Baccalauréat S Spécialité

Index des exercices de spécialité de 1999 à novembre 2006

Tapuscrit : Denis Vergès

N°	Lieu et date	Arithmétique	Barycentre	Espace-Surfaces	Transformations
1	Nlle-Calédonie novembre 2006				×
2	Amérique du Sud novembre 2006	×			
3	France septembre 2006	×			
4	Polynésie juin 2006	×			
5	La Réunion juin 2006				×
6	France juin 2006	×			
7	Centres étrangers juin 2006	×			
8	Asie juin 2006	×			
9	Antilles-Guyane juin 2006				×
10	Amérique du Nord juin 2006				×
11	Pondichéry avril 2006				×
12	Nlle-Calédonie novembre 2005	×			×
13	Amérique du Sud novembre 2005				×
14	France septembre 2005	×			×
15	Amérique du Nord juin 2005				×
16	Antilles–Guyane juin 2005	×			
17	Asie juin 2005				×
18	Centres étrangers juin 2005	×			
19	France juin 2005				×
20	La Réunion juin 2005	×			
21	Liban juin 2005	×			
22	Polynésie juin 2005	×			
23	Pondichéry juin 2005				×
24	Nlle–Calédonie nov. 2004	×			
25	Amérique du Sud nov. 2004				×
26	Antilles septembre 2004	×			×
27	France septembre 2004				×
28	Polynésie septembre 2004				×
29	Amérique du Nord mai 2004				×
30	Antilles–Guyane juin 2004				×
31	Asie juin 2004	×			
32	Centres étrangers juin 2004	×			
33	France juin 2004	×			
34	Liban juin 2004				×
35	Polynésie juin 2004				×
36	Pondichéry avril 2004			×	
37	La Réunion juin 2004	×			
38	Amérique du Sud nov. 2003				×

N^{o}	Lieu et date	Arithmé-tique	Bary-centre	Espace-Surfaces	Transfor-mations
39	Nlle–Calédonie nov. 2003	×			
40	Antilles–Guyane sept. 2003	×			
41	France septembre 2003	×			
42	Polynésie septembre 2003	×			
43	Amérique du Nord juin 2003				×
44	Antilles–Guyane juin 2003	×			
45	Asie juin 2003	×			
46	Centres étrangers juin 2003		×		
47	France juin 2003		×		
48	La Réunion juin 2003				×
49	Liban juin 2003	×			
50	Polynésie juin 2003				×
51	Pondichéry juin 2003				×
52	Amérique du Sud déc. 2002	×			
53	Nlle–Calédonie nov. 2002	×			
54	Antilles–Guyane sept. 2002				×
55	France septembre 2002				×
56	Amérique du Nord juin 2002	×			
57	Antilles–Guyane juin 2002				×
58	Asie juin 2002	×			
59	Centres étrangers juin 2002	×			
60	France juin 2002	×			
61	La Réunion juin 2002				×
62	Polynésie juin 2002	×			
63	Pondichéry juin 2002	×			
64	Nlle–Calédonie déc. 2001	×			
65	Amérique du Sud déc. 2001	×			
66	Antilles–Guyane sept. 2001	×			
67	France septembre 2001	×			
68	Polynésie septembre 2001		×		×
69	Amérique du Nord juin 2001	×			
70	Antilles–Guyane juin 2001	×			
71	Asie juin 2001				×
72	Centres étrangers juin 2001	×			
73	France juin 2001				×
74	Liban juin 2001				×
75	Polynésie juin 2001	×			
76	Pondichéry juin 2001	×			
77	Nouvelle–Calédonie déc. 2000	×			
78	Amérique du Sud nov. 2000				×
79	France septembre 2000				×
80	Polynésie septembre 2000				×
81	Amérique du Nord juin 2000				×
82	Antilles–Guyane juin 2000	×			×

N^{o}	Lieu et date	Arithmé-tique	Bary-centre	Espace-Surfaces	Transfor-mations
83	Asie juin 2000	×			
84	Centres étrangers juin 2000				×
85	France juin 2000				×
86	La Réunion juin 2000	×			
87	Liban juin 2000	×			×
88	Polynésie juin 2000	×			
89	Pondichéry juin 2000	×			
90	Nlle–Calédonie déc. 1999	×			
91	Amérique du Sud nov. 1999	×			
92	Antilles–Guyane sept. 1999				×
93	France sept. 1999				×
94	Sportifs haut-niveau sept. 1999				×
95	Amérique du Nord juin 1999	×			
96	Antilles–Guyane juin 1999	×			
97	Asie juin 1999	×			
98	Centres étrangers juin 1999	×			
99	France juin 1999	×			
100	Liban juin 1999	×			
101	Pondichéry juin 1999	×			
102	Antilles–Guyane sept. 1998				×

1. Nouvelle-Calédonie novembre 2006

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. (unité 1 cm).
On construira une figure que l'on complétera au fur et mesure.

1. Soit A le point d'affixe 3, et r la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
On note B, C, D, E et F les images respectives des points A, B, C, D et E par la rotation r. Montrer que B a pour affixe $\dfrac{3}{2}+\dfrac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}$.

2. Associer à chacun des points C, D, E et F l'une des affixes de l'ensemble suivant

$$\left\{-3\ ;\ -\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}\ ;\ \frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}\ ;\ -\frac{3}{2}-\frac{3\sqrt{3}}{2}\text{i}\right\}$$

3. **a.** Déterminer $r(\text{F})$.

b. Quelle est la nature du polygone ABCDEF ?

4. Soit s la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
Soit s' la similitude directe de centre E transformant F en C.

a. Déterminer l'angle et le rapport de s'. En déduire l'angle et le rapport de $s' \circ s$.

b. Quelle est l'image du point D par $s' \circ s$?

c. Déterminer l'écriture complexe de s'.

5. Soit A$'$ le symétrique de A par rapport à C.

a. Sans utiliser les nombres complexes, déterminer $s(\text{A}')$ puis l'image de A$'$ par $s' \circ s$.

b. Calculer l'affixe du point A$'$. Retrouver alors le résultat du **a.** en utilisant l'écriture complexe de $s' \circ s$.

2. Amérique du Sud novembre 2006

Rappel :
Pour deux entiers relatifs a et b, on dit que a est congru à b modulo 7, et on écrit $a \equiv b \pmod 7$ lorsqu'il existe un entier relatif k tel que $a = b+7k$.

1. *Cette question constitue une restitution organisée de connaissances*

a. Soient $a,\ b,\ c$ et d des entiers relatifs.
Démontrer que : si $a \equiv b \pmod 7$ et $c \equiv d \pmod 7$ alors $ac \equiv bd \pmod 7$.

b. En déduire que : pour a et b entiers relatifs non nuls
si $a \equiv b \pmod 7$ alors pour tout entier naturel n, $a^n \equiv b^n \pmod 7$.

2. Pour $a = 2$ puis pour $a = 3$, déterminer un entier naturel n non nul tel que $a^n \equiv 1 \pmod 7$.

3. Soit a un entier naturel non divisible par 7.

a. Montrer que : $a^6 \equiv 1 \pmod 7$.

b. On appelle *ordre* de $a \pmod 7$, et on désigne par k, le plus petit entier naturel non nul tel que $a^k \equiv 1 \pmod 7$. Montrer que le reste r de la division euclidienne de 6 par k vérifie $a^r \equiv 1 \pmod 7$.
En déduire que k divise 6.
Quelles sont les valeurs possibles de k ?

c. Donner l'ordre modulo 7 de tous les entiers a compris entre 2 et 6.

