* $12x-5y=3$ *est l'ensemble des couples* $(4+10k\,;\,9+24k)$ *où* $k\in\mathbb{Z}$ *».*

Faux.
$(-1\,;-3)$ est solution car : $12\times(-1)-5\times(-3)=15-12=3$; pourtant il n'existe pas d'entier k tel que $-1=4+10k$, en effet les deux membres de cette égalité seraient de parités différentes.

4. ***Proposition 4 :*** *« il existe un seul couple* $(a\,;\,b)$ *de nombres entiers naturels, tel que* $a<b$ *et PPCM*$(a,\ b)-$ *PGCD*$(a,\ b)=1$ *».*

Vrai.
Soit (a,b) un tel couple (s'il en existe). On a : $a<b$; donc : $\text{PGCD}\,(a,b)\leqslant a<b\leqslant \text{PPCM}\,(a,b)$.
La condition $\text{PPCM}\,(a,b)-\text{PGCD}\,(a,b)=1$ impose alors : $\text{PGCD}\,(a,b)=a$ et $b=a+1=\text{PPCM}\,(a,b)$.
On a en particulier : $a|a+1$; c'est-à-dire : $\text{PGCD}\,(a,a+1)=a$; or deux entiers consécutifs sont premiers entre eux, donc : $a=1$ et $b=2$.
Vérification : $1<2$ et $\text{PPCM}\,(1,2)-\text{PGCD}\,(1,2)=2-1=1$.

5. *Deux entiers naturels* M *et* N *sont tels que* M *a pour écriture* $\overline{abc}$ *en base dix et* N *a pour écriture* $\overline{bca}$ *en base dix.*
Proposition 5 : *« Si l'entier* M *est divisible par 27 alors l'entier* M − N *est aussi divisible par 27 ».*

Vrai.
On a : $\text{M}=100a+10b+c$ et $\text{N}=100b+10c+a$; donc :

$$\text{M}-\text{N}=99a-90b-9c=9(11a-10b-c)=9\big(12a-9b-(a+b+c)\big).$$

Si M est multiple de 27 alors il est en particulier multiple de 3 et : $a+b+c=3k$ (avec $k\in\mathbb{Z}$) ; on a alors : $\text{M}-\text{N}=27(4a-3b-k)$ avec $(4a-3b-k)\in\mathbb{Z}$.

XI Polynésie juin 2005

On considère la suite (u_n) *d'entiers naturels définie par*

$$\begin{cases} u_0=14 \\ u_{n+1}=5u_n-6 \ \text{ pour tout entier naturel } n \end{cases}$$

1. *Calculer* u_1, u_2, u_3 *et* u_4.
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n *?*

On a :

$$\boxed{\boldsymbol{u_1=5u_0-6=64}}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{u_2=5u_1-6=314}}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{u_3=5u_2-6=1564}}.$$

$$\boxed{\boldsymbol{u_4=5u_3-6=7814}}.$$

On conjecture que :

$$\boxed{\textbf{les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de } \boldsymbol{u_n} \textbf{ sont : } \begin{cases} \textbf{14} & \textbf{si } \boldsymbol{n} \textbf{ est pair} \\ \textbf{64} & \textbf{si } \boldsymbol{n} \textbf{ est impair} \end{cases}.}$$

2. *Montrer que, pour tout entier naturel* n, $u_{n+2}\equiv u_n\,(\text{mod}\,4)$.
En déduire que pour tout entier naturel k, $u_{2k}\equiv 2\,(\text{mod}\,4)$ *et* $u_{2k+1}\equiv 0\,(\text{mod}\,4)$).

Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+2}=5u_{n+1}-6=5\,(5u_n-6)-6=25u_n-36.$$

On en déduit que : $u_{n+2}-u_n=24u_n-36=4\underbrace{(6u_n-9)}_{\in\mathbb{Z}}$. Donc pour tout entier naturel n :

$$\boxed{\boldsymbol{u_{n+2}\equiv u_n\,(\text{mod}\,4)}}.$$

On a : $u_0=14=2+4\times 3$ et $u_1=64=4\times 16$; donc pour tout $k\in\mathbb{N}$:

$$\begin{array}{ll}
u_0\equiv 2\,(\text{mod}\,4) & u_1\equiv 0\,(\text{mod}\,4) \\
u_2\equiv u_0\,(\text{mod}\,4) & u_3\equiv u_1\,(\text{mod}\,4) \\
u_4\equiv u_2\,(\text{mod}\,4) & u_5\equiv u_3\,(\text{mod}\,4) \\
\vdots & \vdots \\
u_{2k}\equiv u_{2k-2}\,(\text{mod}\,4) & u_{2k+1}\equiv u_{2k-1}\,(\text{mod}\,4)
\end{array}$$

D'où, par transitivité, pour tout entier naturel k :

$$\boxed{\boldsymbol{u_{2k} \equiv 2\,(\text{mod}\,4) \qquad u_{2k+1} \equiv 0\,(\text{mod}\,4)}}.$$

3. a. *Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.*

Désignons, pour tout entier naturel n, par P_n la proposition : « $2u_n = 5^{n+2} + 3$ ».

initialisation Pour $n = 0$, on a :

$$2u_n = 2 \times 14 = 28 \qquad 5^{n+2} + 3 = 25 + 3 = 28.$$

Donc la proposition est vraie pour $n = 0$.

induction Supposons la proposition vraie pour un indice n donné, démontrons la pour l'indice $n + 1$.

On a :

$$\begin{aligned} 2u_{n+1} &= 2(5u_n - 6) && \text{(c'est la définition de } (u_n)\text{)} \\ &= 5 \times 2u_n - 12 \\ &= 5\left(5^{n+2} + 3\right) - 12 && \text{(hypothèse de récurrence)} \\ &= 5^{(n+1)+1} + 3 \end{aligned}$$

Donc, par récurrence, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{\boldsymbol{2u_n = 5^{n+2} + 3}}.$$

b. *En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28\,(\text{mod}\,100)$.*

Soit n un entier naturel, on a donc :

$$2u_n - 28 = 5^{n+2} + 3 - 28 = 5^2 \times 5^n - 25 = 25\left(5^n - 1\right).$$

Or : $5 \equiv 1\,(\text{mod}\,4)$; donc : $5^n \equiv 1^n\,(\text{mod}\,4)$; d'où : $5^n - 1 \equiv 0\,(\text{mod}\,4)$.
$2u_n - 28$ est multiple de 25 et de 4, il est donc multiple de leur PPCM. 4 et 25 n'ont pas de diviseur premier commun, ils sont donc premiers entre eux, d'où : PPCM $(4;25) = 4 \times 25 = 100$.
Donc, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{\boldsymbol{2u_n \equiv 28\,(\text{mod}\,100)}}.$$

4. *Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.*

Soit n un entier naturel, il existe un entier naturel k tel que : $2u_n = 100k + 28$;
donc : $u_n = 50k + 14 = 4(12k + 4) + 2(k - 1)$.
Donc : $u_n \equiv 2(k - 1)\,(\text{mod}\,4)$. Or :

$$\begin{cases} 2(k-1) \equiv 2\,(\text{mod}\,4) & \text{si } k \text{ est pair} \\ 2(k-1) \equiv 0\,(\text{mod}\,4) & \text{si } k \text{ est impair} \end{cases} \quad \text{et} \begin{cases} u_n \equiv 2\,(\text{mod}\,4) & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_n \equiv 0\,(\text{mod}\,4) & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

On en déduit que k et n ont la même parité.

Si *n* est pair $k = 2j$ $\left(j \in \mathbb{N}\right)$

donc : $u_n = 50k + 14 = 100j + 14$.

Si *n* est impair $k = 2j + 1$ $\left(j \in \mathbb{N}\right)$

donc : $u_n = 50k + 14 = 100j + 64$.

$$\boxed{\textbf{Les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de } \boldsymbol{u_n} \textbf{ sont : } \begin{cases} \textbf{14} & \textbf{si } \boldsymbol{n} \textbf{ est pair} \\ \textbf{64} & \textbf{si } \boldsymbol{n} \textbf{ est impair} \end{cases}}$$

5. *Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.*

Soit n un entier naturel et δ le pgcd de u_n et u_{n+1}.
On sait que : $u_{n+1} - 5u_n = 6$ et $\delta \mid u_{n+1} - 5u_n$; donc $\delta \mid 6$; on en déduit que δ ne peut pas prendre d'autre valeur que : 1 ; 2 ; 3 et 6.
D'après **2.**, (u_n) est une suite d'entiers pairs donc δ ne peut pas prendre d'autre valeur que : 2 et 6.
D'après **3.a.** : $2u_n = 5^{n+2} + 3$, dons si u_n était multiple de 3, $2u_n - 3$ (c'est-à-dire 5^{n+2}) le serait aussi, mais ce n'est pas le cas donc :

$$\boxed{\textbf{Pour tout entier naturel } \boldsymbol{n} \textbf{ : PGCD} \left(\boldsymbol{u_n\,;u_{n+1}}\right) = \textbf{2.}}$$

XII Amérique du sud novembre 2004

Soit A_0 et B_0 deux points du plan orienté tels que $\mathrm{A_0B_0} = 8$. On prendra le centimètre pour unité.
Soit S la similitude directe de centre A_0, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{3\pi}{4}$.
On définit une suite de points (B_n) de la façon suivante :

pour tout entier naturel n, $\mathrm{B}_{n+1} = \mathrm{S}(\mathrm{B}_n)$.

1. *Construire B_1, B_2, B_3 et B_4.*

Par définition de S, les points B_1, B_2, B_3 et B_4 sont les points tels que :

- $\left(\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0B_1}\right) = \frac{3\pi}{4}$ et $A_0B_1 = \frac{1}{2}A_0B_0 = 4$;
- $\left(\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0B_2}\right) = \left(\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0B_1}\right) + \left(\overrightarrow{A_0B_1}, \overrightarrow{A_0B_2}\right) = \frac{3\pi}{2}$ et $A_0B_2 = \frac{1}{2}A_0B_1 = 2$;
- $\left(\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0B_3}\right) = \left(\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0B_2}\right) + \left(\overrightarrow{A_0B_2}, \overrightarrow{A_0B_3}\right) = \frac{9\pi}{4}$, soit $\left(\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0B_3}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $A_0B_3 = \frac{1}{2}A_0B_2 = 1$;
- $\left(\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0B_4}\right) = \left(\overrightarrow{A_0B_0}, \overrightarrow{A_0B_3}\right) + \left(\overrightarrow{A_0B_3}, \overrightarrow{A_0B_4}\right) = \pi$ et $A_0B_4 = \frac{1}{2}A_0B_3 2 = \frac{1}{2}$;

On en déduit la figure 5.

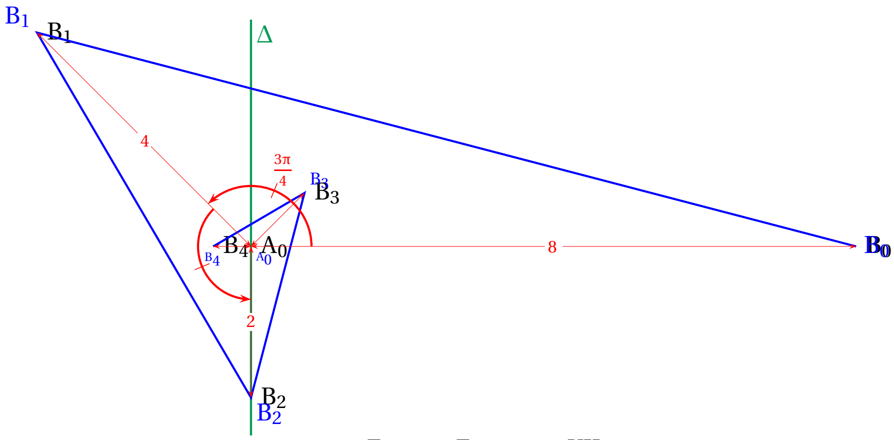

FIG. 5 – EXERCICE XII

2. *Montrer que, pour tout entier naturel n, les triangles $A_0B_nB_{n+1}$ et $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ sont semblables.*

Pour tout entier naturel n, les images des points A_0, B_n, B_{n+1} par la similitude directe S sont respectivement A_0, B_{n+1}, B_{n+2} ; donc :

pour tout entier naturel n, les triangles $A_0B_nB_{n+1}$ et $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ sont directement semblables.

3. *On définit la suite (l_n) par : pour tout entier naturel n, $l_n = B_nB_{n+1}$.*

a. *Montrer que la suite (l_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.*

S est une similitude de rapport $\frac{1}{2}$, elle divise donc les distance par 2. Pour tout entier naturel n, les images des points B_n et B_{n+1} par S sont B_{n+1} et B_{n+2}, donc : $l_{n+1} = B_{n+1}B_{n+2} = \frac{1}{2} = B_nB_{n+1} = \frac{1}{2}l_n$.

(l_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b. *Exprimer l_n en fonction de n et de l_0.*

(l_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, donc pour tout entier naturel n :

$$\boxed{l_n = \frac{1}{2^n}l_0}.$$

c. *On pose $\Sigma_n = l_0 + l_1 + \cdots + l_n$.*
Déterminer la limite de Σ_n lorsque n tend vers $+\infty$.