4. À tout entier naturel n, on associe le nombre

$$A_n = 2^n + 3^n + 4^n + 5^n + 6^n.$$

Montrer que $A_{2006} \equiv 6 \pmod 7$.

3. France septembre 2006

1. On considère l'équation $(\mathcal{E}) \quad : \quad 17x - 24y = 9$, où $(x,\ y)$ est un couple d'entiers relatifs.

a. Vérifier que le couple (9 ; 6) est solution de l'équation $(\mathcal{E})$.

b. Résoudre l'équation $(\mathcal{E})$.

2. Dans une fête foraine, Jean s'installe dans un un manège circulaire représenté par le schéma de l'annexe 2. Il peut s'installer sur l'un des huit points indiqués sur le cercle.
Le manège comporte un jeu qui consiste à attraper un pompon qui, se déplace sur un câble fomant un carré dans lequel est inscril le cercle. Le manège tourne dans le sens des aiguilles d'une montre, à vitesse constante. Il fait un tour à vitesse constante. Il fait un tour en 24 secondes. Le pompon se déplace dans le même sens à vitesse constante. Il fait un tour en 17 secondes.
Pour gagner, Jean doit attraper le pompon, et il ne peut le faire qu'aux points de contact qui sont notés A, B, C et D sur le dessin.
À l'instant $t = 0$, Jean part du point H en même temps que le pompon part du point A.

a. On suppose qu'à un cerain instant t Jean attrape le pompon en A. Jean a déjà pu passer un certain nombre de fois en A sans y trouver le pompon. À l'instant t, on note y le nombre de tours effectués depuis son premier passage en A et x le nombre de tours effectués par le pompon. Montrer que $(x,\ y)$ est solution de l'équation $(\mathcal{E})$ de la question 1.

b. Jean a payé pour 2 minutes ; aura-t-il le temps d'attraper le pompon ?

c. Montrer, qu'en fait, il n'est possible d'attraper le pompon qu'au point A.

d. Jean part maintenant du point E. Aura-t-il le temps d'attraper le pompon en A avant les deux minutes ?

4. Polynésie juin 2006

Pour chacune des cinq propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point.

Proposition 1 : « pour tout entier naturel n, 3 divise le nombre $2^{2n} - 1$ ».

Proposition 2 : « Si un entier relatif x est solution de l'équation $x^2+x \equiv 0 \quad (\text{modulo } 6)$ alors $x \equiv 0 \quad (\text{modulo } 3)$ ».

Proposition 3 : « l'ensemble des couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de l'équation $12x-5y=3$ est l'ensemble des couples $(4+10k\ ;\ 9+24k)$ où $k \in \mathbb{Z}$ ».

Proposition 4 : « il existe un seul couple $(a\ ;\ b)$ de nombres entiers naturels, tel que $a < b$ et $\text{PPCM}(a,\ b) - \text{PGCD}(a,\ b) = 1$ ».

Deux entiers naturels M et N sont tels que M a pour écriture abc en base dix et N a pour écriture bca en base dix.

Proposition 5 : « Si l'entier M est divisible par 27 alors l'entier $M - N$ est aussi divisible par 27 ».

5. La Réunion juin 2006

On complètera la figure donnée en annexe 2 *au fur et à mesure des questions, et on la rendra avec la copie.*

ABCD est un carré tel que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}\right) = +\dfrac{\pi}{2}$. Soit I le centre du carré ABCD.
Soit J le milieu du segment [CD].
On désigne par s la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de la similitude s. *Dans la partie* A *on utilisera des raisonnements géométriques ; dans la partie* B *on utilisera les nombres complexes.*

Partie A

1. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude s.
2. On désigne par Ω le centre de cette similitude. Γ_1 est le cercle de diamètre [AI], Γ_2 est le cercle de diamètre [BJ]. Démontrer que Ω est l'un des points d'intersection de Γ_1 et Γ_2. Placer Ω sur la figure.
3. Donner l'image par s de la droite (BC). En déduire le point image par s du point C, puis le point K image par s du point I.
4. On pose $h = s \circ s$ (composée de s avec elle même).
   - **a.** Donner la nature de la transformation h (préciser ses éléments caractéristiques).
   - **b.** Trouver l'image du point A par h. En déduire que les points A, Ω et K sont alignés.

Partie B
Le plan complexe est rapporté à un repère $\left(\text{A}~;~\vec{u},~\vec{v}\right)$ orthonormal direct, choisi de manière à ce que les points A, B, C et D aient comme affixes respectives 0, 2 , 2 + 2i et 2i.

1. Démontrer que l'écriture complexe de la similitudes est $z' = \dfrac{1}{2}\text{i}z + 1 + \text{i}$.
2. Calculer l'affixe du point Ω.
3. Calculer l'affixe du point E tel que $s(\text{E}) = \text{A}$. Placer le point E sur la figure.

6. France juin 2006

Partie A : Question de cours

1. Énoncer le théorème de Bézout et le théorème de Gauss.
2. Démontrer le théorème de Gauss en utilisant le théorème de Bézout.

Partie B

Il s'agit de résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système

$$(S)\quad \left\{\begin{array}{lllll} n & \equiv & 13 & & (19)\\ n & \equiv & 6 & & (12)\end{array}\right.$$

1. Démontrer qu'il existe un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tel que : $19u + 12v = 1$.
   (On ne demande pas dans cette question de donner un exemple d'un tel couple).
   Vérifier que, pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution de (S).
2. **a.** Soit n_0 une solution de (S), vérifier que le système (S) équivaut à
   $$\left\{\begin{array}{lllll} n & \equiv & n_0 & & (19)\\ n & \equiv & n_0 & & (12)\end{array}\right.$$
   b. Démontrer que le système $\left\{\begin{array}{lllll} n & \equiv & n_0 & & (19)\\ n & \equiv & n_0 & & (12)\end{array}\right.$ équivaut à $n \equiv n_0 \quad (12 \times 19)$.
3. **a.** Trouver un couple $(u\ ;\ v)$ solution de l'équation $19u + 12v = 1$ et calculer la valeur de N correspondante.
   b. Déterminer l'ensemble des solutions de (S) (on pourra utiliser la question 2. b.).
4. Un entier naturel n est tel que lorsqu'on le divise par 12 le reste est 6 et lorsqu'on le divise par 19 le reste est 13.
   On divise n par $228 = 12 \times 19$. Quel est le reste r de cette division ?

7. Centresétrangers juin 2006

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel.
On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « si p est un nombre entier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \mod p$ ».

Partie A. Quelques exemples.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.
2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
3. Pour $1 \leqslant n \leqslant 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?
5. À l'aide des questions précédentes. déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B. Divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $4^n \equiv 1 \mod p$.
2. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \mod p$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \mod p$ et r le reste de la division euclidienne de n par b.
   - **a.** Démontrer que $4^r \equiv 1 \mod p$. En déduire que $r = 0$.
   - **b.** Prouver L'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si et seulement si n est multiple de b.
   - **c.** En déduire que b divise $p - 1$.

8. Asie juin 2006

Étant donné un entier naturel $n \geqslant 2$, on se propose d'étudier l'existence de trois entiers naturels $x,\ y$ et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo 2^n.

Partie A : Étude de deux cas particuliers

1. Dans cette question on suppose $n = 2$. Montrer que 1, 3 et 5 satisfont à la condition précédente.

2. Dans cette question, on suppose $n = 3$.

a. Soit m un entier naturel. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous donnant le reste r de la division euclidienne de m par 8 et le reste R de la division euclidienne de m^2 par 8.

r	0	1	2	3	4	5	6	7
R								

b. Peut-on trouver trois entiers naturels $x,\ y$ et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 7$ modulo 8 ?

Partie B Etude du cas général où $n \geqslant 3$

Supposons qu'il existe trois entiers naturels $x,\ y$ et z tels que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 2^n - 1$ modulo 2^n.

1. Justifier le fait que les trois entiers naturels $x,\ y$ et z sont tous impairs ou que deux d'entre eux sont pairs.

2. On suppose que x et y sont pairs et que z est impair. On pose alors $x = 2q$,
$y = 2r,\ z = 2s + 1$ où $q,\ r,\ s$ sont des entiers naturels.

a. Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 1$ modulo 4.

b. En déduire une contradiction.

3. On suppose que $x,\ y,\ z$ sont impairs.

a. Prouver que, pour tout entier naturel k non nul, $k^2 + k$ est divisible par 2.

b. En déduire que $x^2 + y^2 + z^2 \equiv 3$ modulo 8.

c. Conclure.

9. Antilles-Guyane juin 2006

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O. Soit P un point du segment [BC] distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure.

2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

a. Précisez, en justifiant votre réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r.

b. Déterminez les images de R et de P par r.

c. Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS.

3. On note N le milieu du segment $[PS]$ et M celui du segment $[QR]$.

Soit s la similitude de centre A, d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et de rapport $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

a. Déterminez les images respectives de R et de P par s.

b. Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B ?

c. Démontrez que les points M, B, N et D sont alignés.

10. Amérique du Nord juin 2006

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 4 cm).
Soit Ω le point d'affixe 2.
On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1. On pose $\sigma = h \circ r$.

a. Quelle est la nature de la transformation σ ? Préciser ses éléments caractéristiques.

b. Montrer que l'écriture complexe de σ est : $z \longmapsto \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}z + 1 - \mathrm{i}$.

c. Soit M un point quelconque du plan d'affixe z. On désigne par M' son image par σ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z - z' = \mathrm{i}\left(2 - z'\right)$.

2. **a.** **Question de cours**
• *Prérequis : définitions géométriques du module d'un nombre complexe et d'un argument d'un nombre complexe non nul. Propriétés algébriques des modules et des arguments.*

Démontrer que : si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que $q - a = \mathrm{i}(p - a)$.

b. Déduire des questions précédentes la nature du triangle $\Omega MM'$, pour M distinct de Q.

3. Soit A_0 le point d'affixe $2 + \mathrm{i}$.
On considère la suite (A_n) de points du plan définis par :

$$\text{pour tout entier naturel} \quad n,\ A_{n+1} = \sigma\left(A_n\right).$$

a. Montrer que, pour tout entier naturel n, l'affixe a_n de A_n est donnée par :

$$a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{(n+2)\pi}{4}} + 2.$$

b. Déterminer l'affixe de A_5.

4. Déterminer le plus petit entier n_0 tel que l'on ait :
pour $n \geqslant n_0$, le point A_n est dans le disque de centre Ω et de rayon 0,01.

11. Pondichéry avril 2006

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra 5 cm pour unité graphique.
Soit f la transformation qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}\right)z + 1.$$

1. Justifier que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω (d'affixe ω), le rapport k et l'angle θ.

2. On note A_0 le point O et, pour tout entier naturel n, on pose $A_{n+1} = f(A_n)$.

a. Déterminer les affixes des points A_1 A_2, A_3 puis placer les points A_0, A_1, A_2 et A_3.

b. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = \Omega A_n$. Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$

c. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre Ω et de rayon 0, 1 ?

3. a. Quelle est la nature du triangle $\Omega A_0 A_1$?
En déduire, pour tout entier naturel n, la nature du triangle $\Omega A_n A_{n+1}$.

b. Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée
$A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$. On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
Exprimer ℓ_n en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

12. Nouvelle–Calédonie novembre 2005

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. Unité graphique : **4 cm**

Partie I

1. Placer les points I, J, H, A, B, C, D d'affixes respectives :

$$z_{\text{I}} = 1\ ,\ z_{\text{J}} = \text{i}\ ,\ z_{\text{H}} = 1 + \text{i}\ ,\ z_{\text{A}} = 2\ ,\ z_{\text{B}} = \frac{3}{2} + \text{i}\ ,\ z_{\text{C}} = 2\text{i} \text{ et } z_{\text{D}} = -1$$

2. Soit E le symétrique de B par rapport à H. La perpendiculaire à la droite (AE) passant par C et la parallèle à la droite (OC) passant par D se coupent en F.

Placer E et F et vérifier que le point F a pour affixe $z_{\text{F}} = -1 + \frac{1}{2}\text{i}$.

3. Montrer que les triangles OAB et OCF sont isométriques.

Partie II

On considère la transformation f du plan, d'écriture complexe : $z' = -\text{i}\,\overline{z} + 2\text{i}$.

1. Déterminer les images des points O, A, B par f.

2. **a.** Montrer que f est une similitude. Est-ce une isométrie ?

b. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

c. La transformation f est-elle une symétrie axiale ?

3. Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{IJ}}$. Donner l'écriture complexe de t et celle de sa réciproque t^{-1}.

4. On pose $s = f \circ t^{-1}$.

a. Montrer que l'écriture complexe de s est : $z' = -\text{i}\,\overline{z} + 1 + \text{i}$.

b. Montrer que I et J sont invariants par s. En déduire la nature de s.

c. En déduire que f est la composée d'une translation et d'une symétrie axiale à préciser.

13. Amérique du Sud novembre 2005

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 4 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = \text{i}, \qquad b = 1+2\text{i}, \qquad c = \sqrt{2}\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{4}}, \quad \text{et} \quad d = 3+2\text{i}.$$

On considère la similitude directe s qui transforme A en B et C en D. Soit M un point d'affixe z et M', d'affixe z', son image par s.

1. Exprimer z' en fonction de z.
   Déterminer les éléments caractéristiques de s.

   Soit (U_n) la suite numérique définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} U_0 & = & 0 \\ U_{n+1} & = & 2U_n+1 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{array}\right.$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux.
3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude s, les termes de la suite (U_n).
4. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 2^n - 1$.
5. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p non nuls tels que $n \geqslant p$,
$$U_n = U_p\left(U_{n-p}+1\right) + U_{n-p}.$$
   La notation pgcd$(a\ ;\ b)$ est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels a et b. Montrer pour $n \geqslant p$ l'égalité
$$\text{pgcd}\left(U_n\, , U_p\right) = \text{pgcd}\left(U_p,\ U_{n-p}\right).$$
6. Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que :
$$\text{pgcd}\left(U_n,\ U_p\right) = U_{\text{pgcd}(n\ ;\ p)}.$$
   Déterminer le nombre : pgcd$(U_{2005},\ U_{15})$.

14. France septembre 2005

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.
Chaque réponse exacte rapporte 1 *point. Chaque réponse fausse enlève* 0,5 *point. Une absence de réponse est comptée* 0 *point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.*

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation : $x^2 - x + 4 \equiv 0 \quad (\text{modulo } 6)$.

A : toutes les solutions sont des entiers pairs.

B : il n'y a aucune solution.

C : les solutions vérifient $x \equiv 2 \quad (\text{modulo } 6)$.

D : les solutions vérifient $x \equiv 2 \quad (\text{modulo } 6)$ ou $x \equiv 5 \quad (\text{modulo } 6)$.

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x + 34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme :
$(x\,;y) = (34k - 7\,;\,5 - 24k),\ k \in \mathbb{Z}$.

B : L'équation (E) n'a aucune solution.

C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme :
$(x\,;\,y) = (17k - 7\,;\,5 - 12k),\ k \in \mathbb{Z}$.