On sait que : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$; de plus, pour tout entier naturel n : $\Sigma_n = l_0 \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{1-\frac{1}{2}} = 2l_0\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$; donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \Sigma_n = 2l_0.$$

Or,par définition de l_0 et en utilisant le théorème d'AL KASHI dans le triangle $A_0B_0B_1$, il vient :

$$l_0^2 = B_0B_1^2 = A_0B_1^2 + A_0B_0^2 - 2\,A_0B_1\,A_0B_0\cos\frac{3\pi}{4} = 16 + 64 - 2\times4\times8\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 80 + 32\sqrt{2} = 16\left(5 + 2\sqrt{2}\right)$$

On sait que l_0 est positif (l_0 est une distance), donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \Sigma_n = 8\sqrt{5+2\sqrt{2}}}.$$

Soit : $\lim_{n\to+\infty} \Sigma_n = 22,383\cdots$

4. a. *Résoudre l'équation* $3x-4y=2$ *où* x *et* y *sont deux entiers relatifs.*

Désignons par (E) cette équation. On remarque immédiatement que $(2;1)$ est une solution évidente. On en déduit que :

$$(\text{E}) \iff 3x-4y = 3\times2-4\times1 \iff 3(x-2)=4(y-1).$$

Raisonnons par conditions nécessaires. Soit $(x;y)$ une solution de (E).
4 divise $3(x-2)$ et est premier avec 3 donc, d'après le théorème de GAUSS, 4 divise $(x-2)$; il existe donc un entier relatif k tel que : $(x-2)=4k$; soit : $x=4k+2$.
On en déduit que : $3\times4k = 4(y-1)$; d'où : $y=3k+1$.
Les couples solutions sont donc nécessairement de la forme : $(4k+2;3k+1)$ où k est un entier.
Réciproquement, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, on a : $3(4k+2)-3(4k+1) = 12k+6-12k-4 = 2$; donc : $(4k+2;3k+1)$ est solution de (E).

$$\boxed{\mathrm{S_E} = \left\{(\boldsymbol{4k+2;3k+1})\,\middle|\, \boldsymbol{k}\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

b. *Soit* Δ *la droite perpendiculaire en* A_0 *à la droite* (A_0B_0).
Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, B_n *appartient-il à* Δ *?*

À chaque itération l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{A_0B_0}},\overrightarrow{\mathrm{A_0B}_n}\right)$ augmente de $\frac{3\pi}{4}$ rad et pour $n=0$ cet angle est nul, on en déduit que pour tout entier naturel n :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{A_0B_0}},\overrightarrow{\mathrm{A_0B}_n}\right) = \frac{3\pi}{4}n\,(\mathrm{mod}\,2\pi).$$

De plus, pour tout entier naturel n :

$$\mathrm{B}_n\in\Delta \iff \overrightarrow{\mathrm{A_0B_0}}\perp\overrightarrow{\mathrm{A_0B}_n} \iff \left(\overrightarrow{\mathrm{A_0B_0}},\overrightarrow{\mathrm{A_0B}_n}\right) = \frac{\pi}{2}+m\pi \quad (m\in\mathbb{Z}).$$

Donc B_n appartient à Δ si et seulement si il existe un entier m tel que :

$$\frac{3\pi}{4}n = \frac{\pi}{2}+m\pi. \qquad \text{(E')}$$

En multipliant (E') membre à membre par $\frac{4}{\pi}$ et posant : $x=n$ et $y=m$; il vient :

$$\text{(E')} \iff 3n=2+4m \iff 3n-4n=2 \iff 3x-4y=2 \iff \text{(E)}$$

On en déduit que :

$$\boxed{\textbf{B}_{\boldsymbol n}\textbf{ appartient à }\boldsymbol\Delta\textbf{ si et seulement si il existe un entier }\boldsymbol k\textbf{ tel que : } \boldsymbol{n=4k+2}.}$$

XIII Amérique du nord juin 2004

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Soient les points A, A', B, B' d'affixes respectives :

$$z_{\mathrm A}=1-2i\,,\quad z_{\mathrm{A'}}=-2+4i\,,\quad z_{\mathrm B}=3-i\,,\quad z_{\mathrm{B'}}=5i\,.$$

1. a. *Placer les points A, A', B, B' dans le plan complexe.*
Montrer que ABB'A' est un rectangle.

Les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$ ont pour affixes : $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} = z_{\mathrm B}-z_{\mathrm A} = 2-i$ et $z_{\overrightarrow{\mathrm{A'B'}}} = z_{\mathrm{B'}}-z_{\mathrm{A'}} = 2-i$; donc : $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{A'B'}}$; on en déduit que ABB'A' est un parallélogramme.
De plus : $\mathrm{AB'} = |z_{\mathrm{B'}}-z_{\mathrm A}| = |-1+7i| = \sqrt{50}$ et $\mathrm{A'B} = |z_{\mathrm B}-z_{\mathrm{A'}}| = |5-5i| = \sqrt{50}$; donc les diagonales du parallélogramme ABB'A' ont même longueur :

$$\boxed{\textbf{ABB'A' est un rectangle.}}$$

b. *Soit* s *la réflexion telle que* $s(\mathrm A)=\mathrm{A'}$ *et* $s(\mathrm B)=\mathrm{B'}$. *On note* (Δ) *son axe.*
Donner une équation de la droite (Δ) *et la tracer dans le plan complexe.*

La droite (Δ) a pour équation[1] :

$$\boxed{\boldsymbol{x-2y-\frac{5}{2}=0}}.$$

c. *On note* z' *l'affixe du point M' image par* s *du point M d'affixe* z.
Montrer que

$$z' = \left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\right)\overline{z}+2i-1.$$

[1] Pour trouver cette équation, il suffit de remarquer que (Δ) passe par le point $\mathrm{I}\left(-\frac{1}{2}+i\right)$, milieu de [AA'] et a pour vecteur normal $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ (voir figure 6 page 21).

s est une similitude indirecte, elle a donc une écriture complexe de la forme : $z' = a\overline{z} + b$;
on a : $z_{A'} = a\overline{z_A} + b$ et $z_{B'} = a\overline{z_B} + b$; donc : $z_{\overrightarrow{A'B'}} = z_{B'} - z_{A'} = a\left(\overline{z_B} - \overline{z_A}\right) = a\left(\overline{z_B - z_A}\right) = a\overline{z_{\overrightarrow{AB}}}$.

On en déduit que : $a = \dfrac{z_{\overrightarrow{A'B'}}}{\overline{z_{\overrightarrow{AB}}}} = \dfrac{2+i}{2-i} = \dfrac{(2+i)^2}{2^2+1^2} = \dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i$.

De plus $b = z_{A'} - a\overline{z_A} = -2+4i - \dfrac{1}{5}\left(3+4i\right)(1+2i) = -2+4i+1-2i = -1+2i$;
donc s a pour écriture complexe :

$$\boxed{\boldsymbol{z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\overline{z} + 2i - 1}}.$$

Autre méthode Soit s' l'application plane d'écriture complexe :

$$z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\overline{z} + 2i - 1.$$

s' est donc similitude indirecte. De plus, pour $z = z_A$, on a :
$z' = \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i\right)\left(1+2i\right) + 2i - 1 = -1+2i+2i-1 = z_{A'}$; donc : $\mathrm{s}'(\mathrm{A}) = \mathrm{A}'$.

Pour $z = z_B$, on a : $z' = \left(\dfrac{3}{5} + \dfrac{4}{5}i\right)\left(3+i\right) + 2i - 1 = 1+3i+2i-1 = z_{B'}$; donc : $\mathrm{s}'(\mathrm{B}) = \mathrm{B}'$.

$\mathrm{s}^{-1} \circ \mathrm{s}'$, composée de deux similitudes indirectes est une similitude directe.
De plus : $\mathrm{s}^{-1} \circ \mathrm{s}'(\mathrm{A}) = \mathrm{s}^{-1}(\mathrm{A}') = \mathrm{A}$ et $\mathrm{s}^{-1} \circ \mathrm{s}'(\mathrm{B}) = \mathrm{s}^{-1}(\mathrm{B}') = \mathrm{B}$.
La similitude directe $\mathrm{s}^{-1} \circ \mathrm{s}'$ a deux point fixes distincts, donc : $\mathrm{s}^{-1} \circ \mathrm{s}' = \mathrm{Id}$.
En composant membre à membre à gauche par s dans la dernière égalité, il vient : $\mathrm{s}' = \mathrm{s}$.

$$\boxed{\textbf{s a pour écriture complexe : } \boldsymbol{z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\overline{z} + 2i - 1.}}$$

2. *Soit g l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point P d'affixe z' définie par :*

$$z' = \left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)\overline{z} + 5 - i.$$

a. *On note C et D les images respectives de A et B par g ; déterminer les affixes de C et D et placer ces points dans le plan complexe.*

C a pour affixe : $z_C = \left(-\dfrac{6}{5} - \dfrac{8}{5}i\right)\overline{z_A} + 5 - i = -\dfrac{2}{5}(3+4i)(1+2i) + 5 - i = 7-5i$.

$$\boxed{z_C = \mathbf{7 - 5}\boldsymbol{i}}.$$

D a pour affixe : $z_D = \left(-\dfrac{6}{5} - \dfrac{8}{5}i\right)\overline{z_B} + 5 - i = -\dfrac{2}{5}(3+4i)(3+i) + 5 - i = 3-7i$.

$$\boxed{z_D = \mathbf{3 - 7}\boldsymbol{i}}.$$

b. *Soit Ω le point d'affixe $1+i$ et soit h l'homothétie de centre Ω et rapport -2.*
Montrer que C et D sont les images respectives de A' et B' par h.

h a pour écriture complexe : $z' - (1+i) = -2\big(z - (1+i)\big)$; c'est-à-dire : $z' = -2z + 3 + 3i$.
Pour $z = z_{A'}$, il vient : $z' = -2(-2+4i) + 3 + 3i = 7 - 5i = z_C$;
pour $z = z_{B'}$, il vient : $z' = -2 \times 5i + 3 + 3i = 3 - 7i = z_D$; donc :

$$\boxed{\mathrm{h}(\mathrm{A}') = \mathrm{C} \quad \textbf{et} \quad \mathrm{h}(\mathrm{B}') = \mathrm{D}}.$$

c. *Soit M_1, d'affixe z_1, l'image par h de M, d'affixe z.*
Donner les éléments caractéristiques de h^{-1} et exprimer z en fonction z_1.

$$\boxed{\textbf{h}^{-1} \textbf{ est l'homothétie de centre } \boldsymbol{\Omega} \textbf{ et de rapport } -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}.}$$

On sait que : $z_1 = -2z + 3 + 3i$; donc :

$$\boxed{\boldsymbol{z = -\frac{1}{2}z_1 + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i}}.$$

3. *On pose :* $\mathrm{f} = \mathrm{h}^{-1} \circ \mathrm{g}$.

a. *Déterminer l'expression complexe de f.*

f a pour expression complexe :

$$z' = -\frac{1}{2}\left(\left(-\frac{6}{5} - \frac{8}{5}i\right)\overline{z} + 5 - i\right) + \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i ;$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\boldsymbol{z' = \left(\frac{3}{5} + \frac{4}{5}i\right)\overline{z} + 2i - 1}}.$$

b. *Reconnaître f. En déduire une construction du point P, image par g d'un point M quelconque donné du plan.*

f et s ont la même expression complexe, donc :

$$\boxed{\mathrm{f} = \mathrm{s}}.$$

On a : $\mathrm{s} = \mathrm{h}^{-1} \circ \mathrm{g}$; donc en composant membre à membre à gauche par h, il vient :

$$\mathrm{g} = \mathrm{h} \circ \mathrm{s}.$$

Pour construire l'image P d'un point M par g, il suffit de construire le symétrique, M', de M par rapport à (Δ), P est alors l'image de M' par h *(voir figure ci-dessous).*

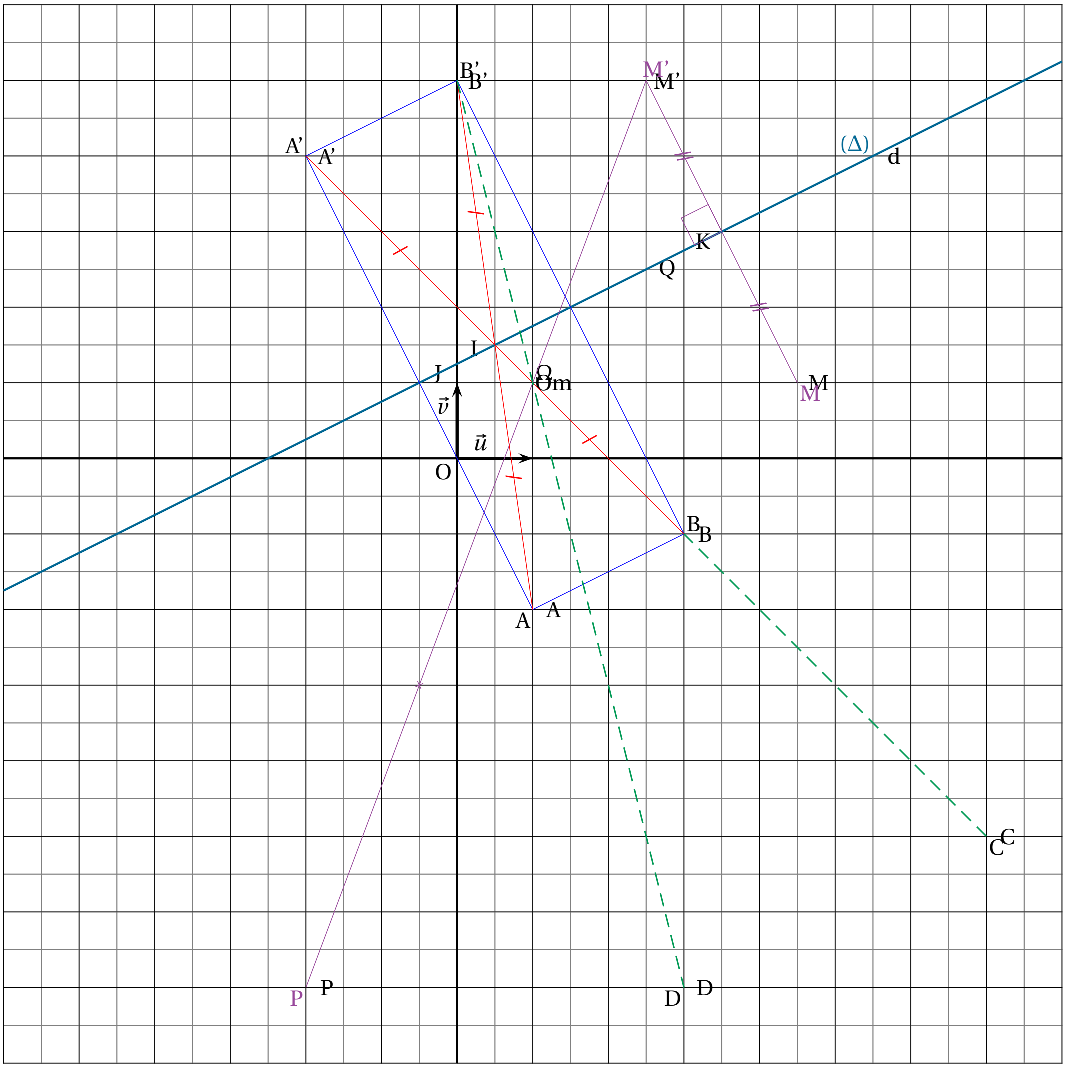

FIG. 6 –

XIV Centres étrangers 1 juin 2004

On se propose d'étudier le problème suivant :
« Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre 1 peuvent-ils être premiers ? »

Pour tout entier naturel $p \geqslant 2$, on pose : $N_p = 1 \cdots 1$ où 1 apparaît p fois.
On rappelle dès lors que : $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \cdots + 10^0$.