D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme :
$(x\,;\,y) = (-7k\,;\,5k),\ k \in \mathbb{Z}$.

3. On considère les deux nombres $n = 1\,789$ et $p = 1\,789^{2\,005}$. On a alors :

A : $n \equiv 4 \quad (\text{modulo } 17)$ et $p \equiv 0 \quad (\text{modulo } 17)$.

B : p est un nombre premier.

C : $p \equiv 4 \quad (\text{modulo } 17)$.

D : $p \equiv 1 \quad (\text{modulo } 17)$.

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et B d'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hypoténuse [AB] si et seulement si le point M d'affixe z est tel que :

A : $z = \dfrac{b - \mathrm{i}a}{1 - \mathrm{i}}$. C : $a - z = \mathrm{i}(b - z)$.

B : $z - a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}(b - a)$. D : $b - z = \dfrac{\pi}{2}(a - z)$.

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment [AB]. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre 1.

A : $h \circ g \circ f$ transforme A en B et c'est une rotation.

B : $h \circ g \circ f$ est la réflexion ayant pour axe la médiatrice du segment [AB].
C : $h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.
D : $h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

15. Amérique du Nord juin 2005

La figure jointe en annexe sera complétée au cours de l'exercice et remise avec la copie. On y laissera apparents les traits de construction.

Dans le plan orienté, on donne le triangle ABC tel que AB = 2, AC= $1+\sqrt{5}$ et $\left(\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

1. **a.** *Démonstration de cours* : démontrer qu'il existe une seule similitude directe S transformant B en A et A en C.

   b. Déterminer le rapport et une mesure de l'angle de S.

2. On appelle Ω le centre de S. Montrer que Ω appartient au cercle de diamètre [AB] et à la droite (BC). Construire le point Ω.

3. On note D l'image du point C par la similitude S.

   a. Démontrer l'alignement des points A, Ω et D ainsi que le parallélisme des droites (CD) et (AB). Construire le point D.

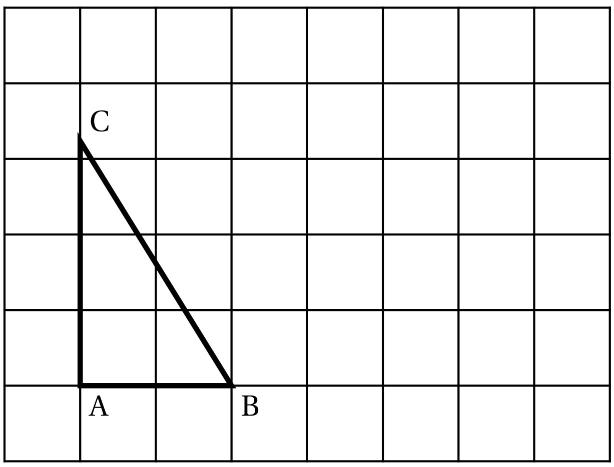
   b. Montrer que CD = $3+\sqrt{5}$.

4. Soit E le projeté orthogonal du point B sur la droite (CD).

   a. Expliquer la construction de l'image F du point E par S et placer F sur la figure.

   b. Quelle est la nature du quadrilatère BFDE ?

Annexe : exercice de spécialité



16. Antilles–Guyane juin 2005

1. **a.** Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel non nul n le reste dans la division euclidienne par 9 de 7^n.

   b. Démontrer alors que $(2005)^{2005} \equiv 7\ (9)$.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel non nul

$$n\ :\ (10)^n \equiv 1\ (9).$$

   b. On désigne par N un entier naturel écrit en base dix, on appelle S la somme de ses chiffres.
   Démontrer la relation suivante : $N \equiv S\ (9)$.

   c. En déduire que N est divisible par 9 si et seulement si S est divisible par 9.

3. On suppose que $A = (2005)^{2005}$; on désigne par :
   - B la somme des chiffres de A ;
   - C la somme des chiffres de B ;
   - D la somme des chiffres de C.

   a. Démontrer la relation suivante : $A \equiv D\ (9)$.

   b. Sachant que $2005 < 10\,000$, démontrer que A s'écrit en numération décimale avec au plus 8 020 chiffres. En déduire que $B \leqslant 72\,180$.

   c. Démontrer que $C \leqslant 45$.

   d. En étudiant la liste des entiers inférieurs à 45, déterminer un majorant de D plus petit que 15.

   e. Démontrer que $D = 7$.

17. Asie juin 2005

Le but de cet exercice est d'étudier les similitudes directes qui transforment l'ensemble S_1 des sommets d'un carré $\mathscr{C}_1$ donné en l'ensemble S_2 des sommets d'un carré $\mathscr{C}_2$ donné.
Le plan complexe est rapporte à un repère orthonormal direct $\mathscr{R} = \left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, unité graphique 2 cm.
On considère les points A, B, C, D, E, F, G, H d'affixes respectives

$$-\frac{\mathrm{i}}{2},\ 1-\frac{\mathrm{i}}{2},\ 1+\frac{\mathrm{i}}{2},\ \frac{\mathrm{i}}{2},\ 1-\mathrm{i},\ 3-\mathrm{i},\ 3+\mathrm{i},\ 1+\mathrm{i}.$$

$\mathscr{C}_1$ est le carré de sommets A, B, C, D et de centre O_1, $\mathscr{C}_2$ est le carré de sommet E, F G, H de centre O_2. S_1 est donc l'ensemble {A, B, C, D} et S_2 l'ensemble {E, F, G, H}.

1. Placer tous les points dans le repère $\mathscr{R}$, construire les carrés $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$.

2. Soit h l'homothétie de centre Ω d'affixe -1 et de rapport 2. Donner l'écriture complexe de h et prouver que h transforme S_1 en S_2.

3. Soit s une similitude directe qui transforme S_1 en S_2 et soit g la transformation $g = h^{-1} \circ s$.

a. Quel est le rapport de la similitude s ?

b. Prouver que g est une isométrie qui laisse S_1 globalement invariant.

c. Démontrer que $g(\mathrm{O}_1) = \mathrm{O}_1$.

d. En déduire que g est l'une des transformations suivantes : l'identité, la rotation r_1 de centre O_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$, la rotation r_2 de centre O_1 et d'angle π, la rotation r_3 de centre O_1 et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

e. En déduire les quatre similitudes directes qui transforment S_1 en S_2.

4. Étude des centres de ces similitudes.

a. Déterminer les écritures complexes de $h \circ r_1,\ h \circ r_2,\ h \circ r_3$.

b. En déduire les centres $\Omega_1,\ \Omega_2,\ \Omega_3$ de ces similitudes et les placer sur le dessin.

18. Centres étrangers juin 2005

Partie A

Soit N un entier naturel, impair non premier.
On suppose que $N = a^2 - b^2$ où a et b sont deux entiers naturels.

1. Montrer que a et b n'ont pas la même parité.
2. Montrer que N peut s'écrire comme produit de deux entiers naturels p et q.
3. Quelle est la parité de p et de q ?

Partie B

On admet que 250 507 n'est pas premier.
On se propose de chercher des couples d'entiers naturels $(a\ ;\ b)$ vérifiant la relation

$$(\text{E}) : \quad a^2 - 250\,507 = b^2.$$

1. Soit X un entier naturel.
   a. Donner dans un tableau, les restes possibles de X modulo 9 ; puis ceux de X^2 modulo 9.
   b. Sachant que $a^2 - 250\,507 = b^2$, déterminer les restes possibles modulo 9 de $a^2 - 250\,507$; en déduire les restes possibles module 9 de a^2.
   c. Montrer que les restes possibles modulo 9 de a sont 1 et 8.
2. Justifier que si le couple $(a\ ;\ b)$ vérifie la relation (E), alors $a \geqslant 501$. Montrer qu'il n'existe pas de solution du type $(501\ ;\ b)$.
3. On suppose que le couple $(a\ ;\ b)$ vérifie la relation (E).
   a. Démontrer que a est congru à 503 ou à 505 modulo 9.
   b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que le couple $(505 + 9k\ ;\ b)$ soit solution de (E), puis donner le couple solution correspondant.

Partie C

1. Déduire des parties précédentes une écriture de 250 507 en un produit deux facteurs.
2. Les deux facteurs sont-ils premiers entre eux ?
3. Cette écriture est-elle unique ?

19. France juin 2005

Le but de l'exercice est d'étudier quelques propriétés de la figure donnée en annexe. Cette annexe sera à rendre avec la copie.

On munit le plan d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. Le quadrilatère MNPQ est un quadrilatère non croisé et de sens direct. Les triangles MRN, NSP, PTQ et QUM sont des triangles rectangles isocèles, extérieurs au quadrilatère MNPQ et de sens direct (les sommets des angles droits étant respectivement les points R, S, T et U).

Partie A

On désigne par $m,\ n,\ p$ et q, les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1. Soit f la similitude directe de centre M qui transforme N en R.

   a. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude f.

   b. On désigne par r l'affixe du point R. Démontrer que $r = \dfrac{1+\text{i}}{2}m + \dfrac{1-\text{i}}{2}n$, où i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$(on pourra éventuellement utiliser l'écriture complexe de la similitude f).

   On admettra que l'on a également les résultats $s = \dfrac{1+\text{i}}{2}n + \dfrac{1-\text{i}}{2}p,\ t = \dfrac{1+\text{i}}{2}p + \dfrac{1-\text{i}}{2}q$ et $u = \dfrac{1+\text{i}}{2}q + \dfrac{1-\text{i}}{2}m$, où $s,\ t$ et u désignent les affixes respectives des points S, T et U.

2. Démontrer que les quadruplets (M, N, P, Q) et (R, S, T, U) ont le même isobarycentre.

3. a. Démontrer l'égalité $u - s = \text{i}(t - r)$.

   b. Que peut-on en déduire pour les longueurs des segments [RT] et [SU], d'une part, et pour les droites (RT) et (SU), d'autre part ?

Partie B

Cette partie sera traitée sans utilisation des nombres complexes.

1. Démontrer, en utilisant les résultats établis dans la **partie A**, qu'il existe une unique rotation g qui transforme R en S et T en U.

2. Décrire comment construire géométriquement le point Ω, centre de la rotation g. Réaliser cette construction sur la figure de l'annexe.

20. La Réunion juin 2005

Dans cet exercice, on pourra utiliser le résultat suivant :
« Étant donnés deux entiers naturels a et b non nuls, si PGCD$(a\ ;\ b) = 1$ alors PGCD$(a^2\ ;\ b^2) = 1$ ».

Une suite (S_n) est définie pour $n > 0$ par $\mathrm{S}_n = \sum_{p=1}^{n} p^3$. On se propose de calculer, pour tout entier naturel non nul n, le plus grand commun diviseur de S_n et S_{n+1}.

1. Démontrer que, pour tout $n > 0$, on a : $\mathrm{S}_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

2. Étude du cas où n est pair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k$.

- **a.** Démontrer que PGCD$(\mathrm{S}_{2k}\ ;\ \mathrm{S}_{2k+1}) = (2k+1)^2$PGCD$\left(k^2\ ;\ (k+1)^2\right)$.
- **b.** Calculer PGCD $(k\ ;\ k+1)$.
- **c.** Calculer PGCD$(\mathrm{S}_{2k}\ ;\ \mathrm{S}_{2k+1})$.

3. Étude du cas où n est impair. Soit k l'entier naturel non nul tel que $n = 2k+1$.

- **a.** Démontrer que les entiers $2k+1$ et $2k+3$ sont premiers entre eux.
- **b.** Calculer PGCD$(\mathrm{S}_{2k+1}\ ;\ \mathrm{S}_{2k+2})$.

4. Déduire des questions précédentes qu'il existe une unique valeur de n, que l'on déterminera, pour laquelle S_n et S_{n+1} sont premiers entre eux.

21. Liban juin 2005

1. On considère l'équation (E) :

$$109x - 226y = 1$$

où x et y sont des entiers relatifs.

 a. Déterminer le pgcd de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?

 b. Montrer que l'ensemble de solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k,\ 68 + 109k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

 En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$. (On précisera les valeurs des entiers d et e.)

2. Démontrer que 227 est un nombre premier.

3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leqslant 226$.

 On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :

 à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227.

 à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

 a. Vérifier que $g[f(0)] = 0$.

 On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :

 Si p est un nombre premier et a un entier non divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1 \quad$ modulo p.

 b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1 \quad [\text{modulo } 227]$.

 c. En utilisant **1. b.**, en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A. $g[f(a)] = a$.

 Que peut-on dire de $f[(g(a)] = a$?

22. Polynésie juin 2005

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 14 \\ u_{n+1} & = & 5u_n - 6 \text{ pour tout entier naturel } n \end{array}\right.$$

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
Quelle conjecture peut-on émettre concernant les deux derniers chiffres de u_n ?

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+2} \equiv u_n \pmod 4$.
En déduire que pour tout entier naturel k, $u_{2k} \equiv 2 \pmod 4$ et $u_{2k+1} \equiv 0 \pmod 4$.

a. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2u_n = 5^{n+2} + 3$.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n, $2u_n \equiv 28 \pmod{100}$.

3. Déterminer les deux derniers chiffres de l'écriture décimale de u_n suivant les valeurs de n.

4. Montrer que le PGCD de deux termes consécutifs de la suite (u_n) est constant. Préciser sa valeur.

23. Pondichéry juin 2005

Le plan complexe est rapporté a un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On considère l'application f qui au point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{3+4i}{5}\overline{z} + \frac{1-2i}{5}.$$

1. On note x et x', y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'.

   Démontrer que : $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & \dfrac{3x+4y+1}{5} \\ y' & = & \dfrac{4x-3y-2}{5} \end{array}\right.$

2. **a.** Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

   b. Quelle est la nature de l'application f ?

3. Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que z' soit réel.

4. On cherche à déterminer les points de D dont les coordonnées sont entières.

   a. Donner une solution particulière (x_0, y_0) appartenant a $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.

   b. Determiner l'ensemble des solutions appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation $4x - 3y = 2$.

5. On considère les points M d'affixe $z = x + iy$ tels que $x = 1$ et $y \in \mathbb{Z}$. Le point $M' = f(M)$ a pour affixe z'.

   Déterminer les entiers y tels que $\text{Re}(z')$ et $\text{lm}(z')$ soient entiers (on pourra utiliser les congruences modulo 5).

24. Nouvelle–Calédonie novembre 2004

Dans cet exercice, a et b désignent des entiers strictement positifs.

1. **a.** Démontrer que s'il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$ alors les nombres a et b sont premiers entre eux.

   b. En déduire que si $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$, alors a et b sont premiers entre eux.

2. On se propose de déterminer les couples d'entiers strictement positifs $(a\ ;\ b)$ tels que $\left(a^2 + ab - b^2\right)^2 = 1$. Un tel couple sera appelé solution.

   a. Déterminer a lorsque $a = b$.

   b. Vérifier que $(1\,;1)$, $(2\,;3)$ et $(5\,;8)$ sont trois solutions particulières.

   c. Montrer que si $(a\ ;\ b)$ est solution et si $a < b$, alors $a^2 - b^2 < 0$.