1. *Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, $N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?*

$$\boxed{\mathbf{N_2 \text{ est un nombre premier.}}}$$

On a : $111 = 3 \times 37$ et $1111 = 11 \times 101$; donc :

$$\boxed{\mathbf{N_3 \text{ et } N_4 \text{ ne sont pas des nombres premiers.}}}$$

2. *Prouver que : $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?*

Soit p un entier naturel (avec $p \geqslant 2$). On a : $\mathrm{N}_p = 10^0 + \cdots + 10^{p-2} + 10^{p-1}$;

donc N_p est la somme des p premiers termes de la suite géométrique de raison 10 et de premier terme 1, on déduit que :

$$\boxed{N_p = \frac{1-10^p}{1-10} = \frac{10^p-1}{9}}.$$

N_p, somme d'entiers naturels, est un entier naturel ; la formule ci-dessus prouve donc que :

$$\boxed{\textbf{$10^p - 1$ est divisible par 9.}}$$

3. *On se propose de démontrer que si p n'est pas premier alors N_p n'est pas premier.*
On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul :

$$x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1).$$

a. *On suppose que p est pair et on pose : $p = 2q$ où q est un entier naturel plus grand que 1.*
Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.

Utilisons l'identité remarquable rappelée ci-dessus avec $n = q$ et et $x = 10^2$. D'après **2.** :

$$9N_p = 10^p - 1 = \left(10^2\right)^q - 1 = (100-1)\left(100^{q-1} + 100^{q-2} + \cdots + 1\right);$$

d'où il vient :

$$N_p = 11\left(\underbrace{100^{q-1} + 100^{q-2} + \cdots + 1}_{\in\mathbb{N}}\right);$$

ce qui prouve que :

$$\boxed{\textbf{N_p est divisible par N_2.}}$$

b. *On suppose que p est multiple de 3 et on pose : $p = 3q$ où q est un entier naturel plus grand que 1.*
Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.

On a de même qu'en **3.a.** :

$$9N_p = 10^p - 1 = \left(10^3\right)^q - 1 = (1000-1)\left(1000^{q-1} + 1000^{q-2} + \cdots + 1\right).$$

On a : $1000 - 1 = 999 = 9 \times 111 = 9N_3$; donc :

$$N_p = N_3\left(\underbrace{1000^{q-1} + 1000^{q-2} + \cdots + 1}_{\in\mathbb{N}}\right);$$

ce qui prouve que :

$$\boxed{\textbf{N_p est divisible par N_3.}}$$

c. *On suppose p non premier et on pose : $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grand que 1.*
Montrer que N_p est divisible par N_k.

Utilisons l'identité remarquable rappelée en **3.** avec $n = q$ et et $x = 10^k$. D'après **2.** :

$$N_p = \frac{10^p - 1}{9} = \frac{(10^k)^q - 1}{9} = \frac{(10^k - 1)\left((10^k)^{q-1} + (10^k)^{q-2} + \cdots + 1\right)}{9}.$$

En remarquant que : $\dfrac{10^k - 1}{9} = N_k$ (voir **2.**) ; nous en déduisons que :

$$N_p = N_k\left(\underbrace{(10^k)^{q-1} + (10^k)^{q-2} + \cdots + 1}_{\in\mathbb{N}}\right).$$

ce qui prouve que :

$$\boxed{\textbf{N_p est divisible par N_k.}}$$

4. *Énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier.*
Cette condition est-elle suffisante ?

Nous venons de démontrer en **3.c.** que si p est composé alors N_p est composé ; nous en déduisons par contraposition que si N_p est premier alors p est premier.

$$\boxed{\textbf{Pour que N_p soit premier, il est nécessaire que p soit premier.}}$$

On sait que 3 est un nombre premier et on a vu en **1.** que N_3 n'est pas un nombre premier ; ce contre-exemple prouve que :

$$\boxed{\textbf{la condition nécessaire énoncée ci-dessus n'est pas suffisante.}}$$

XV La Réunion juin 2004

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p ; alors $a^{p-1}-1$ est divisible par p ».

1. *Soit p un nombre premier impair.*

a. *Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k \equiv 1 \pmod p$.*

p est impair, il n'est donc pas multiple de 2 ; de plus p est premier, il est donc premier avec 2. D'après le petit théorème de Fermat, $2^{p-1}-1$ est multiple de p ; donc pour $k = p-1$:

$$\boxed{\mathbf{2^k \equiv 1 \pmod p}}.$$

b. *Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1 \pmod p$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n, alors $2^n \equiv 1 \pmod p$.*

Si k divise n, alors il existe un entier k' tel que : $n = kk'$.
On a : $2^k \equiv 1 \pmod p$; donc : $2^{kk'} \equiv 1^{k'} \pmod p$; c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathbf{2^n \equiv 1 \pmod p}}.$$

c. *Soit b tel que $2^b \equiv 1 \pmod p$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.*
Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n \equiv 1 \pmod p$, alors b divise n.

Soit n un entier naturel et q et r le quotient et le reste de la division de n par b.
On a : $2^b \equiv 1 \pmod p$; donc : $\left(2^b\right)^q \equiv 1^q \pmod p$; puis : $2^{bq} \times 2^r \equiv 1 \times 2^r \pmod p$; c'est-à-dire : $2^n \equiv 2^r \pmod p$.
Donc si : $2^n \equiv 1 \pmod p$; alors : $2^r \equiv 1 \pmod p$.
Or $r < b$ et b est le plus petit entier naturel non nul vérifiant la propriété, donc : $r = 0$.

$$\boxed{\textbf{si } \mathbf{2^n \equiv 1 \pmod p}\textbf{, alors } \boldsymbol{b} \textbf{ divise } \boldsymbol{n}.}$$

2. *Soit q un nombre premier impair et le nombre $\mathrm{A} = 2^q - 1$.*
On prend pour p un facteur premier de A.

a. *Justifier que : $2^q \equiv 1 \pmod p$.*

A est multiple de p, donc $2^q - 1$ aussi, c'est-à-dire :

$$\boxed{\mathbf{2^q \equiv 1 \pmod p}}.$$

b. *Montrer que p est impair.*

$2^q - 1$ est multiple de p donc si p était pair alors $2^q - 1$ le serait aussi et 2^q serait impair ; ce qui n'est pas le cas car q est premier et donc non nul.

$$\boxed{\boldsymbol{p} \textbf{ est impair.}}$$

c. *Soit b tel que $2^b \equiv 1 \pmod p$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.*
*Montrer, en utilisant **1.** que b divise q. En déduire que $b = q$.*

D'après **2.a.** et **1.c.** :

$$\boxed{\boldsymbol{b} \textbf{ divise } \boldsymbol{q}.}$$

Or q est premier et $b \neq 1$ (car sinon on aurait : $2^1 \equiv 1 \pmod p$ avec $p \geqslant 3$) ; donc :

$$\boxed{\boldsymbol{b = q}}.$$

d. *Montrer que q divise $p-1$, puis montrer que $p \equiv 1 \pmod{2q}$.*

D'après **3.c.**, q est le plus petit entier naturel non nul vérifiant : $2^q \equiv 1 \pmod p$.
Or, d'après **1.a.** : $2^{p-1} \equiv 1 \pmod 4$; donc d'après **1.c.** :

$$\boxed{\boldsymbol{q} \textbf{ divise } \boldsymbol{p-1}}$$

p est impair, $p-1$ est donc multiple de 2. $p-1$ est multiple de q et de 2, il est donc multiple de $\mathrm{PPCM}(2;q)$. Or q est impair donc : $\mathrm{PPCM}(2;q) = 2q$. On en déduit que $p-1$ est multiple de $2q$, c'est-à-dire :

$$\boxed{\boldsymbol{p \equiv 1 \pmod{2q}}}.$$

3. *Soit $\mathrm{A}_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m+1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.*

17 est un nombre premier impair, pour : $q = 17$; on a : $\mathrm{A} = \mathrm{A}_1$.

Soit p un diviseur premier de A_1. D'après **2.b.**, p est impair et d'après **2.d.**, $p = m \times 2q + 1 = 34m + 1$ avec $m \in \mathbb{N}$. Si A_1 était composé, il admettrait un diviseur premier, p, tel que : $p \leqslant \sqrt{A_1}$ c'est-à-dire $p \leqslant 362,0\cdots$
On en déduit que si A_1 était composé, il serait divisible par l'un des nombres suivants : 103, 137, 239, 307.
On a :

$$A_1 = 2^{17} - 1 = 131\,071$$
$$131\,071 = 1\,272 \times 103 + 55$$
$$131\,071 = 956 \times 137 + 99$$
$$131\,071 = 548 \times 239 + 99$$
$$131\,071 = 426 \times 307 + 289$$

On en déduit que A_1 n'est divisible par aucun des nombres : 103, 137, 239, 307. Par conséquent :

A_1 est un nombre premier.

XVI Nouvelle Calédonie novembre 2004

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. a. *Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = 1$; alors les nombres a et b sont premiers entre eux.*

Supposons qu'il existe deux entiers relatifs u et v tels que : $au + bv = 1$.
Soit δ le PGCD de a et b.
Alors δ divise a et b, donc δ divise $au + bv$; c'est-à-dire δ divise 1. Or δ est un entier naturel, donc : $\delta = 1$; et donc :

les nombres a et b sont premiers entre eux.

b. *En déduire que si $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.*

On a :
$$\begin{aligned}\left(a^2+ab-b^2\right)^2 &= \left(a(a+b)+b^2\right) \\ &= a^2(a+b)^2 + 2ab(a+b) + b^4 \\ &= a\Big(\underbrace{a(a+b)^2}_{u}\Big) + b\Big(\underbrace{2a(a+b)+b^3}_{v}\Big).\end{aligned}$$

Donc, d'après **1.b.** :

si $(a^2 + ab - b^2)^2 = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.

2. *On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs $(a\,;b)$ tels que $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$. Un tel couple sera appelé solution.*

a. *Déterminer a lorsque $a = b$.*

Soit $(a\,;b)$ un couple solution.
Si $b = a$, alors : $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$; c'est-à-dire : $a^4 = 1$. Les solutions réelles de cette équation sont 1 et -1. Sachant que a est positif, on en déduit que : $a = 1$.

Réciproquement, pour : $(a\,;b) = (1\,;1)$; on a : $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = \left(1^2 + 1 \times 1 - 1^2\right)^2 = 1$; donc :

Il n'existe qu'un seul couple solution de la forme $(a\,;a)$, c'est : $(1\,;1)$.

b. *Vérifier que $(1\,;1)$, $(2\,;3)$ et $(5\,;8)$ sont trois solutions particulières.*

Le cas $(1\,;1)$ a été traité en **2.a.**.
Pour : $(a\,;b) = (2\,;3)$; on a : $(a^2 + ab - b^2)^2 = (2^2 + 2 \times 3 - 3^2)^2 = (4 + 6 - 9)^2 = 1$;
pour : $(a\,;b) = (5\,;8)$; on a : $(a^2 + ab - b^2)^2 = (5^2 + 5 \times 8 - 8^2)^2 = (25 + 40 - 64)^2 = 1$; donc :

$(1\,;1)$, $(2\,;3)$ et $(5\,;8)$ sont trois solutions particulières.

c. *Montrer que si $(a\,;b)$ est solution et si $a \neq b$, alors : $a^2 - b^2 < 0$.*

Soit $(a\,;b)$ un couple d'entiers naturels non nuls tels que : $a \neq b$.
On a donc : $ab > 1$.
Si $a^2 - b^2 \geqslant 0$, alors : $a^2 + ab - b^2 > 1$; d'où il vient : $(a^2 + ab - b^2)^2 > 1$.
On en déduit l'implication :

si $a^2 - b^2 \geqslant 0$, alors le couple $(a\,;b)$ n'est pas solution,

et sa contraposée :

si le couple $(a\,;b)$ est solution, alors $a^2 - b^2 < 0$.

3. a. *Montrer que si $(x\,;y)$ est une solution différente de $(1\,;1)$ alors $(y - x\,;x)$ et $(y\,;y + x)$ sont aussi des solutions.*

Soit $(x\,;y)$ un couple solution distincte de $(1\,;1)$. D'après **2.c.** : $(x + y)(x - y) < 0$; or : $(x + y) > 0$; donc : $y - x > 0$.
Donc, x, y, $y - x$ et $x + y$ sont des entiers naturels non nuls.
De plus : $\left((y - x)^2 + x(y - x) - x^2\right)^2 = \left(y^2 - 2xy + x^2 + xy - x^2 - x^2\right)^2 = \left(-x^2 - xy + y^2\right)^2 = \left(x^2 + xy - y^2\right)^2 = 1$.
Donc $(y - x\,;x)$ est solution.

De même : $\left(y^2+y(x+y)-(x+y)^2\right)^2=\left(y^2+xy+y^2-x^2-2xy-y^2\right)^2=\left(-x^2-xy+y^2\right)^2=\left(x^2+xy-y^2\right)^2=1$.
Donc $(y\,;x+y)$ est solution.

Si $(x;y)$ est une solution différente de $(1;1)$ alors $(y-x;x)$ et $(y;y+x)$ sont aussi des solutions.

b. *Déduire de* **2.b.** *trois nouvelles solutions.*

$(2;3)$ est solution donc $(3-2;2)$ et $(3;3+2)$, c'est-à-dire $(1;2)$ et $(3;5)$, sont également solutions.
$(5;8)$ est solution donc $(8-5;5)$ et $(8;8+5)$, c'est-à-dire $(3;5)$ et $(8;13)$, sont également solutions.
On en déduit trois nouvelles solutions :

$$\boxed{(1;2) \qquad (3;5) \qquad (8;13)}.$$

4. *On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0=a_1=1$ et pour tout entier n, $n\geqslant 0$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$.*
Démontrer que pour tout entier $n\geqslant 0$, $(a_n\,;a_{n+1})$ est solution.
En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

Pour tout entier naturel n, considérons la proposition P_n : « $(a_n\,;a_{n+1})$ est solution ».
On a : $(a_0\,;a_1)=(1\,;1)$; donc, d'après **2.a.**, P_0 est vraie.
Soit k un entier pour lequel P_k est vraie. Démontrons P_{k+1}.
$(a_k\,;a_{k+1})$ est solution donc, d'après **3.a.**, $(a_{k+1}\,;a_{k+1}+a_k)$ (c'est-à-dire $(a_{k+1}\,;a_{k+2})$) est solution ; ce qui prouve P_{k+1}.
Donc par récurrence :

pour tout entier naturel n, $(a_n\,;a_{n+1})$ est solution.