3. **a.** Montrer que si $(x\ ;\ y)$ est une solution différente de $(1\,;1)$ alors $(y - x\ ;\ x)$ et $(y\ ;\ y + x)$ sont aussi des solutions.

   b. Déduire de 2. b. trois nouvelles solutions.

4. On considère la suite de nombres entiers strictement positifs $(a_n)_n$ définie par $a_0 = a_1 = 1$ et pour tout entier $n,\ n \geqslant 0,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$.

   Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 0$, $(a_n\ ;\ a_{n+1})$ est solution.

   En déduire que les nombres a_n et a_{n+1} sont premiers entre eux.

25. Amérique du Sud novembre 2004

Soit A_0 et B_0 deux points du plan orienté tels que $A_0B_0 = 8$. On prendra le centimètre pour unité.

Soit S la similitude de centre A_0, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.
On définit une suite de points (B_n) de la faœon suivante :

$$\text{pour tout entier naturel } n,\ B_{n+1} = \text{S}(B_n).$$

1. Construire B_1, B_2, B_3 et B_4.
2. Montrer que, pour tout entier naturel n, les triangles $A_0B_nB_{n+1}$ et $A_0B_{n+1}B_{n+2}$ sont semblables.
3. On définit la suite (l_n) par : pour tout entier naturel n, $l_n = B_nB_{n+1}$.
   - **a.** Montrer que la suite (l_n) est une suite géométrique et préciser sa raison.
   - **b.** Exprimer l_n en fonction de n et de l_0.
   - **c.** On pose $\Sigma_n = l_0 + l_1 + \cdots + l_n$.
     Déterminer la limite de Σ_n lorsque n tend vers $+\infty$.
4. **a.** Résoudre l'équation $3x - 4y = 2$ où x et y sont deux entiers relatifs.
   - **b.** Soit Δ la droite perpendiculaire en A_0 à la droite (A_0B_0).
     Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, B_n appartient-il à Δ ?

26. Antilles–Guyane septembre 2004

Pour chacune des six affirmations, dire si elle est vraie ou si elle est fausse, en justifiant le choix effectué.

1. Le PGCD de 2 004 et 4 002 est 6.
2. Si p et q sont deux entiers naturels non nuls, $2^{pq}-1$ est divisible par 2^p-1 et par $2S^q-1$.
3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, 2^n-1 n'est jamais divisible par 9.
4. L'ensemble des couples d'entiers solutions de l'équation :
$$24x+35y=9$$
est l'ensemble des couples :
$$(-144+70k\ ;\ \ 99-24k) \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$
5. Soient A et B deux points distincts du plan ; si on note f l'homothétie de centre A et de rapport 3 et g l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{3}$ alors $g \circ f$ est la translation de vecteur A.
6. Soit s la similitude d'écriture complexe $z' = \mathrm{i}\overline{z} + (1-\mathrm{i})$, l'ensemble des points invariants de s est une droite.

27. France septembre 2004

L'exercice comporte une annexe, à rendre avec la copie.

A et C sont deux points distincts du plan ; on note Γ le cercle de diamètre [AC] et O le centre de Γ ; B est un point du cercle Γ distinct des points A et C.

Le point D est construit tel que le triangle BCD soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BD}\right) = +\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

Le point G est le centre de gravité du triangle BCD.

Les droites (AB) et (CG) se coupent en un point M.

Partie A

1. Placer les points D, G et M sur la figure de la feuille annexe.
2. Montrer que les points O, D et G appartiennent à la médiatrice du segment [BC] et que le point G est le milieu du segment [CM].
3. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude directe s de centre C transformant B en M.

Partie B

Dans cette question, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ choisi de telle sorte que les points A et C aient pour affixes respectives -1 et 1.

Soit E le point construit pour que le triangle ACE soit équilatéral direct ; on a donc $\left(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{A}E}\right) = +\dfrac{\pi}{3} \quad [2\pi]$.

1. Calculer l'affixe du point E et construire le point E sur la feuille annexe.
2. Soit σ la similitude directe d'expression complexe $z' = \dfrac{3+\text{i}\sqrt{3}}{4}z + \dfrac{1-\text{i}\sqrt{3}}{4}$.
   Déterminer les éléments caractéristiques de σ et en déduire que σ est la similitude réciproque de s.
3. Montrer que l'image E' du point E par σ a pour affixe $-\dfrac{1}{2}+\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et montrer que le point E' appartient au cercle Γ.
4. On note $\mathscr{C}$ le lieu des points M lorsque le point B décrit le cercle Γ privé des points A et C.
   Montrer que le point E appartient à $\mathscr{C}$.
   Soit O$'$ l'image du point O par la similitude s. Démontrer que le point O$'$ est le centre de gravité du triangle ACE.
   En déduire une construction de $\mathscr{C}$.

28. Polynésie septembre 2004

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On prendra, sur la figure 1 cm pour unité graphique.
On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1+\mathrm{i}$, $3+2\mathrm{i}$ et $\mathrm{i}\sqrt{2}$.

1. On considère la transformation f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point $M' = f(M)$ d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\overline{z} - 1 + \mathrm{i}\left(1+\sqrt{2}\right).$$

a. Calculer les affixes des points $\mathrm{A}' = f(\mathrm{A})$ et $\mathrm{C}' = f(\mathrm{C})$.

b. En déduire la nature de f et caractériser cette transformation.

c. Placer les points A, B et C puis construire le point $\mathrm{B}' = f(\mathrm{B})$.

2. a. Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.

b. Montrer que la composée $g = f \circ h$ a pour écriture complexe $z'' = (1+\mathrm{i})\overline{z} - 1 + 3\mathrm{i}$.

3. a. Soit M_0 le point d'affixe 2 - 4 i.
Determiner l'affixe du point $\mathrm{M}_0'' = g\left(\mathrm{M}_0\right)$ puis vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}_0''}$ sont orthogonaux.

b. On considère un point M d'affixe z. On suppose que la partie réelle x et la partie imaginaire y de z sont des entiers.

Démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{A}M''}$ sont orthogonaux si, et seulement si $5x+3y=-2$.

c. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $5x+3y=-2$.

d. En déduire les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle $[-6\ ;\ 6]$ tels que $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AM}''}$ sont orthogonaux. Placer les points obtenus sur la figure.

29. Amérique du Nord mai 2004

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Soient les points A, A′, B et B′ d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 1-2\text{i},\ z_{\text{A}'} = -2+4\text{i},\ z_{\text{B}} = 3-\text{i},\ z_{\text{B}'} = 5\text{i}.$$

1. **a.** Placer les points A, A′, B et B′ dans le plan complexe. Monter que ABB′A′ est un rectangle.

   b. Soit s la réflexion telle que $s(\text{A})=\text{A}'$ et $s(\text{B})=\text{B}'$. On note (Δ) son axe.

   Donner une équation de la droite (Δ) et la tracer dans le plan complexe.

   c. On note z' l'affixe du point M' image par s du point M d'affixe z.

   Montrer que

$$z' = \left(\frac{3}{5}+\frac{4}{5}\text{i}\right)\overline{z}+2\text{i}-1.$$

2. Soit g l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point P d'affixe z' définie par :

$$z' = \left(-\frac{6}{5}-\frac{8}{5}\text{i}\right)\overline{z}+5-\text{i}.$$

   a. On note C et D les images respectives de A et B par g ; déterminer les affixes de C et D et placer ces points dans le plan complexe.

   b. Soit Ω le point d'affixe $1+\text{i}$ et soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport -2.

   Montrer que C et D sont les images respectives de A′ et B′ par h.

   c. Soit M_1 d'affixe z_1 l'image par h de M, d'affixe z. Donner les éléments caractéristiques de h^{-1} et exprimer z en fonction de z_1.

3. On pose $f = h^{-1}\circ g$.

   a. Déterminer l'expression complexe de f.

   b. Reconnaître f. En déduire une construction du point P, image par g d'un point M quelconque donné du plan.

30. Antilles–Guyane juin 2004

Dans le plan orienté, on considère un carré direct ABCD de centre O. Soit P un point du segment [BC] distinct de B. On note Q l'intersection de (AP) avec (CD). La perpendiculaire δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S.

1. Faire une figure.

2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Précisez, en justifiant votre réponse, l'image de la droite (BC) par la rotation r.

b. Déterminez les images de R et de P par r.

c. Quelle est la nature de chacun des triangles ARQ et APS.

3. On note N le milieu du segment $[PS]$ et M celui du segment $[QR]$.

Soit s la similitude de centre A, d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

a. Déterminez les images respectives de R et de P par s.

b. Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment [BC] privé de B ?

c. Démontrez que les points M, B, N et D sont alignés.

31. Asie juin 2004

On appelle (E) l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme $9+a^2$ où a est un entier naturel non nul ; par exemple $10=9+1^2$; $13=9+2^2$ etc.

On se propose dans cet exercice d'étudier l'existence d'éléments de (E) qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

1. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2+9=2^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$.

  a. Montrer que si a existe, a est impair.

  b. En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

2. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2+9=3^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 3$.

  a. Montrer que si $n \geqslant 3$, 3^n est congru à 1 ou à 3 modulo 4.

  b. Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.

  c. On pose $n=2p$ où p est un entier naturel, $p \geqslant 2$. Déduire d'une factorisation de 3^n-a^2, que l'équation proposée n'a pas de solution.

3. Étude de l'équation d'inconnue a : $a^2+9=5^n$ où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$.

  a. En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation n'a pas de solution si n est impair.

  b. On pose $n=2p$, en s'inspirant de **2. c.** démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que a^2+9 soit une puissance entière de 5.

32. Centres étrangers juin 2004

On se propose dans cet exercice d'étudier le problème suivant :
« *Les nombres dont l'écriture décimale n'utilise que le seul chiffre* 1 *peuvent-ils être premiers* ? »
Pour tout entier naturel $p \geqslant 2$, on pose $N_p = 1\dots1$ où 1 apparaît p fois.
On rappelle dès lors que $N_p = 10^{p-1} + 10^{p-2} + \cdots + 10^0$.

1. Les nombres $N_2 = 11$, $N_3 = 111$, $N_4 = 1111$ sont-ils premiers ?

2. Prouver que $N_p = \dfrac{10^p - 1}{9}$. Peut-on être certain que $10^p - 1$ est divisible par 9 ?

3. On se propose de démontrer que si p n'est pas premier, alors N_p n'est pas premier.

On rappelle que pour tout nombre réel x et tout entier naturel n non nul,

$$x^n - 1 = (x-1)\left(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1\right).$$

a. On suppose que p est pair et on pose $p = 2q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
Montrer que N_p est divisible par $N_2 = 11$.

b. On suppose que p est multiple de 3 et on pose $p = 3q$, où q est un entier naturel plus grand que 1.
Montrer que N_p est divisible par $N_3 = 111$.

c. On suppose p non premier et on pose $p = kq$ où k et q sont des entiers naturels plus grands que 1.
En déduire que N_p est divisible par N_k.

4. Énoncer une condition nécessaire pour que N_p soit premier.
Cette condition est-elle suffisante ?

33. France juin 2004

1. Montrer que, pour tout entier naturel non nul k et pour tout entier naturel x :

$$(x-1)\left(1+x+x^2+\cdots+x^{k-1}\right)=x^k-1.$$

Dans toute la suite de l'exercice, on considère un nombre entier a supérieur ou égal à 2.

2. **a.** Soit n un entier naturel non nul et d un diviseur positif de n : $n=dk$.
Montrer que a^d-1 est un diviseur de a^n-1.

   b. Déduire de la question précédente que $2^{2004}-1$ est divisible par 7, par 63 puis par 9.

3. Soient m et n deux entiers naturels non nuls et d leur pgcd.

   a. On définit m' et n' par $m=dm'$ et $n=dn'$. En appliquant le théorème de Bezout à m' et n', montrer qu'il existe des entiers relatifs u et v tels que : $mu-nv=d$.

   b. On suppose u et v strictement positifs.
Montrer que : $(a^m-1)-(a^{nv}-1)\,a^d=a^d-1$.
Montrer ensuite que a^d-1 est le pgcd de $a^{mu}-1$ et de $a^{nv}-1$.

   c. Calculer, en utilisant le résultat précédent, le pgcd de $2^{63}-1$ et de $2^{60}-1$.

34. Liban juin 2004

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra 1 cm pour unité graphique. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 2 + \mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{B}} = 1 + 2\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{C}} = 6 + 3\mathrm{i}, \quad z_{\mathrm{D}} = -1 + 6\mathrm{i}.$$

1. Représenter les points A, B, C et D.

2. Montrer qu'il existe une similitude directe f telle que $f(\mathrm{A}) = \mathrm{B}$ et $f(\mathrm{C}) = \mathrm{D}$.

Montrer que cette similitude est une rotation, et préciser ses éléments caractéristiques.

3. Soit J le point d'affixe $3 + 5\mathrm{i}$.

Montrer que la rotation R de centre J et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ transforme A en D et C en B.

4. On appelle I le point d'affixe $1 + \mathrm{i}$, M et N les milieux respectifs de segments [AC] et [BD].

Déterminer, en utilisant les résultats des questions précédentes, la nature du quadrilatère IMJN.

5. On considère les points P et Q tels que les quadrilatères IAPB et ICQD sont des carrés directs.

a. Calculer les affixes z_P et z_Q des points P et Q.

b. Déterminer $\dfrac{\mathrm{I}P}{\mathrm{IA}}$ et $\dfrac{\mathrm{I}Q}{\mathrm{IC}}$ ainsi qu'une mesure des angles $\left(\overrightarrow{\mathrm{IA}},\ \overrightarrow{\mathrm{I}P}\right)$ et $\left(\overrightarrow{\mathrm{IC}},\ \overrightarrow{\mathrm{I}Q}\right)$.

En déduire les éléments caractéristiques de la similitude directe g telle que $g(\mathrm{A}) = P$ et $g(\mathrm{C}) = Q$.

c. En déduire que J est l'image de M par g. Que peut-on en déduire pour J ?

35. Polynésie juin 2004

Le plan P est rapporté a un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 3 cm.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que

$$\mathrm{a} = 3 \qquad \mathrm{b} = 1 + \frac{2}{3}\mathrm{i} \qquad \mathrm{c} = 3\mathrm{i} \quad \text{et} \quad \mathrm{d} = -\frac{1}{3}\mathrm{i}.$$

1. Représenter les points A, B, C et D.
2. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s transformant A en B et C en D.
3. Donner l'écriture complexe de s. En déduire l'affixe du centre I de s.
4. Soit M le point de coordonnées $(x\,;\,y)$ et $M'(x'\,;\,y')$ son image par s.