D'après **1.b.**, on en déduit que :

pour tout entier naturel n, a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

XVII Polynésie septembre 2004

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On prendra, sur la figure 1 cm pour unité graphique.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1+i$, $3+2i$ et $i\sqrt{2}$.

1. *On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point $\mathrm{M}'=\mathrm{f(M)}$ d'affixe z' définie par :*

$$z'=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{z}-1+i\left(1+\sqrt{2}\right).$$

a. *Calculer les affixes des points $\mathrm{A}'=\mathrm{f(A)}$ et $\mathrm{C}'=\mathrm{f(C)}$.*

Pour $z=-1+i$, on a :
$$\begin{aligned} z' &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{(-1+i)}-1+i\left(1+\sqrt{2}\right)\\ &= -\frac{(1+i)^2}{\sqrt{2}}-1+i+i\sqrt{2}\\ &= -\frac{2i}{\sqrt{2}}-1+i+i\sqrt{2}\\ &= -i\sqrt{2}-1+i+i\sqrt{2}\\ &= -1+i. \end{aligned}$$
Donc :

$$\boxed{\mathrm{f(A)=A}}.$$

Pour $z=i\sqrt{2}$, on a :
$$\begin{aligned} z' &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{(i\sqrt{2})}-1+i\left(1+\sqrt{2}\right)\\ &= -i(1+i)-1+i+i\sqrt{2}\\ &= -i+1-1+i+i\sqrt{2}\\ &= i\sqrt{2}. \end{aligned}$$
Donc :

$$\boxed{\mathrm{f(C)=C}}.$$

b. *En déduire la nature de f et caractériser cette transformation.*

f a une écriture complexe de la forme : $z'=a\overline{z}+b$ avec $a\in\mathbb{C}^\star$ et $b\in\mathbb{C}$; donc f est une similitude indirecte.
Désignons par σ la réflexion d'axe (AC). $\sigma^{-1}\circ\mathrm{f}$, composée de deux similitude indirecte est une similitude directe.
De plus : $\sigma^{-1}\circ\mathrm{f(A)}=\sigma^{-1}(\mathrm{A})=\mathrm{A}$ et $\sigma^{-1}\circ\mathrm{f(C)}=\sigma^{-1}(\mathrm{C})=\mathrm{C}$; f est une similitude qui a deux points fixes distincts, A et C, donc :

$$\sigma^{-1}\circ\mathrm{f}=\mathrm{Id}_{\mathscr{P}};$$

donc :

$$\sigma\circ\sigma^{-1}\circ\mathrm{f}=\sigma\circ\mathrm{Id}_{\mathscr{P}};$$

c'est-à-dire :

$$\mathrm{f}=\sigma.$$

$\boxed{\textbf{f est la réflexion d'axe (AC).}}$

c. *Placer les points A, B et C puis construire le point* $B' = f(B)$.

Le point B' est le symétrique de B par rapport à (AC), voir figure 7.

2. a. *Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport* $\sqrt{2}$.

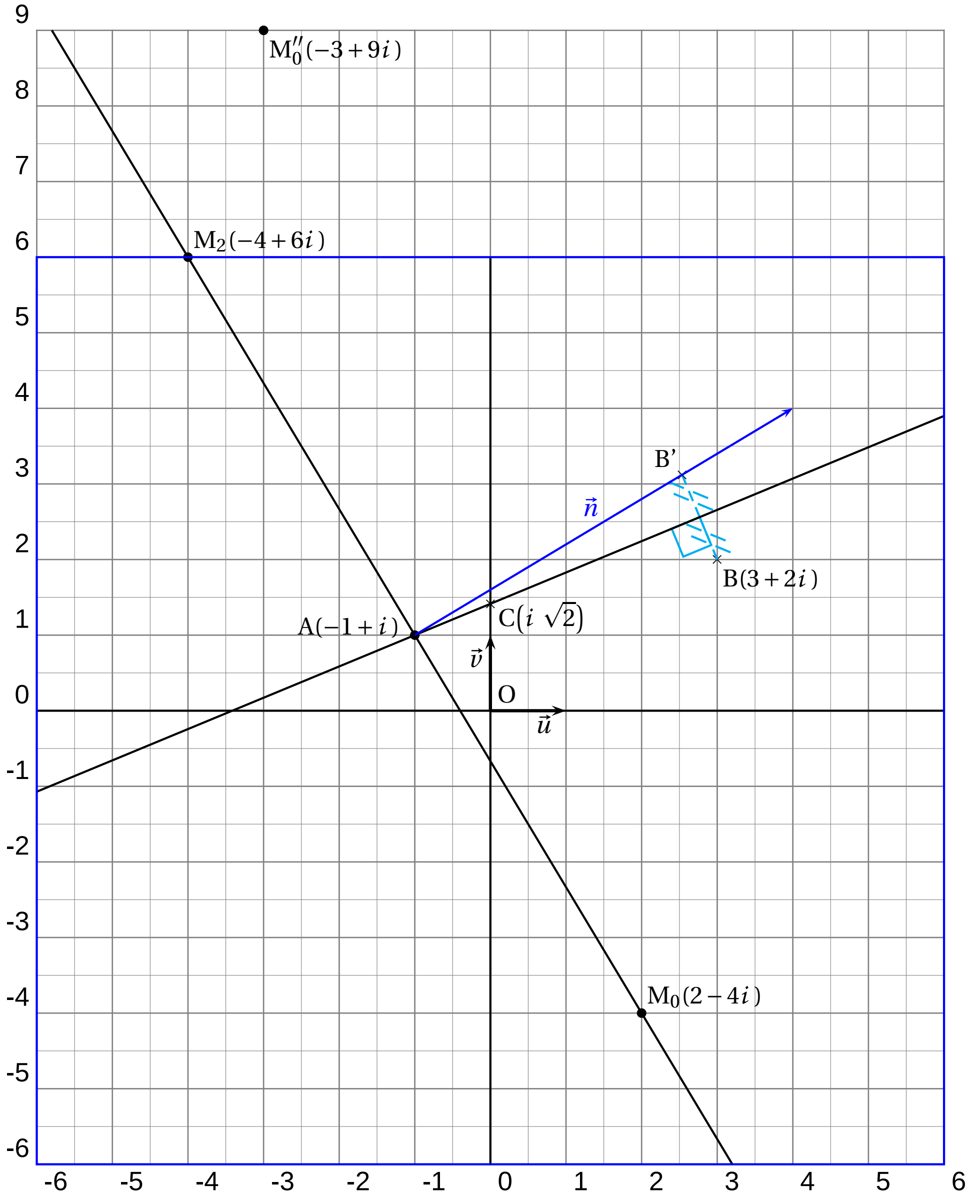

FIG. 7 – Les points A, B, C et B'

L'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$ est la transformation qui à tout point M du plan associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{AM'} = \sqrt{2}\,\overrightarrow{AM}\,;$$

elle a donc pour écriture complexe :

$$z' - (-1+i) = \sqrt{2}\big(z - (-1+i)\big) \tag{XVII-4}$$

c'est-à-dire :

$$\boxed{\boldsymbol{z' = \sqrt{2}z + \left(1 - \sqrt{2}\right)\left(-1+i\right)}}.$$

b. *Montrer que la composée,* $g = f \circ h$, *a pour écriture complexe :* $z'' = (1+i)\overline{z} - 1 + 3i$.

1$^{\text{re}}$ méthode

f et h ont respectivement pour écritures complexes :

$$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{z} - 1 + i\left(1+\sqrt{2}\right) \qquad \text{et} \qquad z' = \sqrt{2}z + \left(1-\sqrt{2}\right)\left(-1+i\right).$$

Donc $f \circ h$ a pour écriture complexe :

$$z'' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(\overline{\sqrt{2}z + (1-\sqrt{2})(-1+i)}\right) - 1 + i\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a alors :

$$\begin{aligned} z'' &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}\overline{z} + (1-\sqrt{2})(-1-i)\right) - 1 + i\left(1+\sqrt{2}\right) \\ &= (1+i)\overline{z} - \left(1-\sqrt{2}\right)\frac{(1+i)^2}{\sqrt{2}} - 1 + i + i\sqrt{2} \\ &= (1+i)\overline{z} - \left(1-\sqrt{2}\right)\frac{2i}{\sqrt{2}} - 1 + i + i\sqrt{2} \\ &= (1+i)\overline{z} - \left(1-\sqrt{2}\right)\sqrt{2}i - 1 + i + i\sqrt{2} \\ &= (1+i)\overline{z} - i\sqrt{2} + 2i - 1 + i + i\sqrt{2} \\ &= (1+i)\overline{z} - 1 + 3i \end{aligned}$$

g a pour écriture complexe : $z'' = (1+i)\overline{z} - 1 + 3i$.

2$^{\mathrm{e}}$ méthode

f a écriture complexe :

$$z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\overline{z} - 1 + i\left(1+\sqrt{2}\right)$$

et $A(-1+i)$ est invariant par f, donc :

$$-1+i = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(\overline{-1+i}\right) - 1 + i\left(1+\sqrt{2}\right).$$

Donc, par soustraction, f a également pour écriture complexe :

$$z' - (-1+i) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(\overline{z-(-1+i)}\right)$$

Donc, en utilisant (XVII-4), f∘h a pour écriture complexe :

$$z' - (-1+i) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(\overline{\sqrt{2}\left(z-(-1+i)\right)}\right)$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a alors :

$$\begin{aligned} z'' &= (1+i)\overline{z} + 2i - 1 + i \\ &= (1+i)\overline{z} - 1 + 3i \end{aligned}$$

g a pour écriture complexe : $z'' = (1+i)\overline{z} - 1 + 3i$.

3. a. *Soit M_0 le point d'affixe $2-4i$.*
Determiner l'affixe du point $M_0'' = g(M_0)$ puis vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_0''}$ sont orthogonaux.

Pour $z = 2-4i$ dans l'écriture complexe de g, il vient :

$$z'' = (1+i)\overline{(2-4i)} - 1 + 3i = 2 + 2i + 4i - 4 - 1 + 3i = -3 + 9i$$

M_0'' est le point d'affixe : $-3+9i$.

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe : $3+2i-(-1+i) = 4+i$.
Le vecteur $\overrightarrow{AM_0''}$ a pour affixe : $-3+9i-(-1+i) = -2+8i = 2i(4+i) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}(4+i)$.

$$\boxed{\overrightarrow{AM_0''} \perp \overrightarrow{AB}}.$$

b. *On considère un point M d'affixe z. On suppose que la partie réelle x et la partie imaginaire y de z sont des entiers.*
Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $5x+3y=-2$.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM_0''}$ sont tous deux non nuls et nous sommes dans le plan, donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{AM_0''}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont colinéaires, c'est-à-dire si et seulement si M" est un point de (AM_0'').
La similitude g^{-1} conserve l'alignement et transforme (A, M_0'', M'') en (A, M_0, M), donc :
les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM''}$ sont orthogonaux si, et seulement si M est un point de (AM_0).
Déterminons une équation cartésienne de la droite (AM_0).

Le vecteur directeur $\overrightarrow{\mathrm{AM}_0}$ a pour affixe : $2-4i-(-1+i)=3-5i=-i\,(5+3i)=\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}(5+3i)$.

Donc la droite (AM_0) a pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}5\\3\end{pmatrix}$; on en déduit qu'elle admet une équation de la forme :

$$5x+3y=c.$$

De plus : $\mathrm{A}\in(\mathrm{AM}_0)$; donc : $c=5(-1)+3(1)$; d'où : $c=-2$.
La droite (AM_0) a pour équation : $5x+3y=-2$.

$$\boxed{\textbf{Les vecteurs } \overrightarrow{\mathrm{AB}} \textbf{ et } \overrightarrow{\mathrm{AM}''} \textbf{ sont orthogonaux si, et seulement si } 5x+3y=-2.}$$

c. *Résoudre dans* $\mathbb{Z}^2$ *l'équation* $5x+3y=-2$.

D'après l'étude précédente, les solutions de cette équation sont les coordonnées des points d'intersection de la droite (AM_0) avec le quadrillage principal ; le couple de coordonnées de M_0 est donc une solution particulière.

$$\begin{aligned} 5x+3y=-2 &\iff 5x+3y=5\times 2+3\times(-4)\\ &\iff 5(x-2)+3(y+4)=0\\ &\iff 5(x-2)=-3(y+4)\end{aligned}$$

Raisonnons par conditions nécessaires. Soit (x,y) une solution.
5 divise $5(x-2)$, donc $3(y+4)$, et est premier avec 3, donc, d'après le théorème de GAUSS, 5 divise $y+4$; on en déduit qu'il existe un entier relatif k, tel que : $y+4=5k$; soit : $y=5k-4$.
On a donc : $5(x-2)=-3\times 5k$; d'où : $x=-3k+2$.
Les couples solutions sont donc tous de la forme : $(-3k+2,5k-4)$ avec $k\in\mathbb{Z}$.
Réciproquement, soit $k\in\mathbb{Z}$; le couple $(-3k+2,5k-4)$ est-il solution de l'équation ?
On a : $5(-3k+2)+3(5k-4)=-15k+10+15k-12=-2$; donc :

$$\boxed{\mathrm{S}=\left\{(-3k+2,5k-4)\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}}.$$

d. *En déduire les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle* $[-6\,;\,6]$ *tels que* $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ *et* $\overrightarrow{\mathrm{AM}''}$ *sont orthogonaux. Placer les points obtenus sur la figure.*

Les solutions recherchées sont celles dont le paramètre, k, vérifie :

$$\left\{\begin{array}{l} -6\leqslant -3k+2\leqslant 6\\ -6\leqslant 5k-4\leqslant 6\end{array}\right. \qquad \text{(XVII-5)}$$

Résolvons ce système.

$$\text{(XVII-5)} \iff \left\{\begin{array}{l} -6\leqslant 3k-2\leqslant 6\\ -2\leqslant 5k\leqslant 10\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -4\leqslant 3k\leqslant 8\\ -\frac{2}{5}\leqslant k\leqslant 2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -\frac{4}{3}\leqslant k\leqslant \frac{8}{3}\\ 0\leqslant k\leqslant 2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} -1\leqslant k\leqslant 2\\ 0\leqslant k\leqslant 2\end{array}\right.$$

$$\text{(XVII-5)} \iff 0\leqslant k\leqslant 2$$

Pour $k=0$, nous obtenons le point M_0 ; pour $k=1$, nous obtenons le point A et pour $k=2$, nous obtenons le point $\mathrm{M}_2(-4+6i)$.

Les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-6\,;\,6]$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}''}$ sont orthogonaux sont les points M_0, A et M_2.

L'ensemble des points dont les coordonnées appartiennent à l'intervalle $[-6\,;\,6]$ est la région fermée délimitée par le carré bleu de la figure 7.

XVIII Pondichéry avril 2004

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$.
On considère les points $A(0;5;5)$ *et* $B(0;0;10)$.

1. *Dans cette question, on se place dans le plan* P_0 *d'équation* $x=0$ *rapporté au repère* $(\mathrm{O};\vec{\jmath},\vec{k})$.
On note $\mathscr{C}$ *le cercle de centre B passant par A.*
Démontrer que la droite (OA) est tangente au cercle $\mathscr{C}$.

Les coordonnées des points O, A, B vérifient l'équation : $x=0$; donc O, A, B sont trois points de P_0. De plus :

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(-5\vec{\jmath}+5\vec{k}\right)\cdot\left(5\vec{\jmath}+5\vec{k}\right)=0\,;$$

on a : $\overrightarrow{\mathrm{BA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OA}}$; donc dans le plan P_0 :

$$\boxed{\textbf{(OA) est la tangente à } \mathscr{C} \textbf{ en A.}}$$

2. *On note $\mathscr{S}$ la sphère engendrée par la rotation du cercle $\mathscr{C}$ autour de l'axe (Oz) et Γ le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (Oz).*

a. *Démontrer que le cône Γ admet pour équation $x^2 + y^2 = z^2$.*

1^re^ méthode Dans le plan P_0 rapporté au repère $(O; \vec{\jmath}, \vec{k})$, la droite (OA) a pour vecteur normal $-\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ et passe par O, elle a donc pour équation : $y - z = 0$; ou encore : $y = z$.
Pour tout point $M(x, y, z)$ désignons par, r, la distance de M à (Oz), on a : $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.
Dans le plan P_0, on a : $r = |y|$; donc Γ a pour équation : $r = |z|$.
Mais r et $|z|$ sont positifs, donc : $r = |z| \iff r^2 = z^2 \iff x^2 + y^2 = z^2$.
Γ a pour équation :

$$\boxed{\boldsymbol{x^2 + y^2 = z^2}}.$$

2^e^ méthode On a : $OA = \sqrt{0^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{0^2 + (-5)^2 + 5^2} = AB$ et $(OA) \perp (AB)$; donc le triangle OAB est rectangle et isocèle en A, on en déduit que Γ est le cône d'axe (Oz) et d'angle $2 \times \frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire $\frac{\pi}{2}$ rad. Γ a donc pour équation :

$$r^2 = z^2 \tan^2 \frac{\pi}{4}$$

où r désigne la distance à l'axe (Oz), c'est-à-dire : $r^2 = x^2 + y^2$.
On en déduit que Γ a pour équation :

$$\boxed{\boldsymbol{x^2 + y^2 = z^2}}.$$

b. *Déterminer l'intersection du cône Γ et de la sphère $\mathscr{S}$.*
Préciser la nature de cette intersection et ces éléments caractéristiques.
1^re^ méthode $\mathscr{S}$ et Γ sont deux surfaces de révolution d'axe (Oz) engendrées par $\mathscr{C}$ et (OA), donc leur intersection est l'ensemble de révolution d'axe (Oz) engendré par $\mathscr{C} \cap (OA)$, c'est-à-dire {A}.

$$\boxed{\mathscr{S} \cap \Gamma \textbf{ est le cercle d'axe (O}z\textbf{) passant par A.}}$$

2^e^ méthode $\mathscr{S}$ a pour centre $B(0;0;10)$ et pour rayon : $AB = 5\sqrt{2}$; elle a donc pour équation :

$$x^2 + y^2 + (z - 10)^2 = 50.$$

$\mathscr{S} \cap \Gamma$ a donc pour équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-10)^2 = 50 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \qquad \text{(XVIII-6)}$$

$$\text{(XVIII-6)} \iff \begin{cases} z^2 + (z-10)^2 = 50 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2z^2 - 20z - 50 = 0 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases}$$

$$\text{donc : (XVIII-6)} \iff \begin{cases} (z-5)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \iff \begin{cases} z = 5 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

On en déduit que $\mathscr{S} \cap \Gamma$ est l'intersection du plan d'équation $z = 5$ et du cylindre d'axe (Oz) et de rayon 5.

$$\boxed{\mathscr{S} \cap \Gamma \textbf{ est le cercle d'axe (O}z\textbf{) passant par A.}}$$

c. *Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.*

Voir figure 11 page 31.

3. *On coupe le cône Γ par le plan P_1 d'équation $x = 1$.*
Dans P_1, l'une des figures ci-dessous représente cette intersection.
Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.

$P_1 \cap \Gamma$ est la section d'un cône par un plan parallèle à son axe de révolution et ne passant pas par son sommet ; donc :

$$\boxed{P_1 \cap \Gamma \textbf{ est l'hyperbole présentée figure 10.}}$$

Autre méthode (calculatoire) $P_1 \cap \Gamma$ a pour système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ x = 1 \end{cases} \qquad \text{(XVIII-7)}$$

Les coordonnées du point $H(1;0;0)$ vérifient l'équation de P_1, donc : $H \in P_1$.
P_1 est l'ensemble des points dont les coordonnées sont de la forme $(1; y; z)$ (où y et z sont des nombres réels). Soit M un tel point, on a :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} = \overrightarrow{OH} + y\vec{\jmath} + z\vec{k} ;$$

donc :

$$\overrightarrow{HM} = y\vec{\jmath} + z\vec{k}.$$

On en déduit que le point M a pour coordonnées $(y\,;z)$ dans le plan P_1 muni du repère $(O\,;\vec{\jmath},\vec{k})$. Ainsi dans le plan P_1 muni du repère orthonormé $(O\,;\vec{\jmath},\vec{k})$, d'après XVIII-7, $P_1 \cap \Gamma$ est l'ensemble d'équation

$$z^2 = y^2 + 1 \tag{XVIII-8}$$

On remarque que si $(x\,;y)$ vérifie cette équation, alors il en est de même de $(-x\,;-y)$, donc $P_1 \cap \Gamma$ est symétrique par rapport à H.

Ainsi, si $P_1 \cap \Gamma$ était un cercle alors son centre serait H.

Pour $t \in \mathbb{R}$, le point $M_t\left(t\,;\ \sqrt{t^2+1}\right)$ est un point de $P_1 \cap \Gamma$ et :

$$HM_t = \sqrt{2t^2+1}$$

HM_t n'est pas une fonction constante de t, donc $P_1 \cap \Gamma$ n'est pas un cercle.

Si $P_1 \cap \Gamma$ était l'union de deux droites sécantes alors ces droites se couperaient en H (centre de symétrie), mais les coordonnées de H ne vérifient pas l'équation (XVIII-8), donc $P_1 \cap \Gamma$ n'est pas l'union de deux droites sécantes.

On en déduit que :

$$\boxed{P_1 \cap \Gamma \textbf{ est l'ensemble présenté figure 10.}}$$

4. *Soit $M(x, y, z)$ un point du cône Γ dont les coordonnées sont entiers relatifs non nuls.*
Démontrer que x et y ne peuvent pas être simultanément impairs.

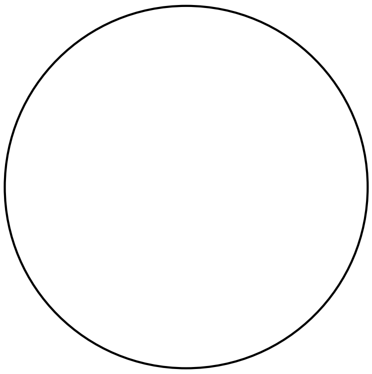

FIG. *8* –

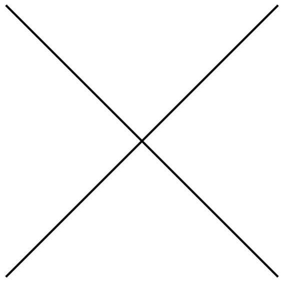

FIG. *9* –

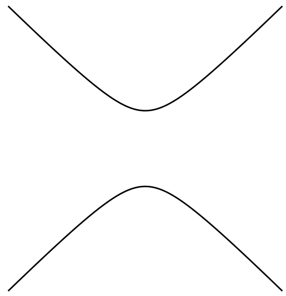

FIG. *10* –

x, y et z sont des entiers vérifiant :

$$x^2 + y^2 = z^2.$$

On reconnaît l'identité de PYTHAGORE.

Soit n un entier relatif et q son quotient dans la division par 2.

Si n est pair, alors : $n = 2q$; d'où : $n^2 = 4q^2$; donc : $n^2 \equiv 0 \pmod 4$.

Si n est impair, alors : $n = 2q+1$; d'où : $n^2 = 4q^2 + 4q + 1 = 4\underbrace{(q^2+q)}_{\in\mathbb{Z}} + 1$; donc : $n^2 \equiv 1 \pmod 4$.

Ainsi, pour tout entier relatif n :

$$\left|\begin{array}{c} n^2 \equiv 0 \pmod 4 \\ \text{ou} \\ n^2 \equiv 1 \pmod 4 \end{array}\right. \tag{XVIII-9}$$

Par conséquent, si x et y étaient tous deux impairs, on aurait :

$$x^2 \equiv 1 \pmod 4 \qquad \text{et} \qquad y^2 \equiv 1 \pmod 4\,;$$

donc, par somme, l'entier z vérifierait :

$$z^2 \equiv 2 \pmod 4\,;$$

ce qui est en contradiction avec (XVIII-9) ; donc :

$$\boxed{x \textbf{ et } y \textbf{ ne peuvent pas être simultanément impairs.}}$$

XIX Nouvelle Calédonie novembre 2003

1. a. *Soit p un entier naturel. Montrer que l'un des trois nombres p, $p+10$ et $p+20$, et l'un seulement est divisible par 3.*

Soit q et r le quotient et le reste de la division euclidienne de p par 3, on a : $= 3q + r$ avec $q \in \{0\,;1\,;2\}$.

1$^{\text{er}}$ cas $\quad$ $\boldsymbol{r = 0}$

On a : $p = 3q$; $\quad p+10 = 3(q+3)+1$ $\quad$ et $\quad p+20 = 3(q+6)+2$.

2$^{\text{e}}$ cas $\quad$ $\boldsymbol{r = 1}$

On a : $p = 3q+1$; $\quad p+10 = 3(q+3)+2$ $\quad$ et $\quad p+20 = 3(q+7)$.

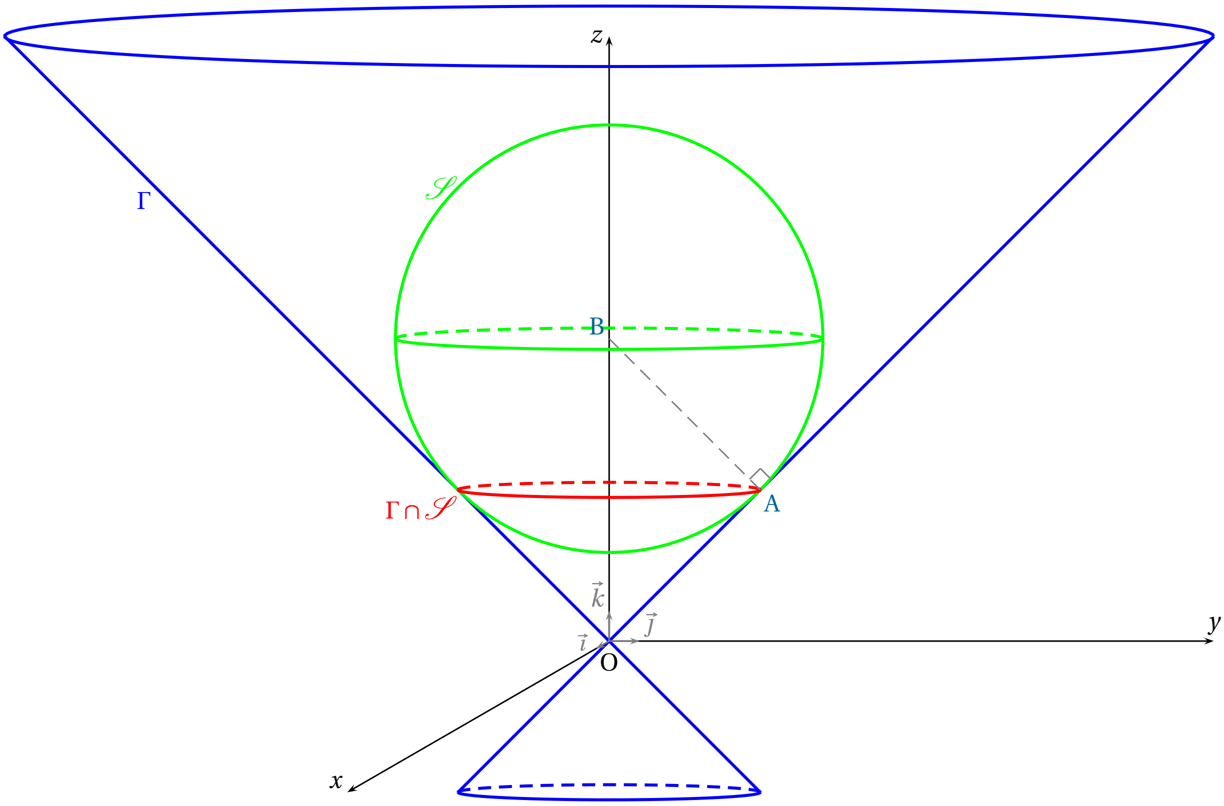

FIG. 11 –

3$^{\text{e}}$ cas $\quad r = 2$

On a : $p = 3q + 2$; $\quad p + 10 = 3(q + 4)$ et $p + 20 = 3(q + 7) + 1$.

Dans les trois cas :

$$\boxed{\textbf{l'un des trois nombres } p,\ p+10 \textbf{ et } p+20\textbf{, et l'un seulement est divisible par 3.}}$$

b. *Les entiers naturels a, b et c sont dans cet ordre les trois premiers termes d'une suite arithmétique de raison 10. Déterminer ces trois nombres sachant qu'ils sont premiers.*

L'un des trois nombres est un nombre premier divisible par 3, ce nombre est donc 3. Si b ou c était égal à 3, alors a serait strictement négatif, mais les trois nombres sont des entiers naturels donc $a = 3$; d'où : $b = 13$ et $c = 23$.

$$\boxed{a = 3 \qquad b = 13 \qquad c = 23}.$$

2. *Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs* $(u,\ v,\ w)$ *tels que* $3u + 13v + 23w = 0$.

a. *Montrer que pour un tel triplet* $v \equiv w \pmod 3$.

Soit $(u,\ v,\ w) \in$ E. On a : $13v = -23w - 3u$; donc : $13v \equiv -23w \pmod 3$.
$36w$ est multiple de 3, donc : $13v \equiv -23w + 36w \pmod 3$; c'est-à-dire :$13v \equiv 13w \pmod 3$.
Or 13 est premier avec 3, donc :

$$\boxed{v \equiv w \pmod 3}.$$

b. *On pose* $v = 3k + r$ *et* $w = 3k' + r$ *où* $k,\ k'$ *et* r *sont des entiers relatifs et* $0 \leqslant r \leqslant 2$.
Montrer que les éléments de E sont de la forme : $(-13k - 23k' - 12r,\ 3k + r,\ 3k' + r)$.

Soit $(u,\ v,\ w) \in$ E. Il suffit donc de démontrer que : $u = -13k - 23k' - 12r$.
On a :$(u,\ v,\ w) \in$ E ;
donc : $3u = -13v - 23w = -13(3k + r) - 23(3k' + r) = 3(-13k - 23k' - 12r)$;
d'où : $u = -13k - 23k' - 12r$.

$$\boxed{\textbf{Les éléments de E sont de la forme : } (-13k - 23k' - 12r,\ 3k + r,\ 3k' + r).}$$

c. *L'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine O et soit*
P le plan d'équation : $3x + 13y + 23z = 0$.
Déterminer l'ensemble des points M à coordonnées $(x,\ y,\ z)$ *entières relatives appartenant au plan P et situés à l'intérieur du cube de centre O, de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes.*

Le cube est l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient : $\begin{cases} -2,5 \leqslant x \leqslant 2,5 \\ -2,5 \leqslant y \leqslant 2,5 \\ -2,5 \leqslant z \leqslant 2,5 \end{cases}$; mais on cherche des points dont les coordonnées sont entières, l'ensemble cherché est donc l'ensemble des points dont les coordonnées sont entières et vérifient :

$$\begin{cases} 3x + 13y + 23z = 0 \\ -2 \leqslant x \leqslant 2 \\ -2 \leqslant y \leqslant 2 \\ -2 \leqslant z \leqslant 2 \end{cases} \tag{XIX-10}$$

Raisonnons par conditions nécessaires. Soit (x, y, z) une solution du système (XIX-10) (il en existe car $(0, 0, 0)$ est une solution évidente).

On a : $-2 \leqslant y \leqslant 2$; $-2 \leqslant z \leqslant 2$ et, d'après **2.a.**, $y \equiv z \pmod 3$; donc : $z = y - 3$ ou $z = y$ ou $z = y + 3$.

1^er^ cas $\quad z = y - 3$

On a : $3x + 13y + 23(y - 3) = 0$; donc : $x = 23 - 12y$; d'où il vient, en utilisant les contraintes $-2 \leqslant x \leqslant 2$ et $-2 \leqslant y \leqslant 2$: $(x, y, z) = (-1, 2, -1)$.

2^e^ cas $\quad z = y$

On a : $3x + 13y + 23(y) = 0$; donc : $x = -12y$; d'où il vient : $\quad (x, y, z) = (0, 0, 0)$.

3^e^ cas $\quad z = y + 3$

On a : $3x + 13y + 23(y + 3) = 0$; donc : $x = -23 - 12y$; d'où il vient : $\quad (x, y, z) = (1, -2, 1)$.

Les points de P à coordonnées entières situé à l'intérieur du cube sont donc les points :

$$\boxed{\mathrm{M}_{-1}(-1\,;2\,;-1) \qquad \mathrm{M}_0(0\,;0\,;0) \qquad \mathrm{M}_1(1\,;-2\,;1)}.$$

XX France septembre 2003

On rappelle que 2003 *est un nombre premier.*

1. a. *Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que :*

$$123u + 2003v = 1.$$

Pour déterminer des coefficients de BÉZOUT, on utilise l'algorithme d'EUCLIDE.

$2003 = 16 \times 123 + 35$; $123 = 3 \times 35 + 18$ et $35 = 2 \times 18 - 1$.

On en déduit que : $\begin{aligned}[t] 1 &= -35 + 2 \times 18 \\ &= -35 + 2(123 - 3 \times 35) \\ &= 2 \times 123 - 7 \times 35 \\ &= 2 \times 123 - 7(2003 - 16 \times 123) \\ &= 114 \times 123 - 7 \times 2003 \end{aligned}$

On peut donc prendre :

$$\boxed{u = 114 \qquad \text{et} \qquad v = -7}.$$

b. *En déduire un entier relatif k_0 tel que :*

$$123k_0 \equiv 1 \pmod{2003}.$$

On en déduit que : $114 \times 123 \equiv 1 \pmod{2003}$; on peut donc prendre :

$$\boxed{k_0 = 114}.$$

c. *Montrer que, pour tout entier relatif x,*

$$123x \equiv 456 \pmod{2003} \qquad \textit{si et seulement si} \qquad x \equiv 456k_0 \pmod{2003}.$$

Soit x un entier relatif. On a : $123k_0 \equiv 1 \pmod{2003}$; donc : $123xk_0 \equiv x \pmod{2003}$.

De plus 114 est un entier naturel non nul plus petit que 2003 qui est un nombre premier, donc k_0 est premier avec 2003.

On en déduit que : $\quad 123x \equiv 456 \pmod{2003} \iff 123xk_0 \equiv 456k_0 \pmod{2003}$
$\qquad \iff x \equiv 456k_0 \pmod{2003}$;

Donc :

$$\boxed{123x \equiv 456 \pmod{2003} \qquad \textbf{si et seulement si} \qquad x \equiv 456k_0 \pmod{2003}}.$$

d. *Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que :*

$$123x \equiv 456 \pmod{2003}.$$

D'après **1.c.** :

$$123x \equiv 456 \pmod{2003} \iff x \equiv 456k_0 \pmod{2003}.$$

Or : $456k_0 = 456 \times 114 = 51984 = 25 \times 2003 + 1909$; donc : $456k_0 \equiv 1909 \pmod{2003}$.

On en déduit que :

$$123x \equiv 456 \pmod{2003} \iff x \equiv 1909 \pmod{2003}.$$

L'ensemble des entiers relatifs x tels que : $123x \equiv 456 \pmod{2003}$; est donc :

$$\boxed{\mathrm{S} = \left\{\mathbf{1909 + 2003}\boldsymbol{k} \mid \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}\right\}}.$$

e. *Montrer qu'il existe un unique entier n tel que :*

$$1 \leqslant n \leqslant 2002 \ \ \textit{et} \ \ 123n \equiv 456 \pmod{2003}.$$

Les entiers, n, vérifiant la condition :

$$1 \leqslant n \leqslant 2002 \ \text{ et } \ 123n \equiv 456 \pmod{2003}. \qquad \text{(XX-1)}$$

sont les éléments de S solutions de la double inéquation :

$$1 \leqslant n \leqslant 2002.$$

On en déduit que : (XX-1) $\iff 1 \leqslant 1909 + 2003k \leqslant 2002$
$\iff -1908 \leqslant 2003k \leqslant 93$
$\iff -\dfrac{1908}{2003} \leqslant k \leqslant \dfrac{93}{2003}$.

Or : $-\dfrac{1908}{2003} = -0,95\cdots$; $\dfrac{93}{2003} = 0,04\cdots$ et $k \in \mathbb{Z}$; donc :

(XX-1) $\iff k = 0$
$\iff n = 1909 + 2003 \times 0$
$\iff n = 1909.$

L'unique entier vérifiant la condition (XX-1) est 1909.

2. *Soit a un entier tel que :* $1 \leqslant a \leqslant 2002$.

a. *Déterminer :*

$$\operatorname{PGCD}(a, 2003).$$

En déduire qu'il existe un entier m tel que :

$$am \equiv 1 \pmod{2003}.$$

2003 est un nombre premier et a n'est pas multiple de 2003, donc a est premier avec 2003.

$$\boxed{\mathbf{PGCD}\,(\boldsymbol{a}, \mathbf{2003}) = \mathbf{1}}.$$

D'après le théorème de Bézout-Bachet, il existe donc deux entiers m et p que : $am + 2003p = 1$; d'où il vient :

$$\boxed{\boldsymbol{am} \equiv \mathbf{1} \pmod{\mathbf{2003}}}.$$

b. *Montrer que, pour tout entier b, il existe un unique entier x tel que :*

$$0 \leqslant x \leqslant 2002 \ \ \textit{et} \ \ ax \equiv b \pmod{2003}.$$

Existence Soit b un entier et x le reste de la division de mb par 2003.
On a donc :

$$\boxed{\mathbf{0} \leqslant \boldsymbol{x} \leqslant \mathbf{2002}}.$$

De plus : $mb \equiv x \pmod{2003}$; donc : $amb \equiv ax \pmod{2003}$;
Or : $am \equiv 1 \pmod{2003}$; donc : $amb \equiv b \pmod{2003}$.
On en déduit que :

$$\boxed{\boldsymbol{ax} \equiv \boldsymbol{b} \pmod{\mathbf{2003}}}.$$

Unicité Pour démontrer que x est l'unique solution du problème, il suffit de démontrer que si x' est une solution du problème, alors $x' = x$.
Soit x' un entier solution du problème, démontrons que : $x' = x$.
On a : $0 \leqslant x' \leqslant 2002$ et $-2002 \leqslant -x \leqslant 0$; donc :

$$-2002 \leqslant x' - x \leqslant 2002 \qquad \text{(XX-2)}$$

On a : $ax' \equiv b \pmod{2003}$ et $ax \equiv b \pmod{2003}$; donc $ax' \equiv ax \pmod{2003}$;
or a est premier avec 2003 ; donc : $x' \equiv x \pmod{2003}$; c'est-à-dire $x' - x$ est multiple de 2003.
On en déduit en utilisant (XX-2) que : $x' - x = 0$; donc : $x' = x$.

XXI La Réunion juin 2003

Le plan est rapporté a un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On prendra 1 cm pour unité graphique.
On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = -\left(\sqrt{3}+i\right)z - 1 + i\left(1+\sqrt{3}\right)$.

1. *Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i.*
En déterminer le rapport et l'angle.

On a : $z' = -\left(\sqrt{3}+i\right)z - 1 + i\left(1+\sqrt{3}\right)$

$$\begin{aligned} &\iff z' = -\left(\sqrt{3}+i\right)z + i\left(i+\sqrt{3}\right) + i \\ &\iff z' - i = -\left(\sqrt{3}+i\right)(z-i) \\ &\iff z' - i = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)(z-i) \\ &\iff z' - i = 2\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}}(z-i). \end{aligned}$$

f a une écriture complexe de la forme : $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^\star$ et $b \in \mathbb{C}$; donc f est similitude directe. De plus $2\,\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}}$ est le nombre complexe de module 2 et d'argument $\dfrac{7\pi}{6}$ et pour $z = i$ on a $z' = i$; donc :

f est la similitude directe de rapport 2, d'angle $\dfrac{7\pi}{6}$ et de centre Ω d'affixe i.

2. *Soit M_0 le point d'affixe :* $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}i$.
Calculer ΩM_0 et donner une mesure en radians de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_0}\right)$.

Le vecteur $\overrightarrow{\Omega M_0}$ a pour affixe : $z_0 - i = \dfrac{\sqrt{3}}{4} - \dfrac{1}{4}i = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}$.
Par définition du module et de l'affixe d'un vecteur, on en déduit que :

$$\boxed{\Omega M_0 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_0}\right) = -\frac{\pi}{6}}.$$

3. *On considère la suite de points $(M_n)_{n\geqslant 0}$ définie, pour tout entier naturel n, par :*
$M_{n+1} = f(M_n)$. *On note z_n l'affixe de M_n.*

a. *Placer les points Ω, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.*

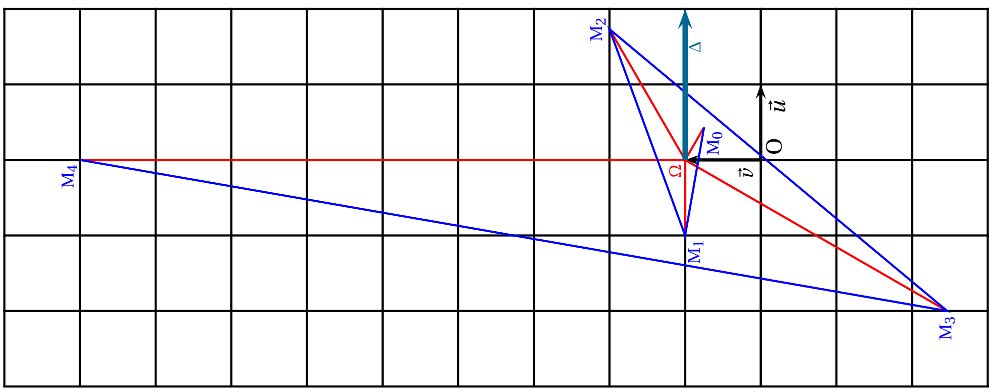

FIG. 12 – Premiers termes de la suite (M_n)

b. *Montrer par récurrence, pour tout entier naturel n, l'égalité :* $z_n - i = 2^n \mathrm{e}^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$.

Pour $n = 0$: $2^n \mathrm{e}^{i\frac{7n\pi}{6}} = 1$; donc l'égalité est vraie pour $n = 0$.
Supposons l'égalité vraie pour un certain entier $k \geqslant 0$. On a d'après **1.** et l'hypothèse de récurrence : $z_{k+1} - i = 2\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}}(z_k - i) = 2\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}}\,2^k\mathrm{e}^{i\frac{7k\pi}{6}}(z_0 - i) = 2^{k+1}\mathrm{e}^{i\frac{7(k+1)\pi}{6}}(z_0 - i)$.
Donc par récurrence, pour tout entier naturel n :

$$\boxed{z_n - i = 2^n \mathrm{e}^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)}.$$

Remarque Si la démonstration par récurrence n'avait pas été imposée, on aurait pu procéder de la façon suivante. On introduit la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $w_n = z_n - i$. D'après **1.** : $w_{n+1} = 2\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}} w_n$; donc (w_n) est une suite géométrique de raison $2\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $w_n = \left(2\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{6}}\right)^n w_0$; c'est-à-dire : $z_n - i = 2^n \mathrm{e}^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$.

c. *Pour tout entier naturel n, calculer ΩM_n, puis déterminer le plus petit entier n tel que : $\Omega M_n \geqslant 10^2$.*

Pour tout entier naturel n, on a : $\Omega M_n = |z_n - i| = \left|2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}\right| \times |z_0 - i| = 2^n \Omega M_0 = 2^{n-1}$.

$$\boxed{\boldsymbol{\Omega M_n = 2^{n-1}}}.$$

La suite de terme général 2^{n-1} est croissante, $2^6 = 64$ et $2^7 = 128$, donc :

$$\boxed{\textbf{le plus petit entier } \boldsymbol{n} \textbf{ tel que } \boldsymbol{\Omega M_n \geqslant 10^2} \textbf{ est 8.}}$$

4. **a.** *On considère l'équation :*

$$7x - 12y = 1 \tag{E}$$

où x et y sont des entiers relatifs.
Après avoir vérifié que le couple $(-5; -3)$ *est solution, résoudre l'équation* (E).

On a : $7 \times (-5) - 12 \times (-3) = -35 + 36 = 1$; donc :

$$\boxed{\textbf{le couple } \boldsymbol{(-5;-3)} \textbf{ est solution de (E).}}$$

Soit (x, y) une solution de (E). On a : $7x - 12y = 1 = 7 \times (-5) - 12 \times (-3)$; donc : $7(x+5) = 12(y+3)$.
12 divise $7(x+5)$ et est premier avec 7 donc, d'après le théorème de GAUSS, 12 divise $x+5$, il existe donc un entier k tel que : $x = 12k - 5$.
On en déduit que : $12(y+3) = 7 \times 12k$; donc : $y = 7k - 3$.
Nous venons de démontrer que tous les couples solutions sont de la forme $(12k - 5, 7k - 3)$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Vérifions si tous les couples de la forme $(12k - 5, 7k - 3)$ avec $k \in \mathbb{Z}$ sont solutions.
Soit $k \in \mathbb{Z}$. On a : $7(12k - 5) - 12(7k - 3) = 84k - 35 - 84k + 36 = 1$.

$$\boxed{\mathrm{S} = \left\{ \boldsymbol{(12k - 5, 7k - 3)} \,\middle|\, \boldsymbol{k \in \mathbb{Z}} \right\}}.$$

b. *Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que : $\Im\mathrm{m}(z) = 1$ et $\Re\mathrm{e}(z) \geqslant 0$.*
Caractériser géométriquement Δ et le représenter.
Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigé par $\vec{u}$. Préciser son plus petit élément.

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta} \textbf{ est la demi-droite d'origine } \boldsymbol{\Omega} \textbf{ et dirigée par } \boldsymbol{\vec{u}}.}$$

Soit n un entier naturel non nul. On a : $M_n \in \Delta \iff \left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_n}\right) = 0 \iff \arg(z_n - i) = 0$

Or, d'après **3.b.** et **2.** : $\arg(z_n - i) = \dfrac{7n\pi}{6} + \arg(z_0 - i)$ avec $\arg(z_0 - i) = -\dfrac{\pi}{6}$;
donc : $\arg(z_n - i) = \dfrac{(7n-1)\pi}{6}$.
On en déduit que $M_n \in \Delta$ si et seulement si il existe un entier p tel que : $\dfrac{(7n-1)\pi}{6} = 2\pi p$; c'est-à-dire : $7n - 12p = 1$.
On reconnaît l'équation (E), donc $M_n \in \Delta$ si et seulement si il existe un entier k tel que : $n = 12k - 5$. l'ensemble des entiers naturels n tels que $M_n \in \Delta$ est donc :

$$\boxed{\left\{ \boldsymbol{12k - 5} \,\middle|\, \boldsymbol{k \in \mathbb{N}^*} \right\}}.$$

$$\boxed{\textbf{Son plus petit élément est 7.}}$$

XXII Centres Étrangers I juin 2003

Exercice donné sur 6 points.

L'espace $\mathscr{E}$ est muni d'un repère orthonormal $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
*On considère la surface **T** d'équation :*

$$x^2 y = z \qquad \text{avec} \qquad \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$$

*La figure 13 est une représentation de la surface **T**, dans le cube de centre O et de coté 2. (NdP et dont les côtés sont parallèles aux axes du repère.)*

1. *Éléments de symétrie de la surface **T**.*

a. *Montrer que si le point $M(x, y, z)$ appartient à **T**, alors le point $M'(-x, y, z)$ appartient aussi à **T**.*

Soit $\mathrm{M}(x, y, z)$ un point de $\mathscr{E}$ et $\mathrm{M}'(-x, y, z)$ son symétrique par rapport au plan yOz. On a :

$$\mathrm{M}'(-x, y, z) \in \mathbf{T} \iff \begin{cases} -1 \leqslant -x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ z = (-x)^2 y \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ z = x^2 y \end{cases} \iff \mathrm{M}(x, y, z) \in \mathbf{T}$$

b. *Montrer que l'origine O du repère est centre de symétrie de **T**.*

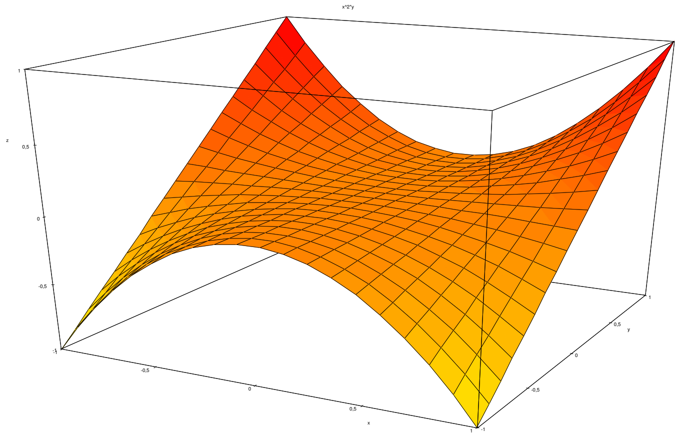

FIG. 13 – Surface **T** d'équation : $z = x^2 y$.

Soit $\mathrm{M}(x, y, z)$ un point de $\mathscr{E}$ et $\mathrm{M}'(-x, -y, -z)$ son symétrique par rapport à l'origine O du repère. On a :

$$\mathrm{M}'(-x,-y,-z) \in \mathbf{T} \iff \begin{cases} -1 \leqslant -x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant -y \leqslant 1 \\ -z = (-x)^2(-y) \end{cases} \iff \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ z = x^2 y \end{cases} \iff \mathrm{M}(x,y,z) \in \mathrm{T}$$

$$\boxed{\textbf{l'origine O du repère est centre de symétrie de T.}}$$

2. *Intersections de la surface **T** avec des plans parallèles au axes.*

a. *Déterminer la nature des courbes d'intersection de **T** avec les plans parallèles au plan $(x\mathrm{O}z)$.*

Les plans parallèles au plan $(x\mathrm{O}z)$ sont les plans P_k d'équations : $y = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

1er **cas :** $\boldsymbol{k \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[}$

$$\boxed{\mathbf{T} \cap \mathbf{P}_k = \varnothing}.$$

2e **cas :** $\boldsymbol{k \in [-1; 1]}$

$\mathbf{T} \cap \mathrm{P}_k$ a pour équations : $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ y = k \\ z = kx^2 \end{cases}$

$$\boxed{\mathbf{T} \cap \mathbf{P}_k \textbf{ est donc un arc de parabole}}$$

b. *Déterminer la nature des courbes d'intersection de **T** avec les plans parallèles au plan $(y\mathrm{O}z)$.*

Les plans parallèles au plan $(y\mathrm{O}z)$ sont les plans $\mathrm{P'}_k$ d'équations : $x = k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

1er **cas :** $\boldsymbol{k \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[}$

$$\boxed{\mathbf{T} \cap \mathrm{P}'_k = \varnothing}.$$

2e **cas :** $\boldsymbol{k \in [-1; 1]}$

$\mathbf{T} \cap \mathrm{P}'_k$ a pour équations : $\begin{cases} x = k \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ z = k^2 y \end{cases}$

$$\boxed{\mathbf{T} \cap \mathrm{P}_k \textbf{ est donc un segment.}}$$

3. *Intersections de la surface **T** avec les plans parallèles au plan $(x\mathrm{O}y)$ d'équation $z = k$, avec $k \in [0, 1]$.*

Pour $k \in [0, 1]$, désignons par Π_k le plan d'équation $z = k$.

a. *Déterminer l'intersection de la surface **T** et du plan d'équation $z = 0$.*

$\mathbf{T} \cap \Pi_0$ a pour équations : $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ z = 0 \\ x^2 y = 0 \end{cases}$; c'est-à-dire : $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ z = 0 \\ x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$.

l'intersection de la surface T et du plan d'équation $z = 0$ est $[\mathrm{II}'] \cap [\mathrm{JJ}']$ où I, I', J, J' sont les points de coordonnées respectives : $(1, 0, 0)$, $(-1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, -1, 0)$.

b. *Pour $k > 0$ on note K le point de coordonnées $(0, 0, k)$. Déterminer, dans le repère $(\mathrm{K}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, l'équation de la courbe d'intersection de **T** et du plan d'équation $z = k$.*

Soit $\mathrm{M}(x, y, k)$ un point du plan d'équation $z = k$ avec : $\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \end{cases}$.

On a : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + k\vec{k} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + \overrightarrow{\mathrm{OK}}$; donc : $\overrightarrow{\mathrm{KM}} = \overrightarrow{\mathrm{KO}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$.
Le point M a donc pour coordonnées (x, y) dans le repère $(\mathrm{K}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. De plus :

$$\mathrm{M} \in \mathbf{T} \iff x^2 y = k \iff y = \frac{k}{x^2}.$$

$$\boxed{\begin{array}{c}\textbf{Dans le repère } (\mathrm{K}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})\textbf{, la courbe d'intersection de T et du plan} \\ \textbf{d'équation } z = k \textbf{ a pour équations : } \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ -1 \leqslant y \leqslant 1 \\ y = \dfrac{k}{x^2} \end{cases}\end{array}}$$

c. *Tracer l'allure de cette courbe dans le repère* $(\mathrm{K}; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$*. On précisera en particulier les coordonnées des extrémités de l'arc.*

Dans l'équation obtenue en **3.b.**, pour $y = 1$, nous obtenons : $x = \sqrt{k}$ ou $x = -\sqrt{k}$; pour $x = 1$ ou $x = -1$, nous obtenons : $y = k$. Les extrémités des deux points de la courbe sont les points de coordonnées $\left(\sqrt{k}, 1\right)$, $\left(-\sqrt{k}, 1\right)$, $(1, k)$ et $(-1, k)$.
La figure 14 représente la courbe cherchée pour $k = \frac{1}{2}$.

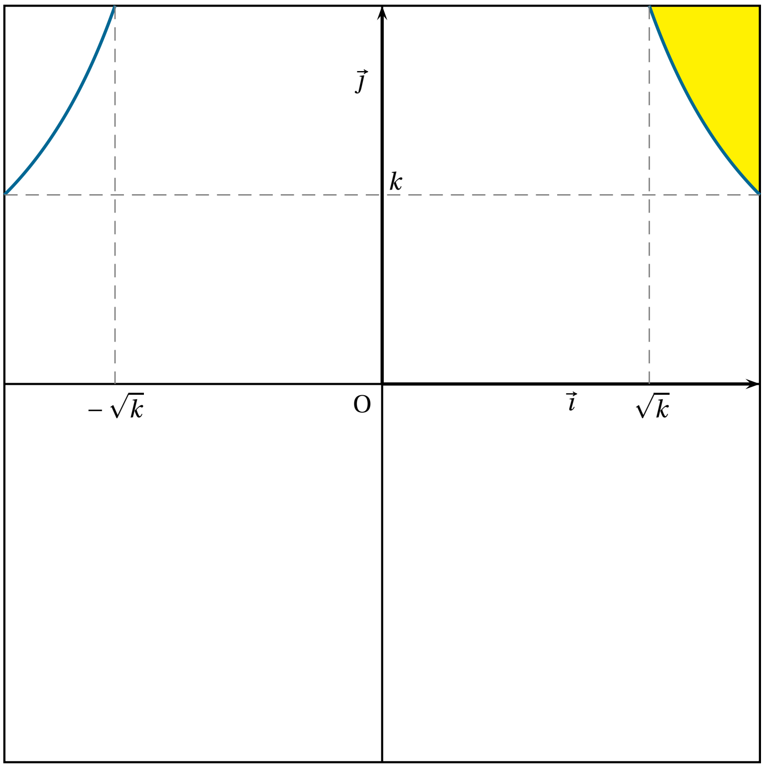

FIG. 14 – Intersection de **T** et du plan d'équation $z = k$.

4. *On note (D) le domaine formé des points du cube unité situés sous la surface* ***T****.*

$$(\mathrm{D}) = \left\{\mathrm{M}(x, y, z) \in \mathscr{E} \text{ avec } 0 \leqslant x \leqslant 1 ; 0 \leqslant y \leqslant 1 ; 0 \leqslant z \leqslant x^2 y ;\right\}$$

a. *Pour* $0 < k \leqslant 1$*, le plan d'équation* $z = k$ *coupe le domaine (D) selon une surface qu'on peut visualiser sur le graphique de la question* **3.c.***. C'est l'ensemble des points M du cube unité de coordonnées* (x, y, z) *tels que* $y \geqslant \frac{k}{x^2}$ *et* $z = k$
Calculer en fonction de k, l'aire $S(k)$ *exprimée en unité d'aire, de cette surface.*

L'intersection du domaine (D) avec le plan d'équation $z = k$ est colorié en jaune sur la figure 14. Cette région est la région du premier cadran comprise entre la droite d'équation $y = 1$ et la courbe étudiée en **3.b.** ; on en déduit que :

$$\mathrm{S}(k) = \int_{\sqrt{k}}^{1} 1 - \frac{k}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[x + \frac{k}{x}\right]_{\sqrt{k}}^{1} = 1 + k - 2\sqrt{k}.$$

$$\boxed{\mathrm{S}(\boldsymbol{k}) = \mathbf{1} - \mathbf{2}\sqrt{\boldsymbol{k}} + \boldsymbol{k} = \left(\mathbf{1} - \sqrt{\boldsymbol{k}}\right)^{\mathbf{2}}}.$$

b. *On pose $S(0) = 1$, calculer en unités de volume, le volume V du domaine (D).*

On rappelle que $V = \int_0^1 S(k)\,dk$.

On a donc : $V = \int_0^1 S(k)\,dk = \left[k - \frac{4}{3}k^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}k^2\right]_0^1 = 1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2}$.

$$\boxed{V = \mathbf{\frac{1}{6}}}.$$

XXIII Antilles Guyane juin 2002

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}\right)$ *(unité graphique : 4 cm).*

1. *On considère les points A, B, C, D et E d'affixes respectives :*

$$z_A = e^{i\frac{\pi}{6}}; \qquad z_B = e^{i\frac{2\pi}{3}}; \qquad z_C = -1; \qquad z_D = -i \quad \textit{et} \quad z_E = e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

a. *Faire la figure.*

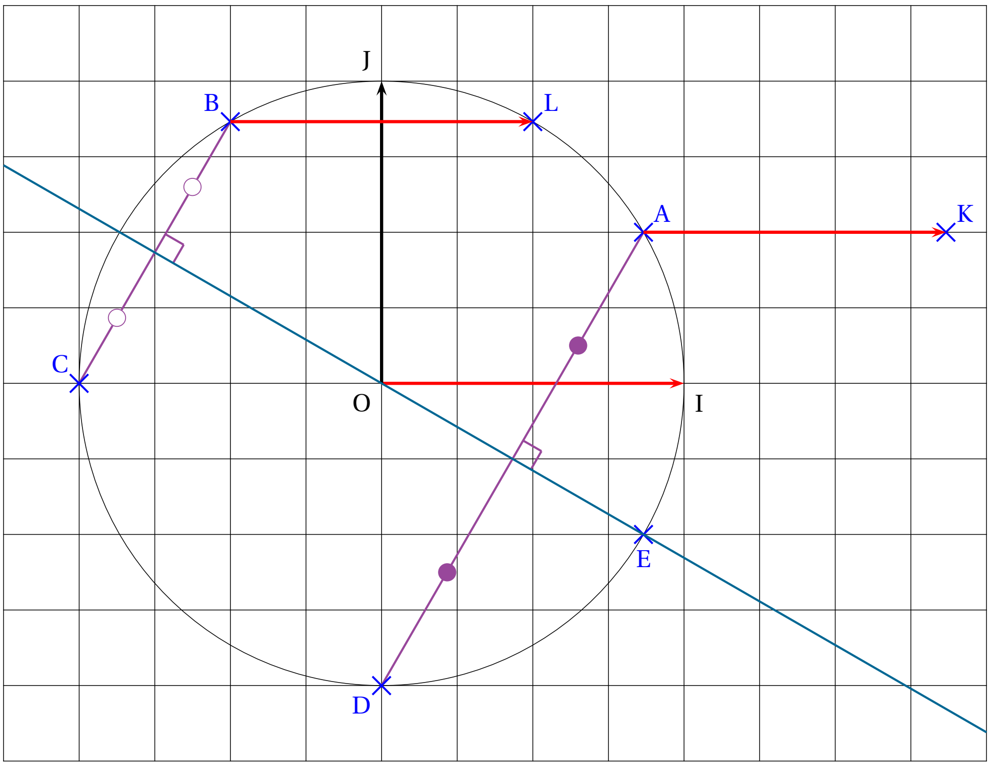

FIG. 15 – Réponse à la question XXIII.1.a.

b. *Montrer que* EA = ED *et que* EB = EC. *Montrer que (OE) est la médiatrice du segment [AD] et du segment [BC].*

On a : $EA = |z_A - z_E| = \left|e^{i\frac{\pi}{6}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right| = \left|\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right| = |i| = 1$;

$ED = |z_D - z_E| = \left|-i - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right| = \left|-i - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right| = \left|-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right| = 1$;

Déterminons EB et EC.

Méthode normale

$EB = |z_B - z_E| = \left|e^{i\frac{2\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right| = \left|\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right| = \frac{1}{2}\left|\left(-\sqrt{3} - 1\right) + i\left(\sqrt{3} + 1\right)\right|$;

donc : $EB = \frac{\sqrt{3}+1}{2}|-1+i| = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

$EC = |z_C - z_E| = \left|-1 - e^{-i\frac{\pi}{6}}\right| = \left|-1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)\right| = \left|-\frac{\sqrt{3}+2}{2} + \frac{1}{2}i\right| = \sqrt{\frac{\left(\sqrt{3}+2\right)^2}{4} + \frac{1}{4}}$;

d'où : $EC = \frac{\sqrt{3+4\sqrt{3}+4+1}}{2} = \frac{\sqrt{6+2\sqrt{6}\sqrt{2}+2}}{2} = \frac{\sqrt{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)^2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$

Méthode astucieuse

$\mathrm{EB} = |z_\mathrm{B} - z_\mathrm{E}| = \left|\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} - \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}\right| = \left|\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}}\right| \times \left|\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}} - \mathrm{e}^{-i\frac{5\pi}{12}}\right| = 2\sin\dfrac{5\pi}{12}$;

$\mathrm{EC} = |z_\mathrm{C} - z_\mathrm{E}| = \left|\mathrm{e}^{i\pi} - \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{6}}\right| = \left|\mathrm{e}^{i\frac{5\pi}{12}}\right| \times \left|\mathrm{e}^{i\frac{7\pi}{12}} - \mathrm{e}^{-i\frac{7\pi}{12}}\right| = 2\sin\dfrac{7\pi}{12} = 2\sin\left(\pi - \dfrac{7\pi}{12}\right) = 2\sin\dfrac{5\pi}{12}$;

Les affixes des points A, B, C, D et E sont toutes des nombres complexes de module 1, donc : OA = OB = OC = OD = OE = 1.

On a : EA = 1 = ED et OA = 1 = OD ; donc :

$$\boxed{\textbf{la droite (OE) est la médiatrice du segment [AD].}}$$

On a : $\mathrm{EB} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} = \mathrm{EC}$ et OB = 1 = OC ; donc :

$$\boxed{\textbf{la droite (OE) est la médiatrice du segment [BC].}}$$

c. *Déterminer les points K et L images respectives de A et de B par la translation t de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$. Placer les points K et L sur la figure.*

La translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OI}}$ a pour écriture complexe : $z' = z + 1$.

Les affixes z_K et z_L des points K et L vérifient donc : $z_\mathrm{K} = z_\mathrm{A} + 1 = 1 + \mathrm{e}^{i\frac{\pi}{6}}$ et $z_\mathrm{L} = z_\mathrm{B} + 1 = 1 + \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$.

$$\boxed{\textbf{K et L sont les points d'affixes respectives } \mathbf{1 + e^{i\frac{\pi}{6}}} \textbf{ et } \mathbf{1 + e^{i\frac{2\pi}{3}}}\textbf{.}}$$

2. *On considère l'application F qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe :*

$\mathrm{Z}' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{\mathrm{Z}}$ *; où $\overline{\mathrm{Z}}$ désigne le conjugué de Z.*

a. *Justifier l'égalité* $\mathrm{F} = \mathrm{R} \circ \mathrm{S}$ *où S est la réflexion (ou symétrie axiale) d'axe (OI) et R une rotation dont on précisera le centre et l'angle.*

S a pour écriture complexe : $z' = \overline{z}$.

On a : $\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}$.

La rotation, R, de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ a donc pour écriture complexe : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z$.

On en déduit que $\mathrm{R} \circ \mathrm{S}$ a pour écriture complexe : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}$.

Les applications F et $\mathrm{R} \circ \mathrm{S}$ ont la même écriture complexe, donc :

$$\boxed{\mathrm{F} = \mathrm{R} \circ \mathrm{S}}.$$

b. *Montrer que F est une réflexion dont on précisera l'axe.*

F a une écriture complexe de la forme : $z' = a\overline{z} + b$; donc F est une similitude indirecte.

Pour $z = 0$, on a : $z' = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}\,\overline{0} = 0$; donc O est un point fixe de F.

F est une similitude indirecte.

Pour $z = z_\mathrm{E}$, on a : $z' = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}\,\overline{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}}} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{6}} = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{6}} = z_\mathrm{E}$; donc E est un point fixe de F.

La similitude indirecte F laisse invariant les points O et E, donc :

$$\boxed{\textbf{F est la réflexion d'axe (OE).}}$$

3. *Soit G l'application qui, à tout point M d'affixe Z associe le point M" dont l'affixe z" définie par la formule :*

$$\mathrm{Z}'' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{\mathrm{Z}} + 1.$$

Déterminer une application T telle que : $\mathrm{G} = \mathrm{T} \circ \mathrm{F}$. *En déduire que G est un antidéplacement.*

F est une réflexion, c'est donc une transformation égale à sa réciproque[2] on en déduit que :

$\mathrm{T} \circ \mathrm{F} = \mathrm{G} \iff \mathrm{T} \circ \mathrm{F} \circ \mathrm{F}^{-1} = \mathrm{G} \circ \mathrm{F}^{-1} \iff \mathrm{T} \circ \mathrm{Id} = \mathrm{G} \circ \mathrm{F}^{-1} \iff \mathrm{T} = \mathrm{G} \circ \mathrm{F}$.

Donc l'application T existe et c'est l'application $\mathrm{G} \circ \mathrm{F}$.

G et F ont respectivement pour écritures complexes : $z' = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}\,\overline{z} + 1$ et $z' = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}\,\overline{z}$;

donc T a pour écriture complexe : $z' = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}\left(\overline{\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}\,\overline{z}}\right) + 1 = \mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}}\,\mathrm{e}^{\frac{\pi}{3}}\,z + 1 = z + 1$; c'est-à-dire :

$$z' = z + 1.$$

On reconnaît l'écriture complexe de la translation t, donc :

$$\boxed{\mathrm{T} = \mathrm{t}}.$$

On a : $\mathrm{G} = \mathrm{T} \circ \mathrm{F}$; donc G est la composée de la réflexion F, qui est un antidéplacement, par la translation T, qui est un déplacement, donc :

$$\boxed{\textbf{G est un antidéplacement.}}$$

[2] Une transformation égale à sa réciproque est dite *involutive* on dit aussi que c'est une *involution*.

XXIV Polynésie juin 2002

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. *Montrer que n et $2n+1$ sont premiers entre eux.*

On a : $(2n+1)\times 1+n\times(-2)=1$; donc, d'après l'identité de BÉZOUT-BACHET :

$$\boxed{\boldsymbol{n \text{ et } 2n+1 \text{ sont premiers entre eux.}}}$$

2. *On pose $\alpha=n+3$ et $\beta=2n+1$, et on note δ le* PGCD *de α et β.*

a. *Calculer $2\alpha-\beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ.*

$$\boxed{\boldsymbol{2\alpha-\beta=2(n+3)-(2n+1)=5}}.$$

Les entiers naturels diviseurs de 5 sont : 1et 5. δ divise α et β donc δ divise $2\alpha-\beta$ on en déduit que : $\delta=1$ ou $\delta=5$.
De plus, pour $n=2$, on a : $\alpha=\beta=5$ et $\delta=5$; pour $n=3$, on a : $\alpha=6$, $\beta=7$ et $\delta=1$;

$$\boxed{\boldsymbol{\delta=1 \quad \text{ou} \quad \delta=5}}.$$

b. *Démontrer que α et β sont multiples de 5 si, et seulement si, $(n-2)$ est multiples de 5.*

Si $(n-2)$ est multiple de 5 alors $(n-2)+5$ et $2(n-2)+5$, c'est-à-dire α et β, sont également multiples de 5.
Réciproquement, si α et β sont multiples de 5 alors $\beta-\alpha$, c'est-à-dire $(n-2)$, est également multiple de 5.

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha \text{ et } \beta \text{ sont multiples de 5 si, et seulement si, } (n-2) \text{ est multiples de 5.}}}$$

3. *On considère les nombres a et b définis par :*

$$a=n^3+2n^2-3n$$
$$b=2n^2-n-1.$$

Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n-1)$.

On a : $a=n^3+2n^2-3n=n^3-n^2+3n^2-3n=(n-1)(n^2+3n)=n(n+3)(n-1)$
et $b=2n^2-n-1=2n^2-2n+n-1=(n-1)(2n+1)$.
On sait que : $n\geqslant 2$; donc n, $n+3$, $n-1$, $2n-1$ sont des entiers naturels ; par conséquent :

$$\boxed{\boldsymbol{a \text{ et } b \text{ sont des entiers naturels divisibles par } (n-1).}}$$

4. a. *On note d le* PGCD *de $n(n+3)$ et de $(2n+1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta=d$.*

On a : $\delta=\text{PGCD}\,(n+3;2n+1)$; donc δ est un diviseur commun à $n(n+3)$ et $(2n+1)$, et divise donc leur PGCD :

$$\boxed{\boldsymbol{\delta \text{ divise } d.}}$$

d divise $(2n+1)$ et $(2n+1)$ est premier avec n (cf. **1.**) donc d est premier avec n.
d divise $n(n+3)$ et est premier avec n donc, d'après le théorème de GAUSS, d divise $(n+3)$.
d est un diviseur commun à $(n+3)$ et $(2n+1)$, il divise donc leur PGCD : d divise δ. d et δ sont deux entiers naturels se divisant mutuellement donc :

$$\boxed{\boldsymbol{d=\delta}}.$$

b. *En déduire le* PGCD*, Δ, de a et b en fonction de n.*

On a : $\Delta=\text{PGCD}\,(a,b)=\text{PGCD}\,(n(n+3)(n-1),(n-1)(2n+1))=(n-1)\,\text{PGCD}\,(n(n+3),(2n+1))=(n-1)d=(n-1)\delta$.
Il ne reste plus qu'à déterminer δ en fonction de n.
D'après **2.b.**, lorsque $n-2$ est multiple de 5 alors α et β sont multiples de 5 et, d'après **2.a.**, $\delta=5$.
Lorsque $n-2$ n'est pas multiple de 5 alors α et β ne sont pas multiples de 5 et, d'après **2.a.**, $\delta=1$.
On en déduit que :

$$\boxed{\boldsymbol{\Delta=\begin{cases} n-1 & \text{, si } n-2 \text{ n'est pas multiple de 5 ;}\\ 5(n-1) & \text{, si } n-2 \text{ est multiple de 5.}\end{cases}}}.$$

c. Application : *Déterminer Δ pour $n=2002$.*
Déterminer Δ pour $n=2003$.

Pour $n=2002$, on a : $n-2=2000$ et 2000 est multiple de 5, donc : $\Delta=5(n-1)=5\times 2001$.

$$\boxed{\textbf{Pour } \boldsymbol{n=2002 : \Delta=10005.}}$$

Pour $n=2003$, on a : $n-2=2001$ et 2001 n'est pas multiple de 5, donc : $\Delta=(n-1)=\times 2002$.

$$\boxed{\textbf{Pour } \boldsymbol{n=2003 : \Delta=2002.}}$$