   Montrer que : $\left\{\begin{array}{rcl} x' & = & -\frac{1}{3}y + 1 \\ y' & = & \frac{1}{3}x - \frac{1}{3} \end{array}\right.$
5. On construit une suite (M_n) de points du plan en posant

   $$\left\{\begin{array}{lcl} \mathrm{M}_0 & = & \mathrm{A} \\ \multicolumn{3}{l}{\text{et, pour tout entier naturel } n} \\ M_{n+1} & = & s(M_n) \end{array}\right.$$

   Pour tout entier naturel, on note z_n l'affixe du point M_n et on pose $r_n = |z_n - 1|$.

   a. Montrer que (r_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

   b. Déterminer le plus petit entier naturel k tel que $\mathrm{I}M_k \leqslant 10^{-3}$.

36. Pondichéry avril 2004

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On considère les points A(0 ; 5 ; 5) et B(0 ; 0 ; 10).

1. Dans cette question, on se place dans le plan P_0 d'équation $x = 0$ rapporté au repère $\left(\mathrm{O},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$.
On note $\mathscr{C}$ le cercle de centre B passant par A.
Démontrer que la droite (OA) est tangente au cercle $\mathscr{C}$.

2. On nomme $\mathscr{S}$ la sphère engendrée par la rotation du cercle $\mathscr{C}$ autour de l'axe (Oz) et Γ le cône engendré par la rotation de la droite (OA) autour de l'axe (Oz).

  a. Démontrer que le cône Γ admet pour équation $x^2 + y^2 = z^2$.

  b. Déterminer l'intersection du cône Γ et de la sphère $\mathscr{S}$.
  Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.

  c. Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.

3. On coupe le cône Γ par le plan P_1 d'équation $x = 1$.
Dans P_1, l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection.
Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.

4. Soit $M(x,\ y,\ z)$ un point du cône Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls. Démontrer que x et y ne peuvent pas être simultanément impairs.

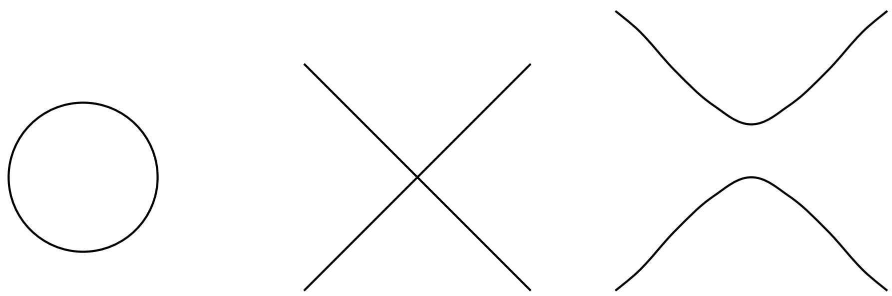


Figure 1 Figure 2 Figure 3

37. La Réunion juin 2004

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : « soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p ; alors $a^{p-1}-1$ est divisible par p ».

1. Soit p un nombre premier impair.

   a. Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que $2^k \equiv 1 \quad [p]$.

   b. Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1 \quad [p]$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n, alors $2^n \equiv 1 \quad [p]$.

   c. Soit b tel que $2^b \equiv 1 \quad [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.

   Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n \equiv 1 \quad [p]$, alors b divise n.

2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$.
On prend pour p un facteur premier de A.

   a. Justifier que : $2^q \equiv 1 \quad [p]$.

   b. Montrer que p est impair.

   c. Soit b tel que $2^b \equiv 1 \quad [p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.

   Montrer, en utilisant **1.** que b divise q. En déduire que $b = q$.

   d. Montrer que q divise $p-1$, puis montrer que $p \equiv 1 \quad [p]$.

3. Soit $A_1 = 2^{17}-1$. Voici la lisle des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m+1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.

38. Amérique du Sud novembre 2003

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique : 1 cm).

On note r_1 la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$ et r_2 la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{5}$.

Partie A

1. Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $3y = 5(15 - x)$.
2. Soit I le point d'affixe 1.
   On considère un point A mobile sur le cercle trigonométrique $\mathscr{C}$ de centre O.
   Sa position initiale est en I.
   On appelle d la distance, exprimée en centimètres, qu'a parcourue le point A sur le cercle $\mathscr{C}$ après avoir subi p rotations r_1 et q rotations r_2 (p et q étant des entiers naturels).
   On convient que lorsque A subit la rotation r_1 (respectivement r_2), il parcourt une distance de $\dfrac{\pi}{3}$cm (respectivement $\dfrac{\pi}{5}$ cm).
   Déterminer toutes les valeurs possibles de p et q pour lesquelles le point A a parcouru exactement deux fois et demie la circonférence du cercle $\mathscr{C}$ à partir de I.

Partie B

On note h_1 l'homothétie de centre O et de rapport 4 et h_2 l'homothétie de centre O et de rapport -6. On pose $s_1 = r_1 \circ h_1$ et $s_2 = r_2 \circ h_2$.

1. Préciser la nature et les éléments caractéristiques de s_1 et s_2.
2. On pose :
   $S_m = s_1 \circ s_1 \cdots \circ s_1$ (composée de m fois s_1, m étant un entier naturel non nul),
   $S'_n = s_2 \circ s_2 \cdots \circ s_2$ (composée de n fois s_2, n étant un entier naturel non nul), et $f = S'_n s_1 \circ S_m$.
   a. Justifier que f est la similitude directe de centre O, de rapport $2^{2m+n} \times 3^n$ et d'angle $m\dfrac{\pi}{3} + n\dfrac{6\pi}{5}$.
   b. f peut-elle être une homothétie de rapport 144 ?
   c. On appelle M le point d'affixe 6 et M′ son image par f.
   Peut-on avoir OM′ = 240 ?
   Démontrer qu'il existe un couple d'entiers naturels unique $(m,\ n)$ tel que OM′ = 576.
   Calculer alors la mesure principale de l'angle orienté $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{OM'}}\right)$.

39. Nouvelle–Calédonie novembre 2003

1. **a.** Soit p un entier naturel. Montrer que l'un des trois nombres p,
$p+10$ et $p+20$, et l'un seulement est divisible par 3.

   b. Les entiers naturels $a,\ b$ et c sont dans cet ordre les trois premiers terme d'une suite arithmétique de raison 10. Déterminer ces trois nombres sachant qu'ils sont premiers.

2. Soit E l'ensemble des triplets d'entiers relatifs $(u,\ v,\ w)$ tels que

$$3u+13v+23w=0.$$

   a. Montrer que pour un tel triplet $v \equiv w \pmod{3}$

   b. On pose $v=3k+r$ et $w=3k'+r$ où $k,\ k'$ et r sont des entiers relatifs et $0 \leqslant r \leqslant 2$.
   Montrer que les éléments de E sont de la forme :

$$(-13k-23k'-12r,\ 3k+r,\ 3k'+r).$$

   c. l'espace est rapporté à un repère orthonormal d'origine O et soit P le plan d'équation $3x+13y+23z=0$.
   Déterminer l'ensemble des points M à coordonnées $(x,\ y,\ z)$ entières relatives appartenant au plan P et situés à l'intérieur du cube de centre O, de côté 5 et dont les arêtes sont parallèles aux axes.

40. Antilles septembre 2003

Soit l'équation (1) d'inconnue rationnelle x :

$$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0.$$

où u et v sont des entiers relatifs.

1. On suppose dans cette question que $\dfrac{14}{39}$ est solution de l'équation (1).

a. Prouver que les entiers relatifs u et v sont liés par la relation $14u + 39v = 1\ 129$.

b. Utiliser l'algorithme d'Euclide, en détaillant les diverses étapes du calcul, pour trouver un couple $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs vérifiant l'équation
$14x + 39y = 1$.

Vérifier que le couple $(-25\ ;\ 9)$ est solution de cette équation.

c. En déduire un couple $(u_0\ ;\ v_0)$ solution particulière de l'équation $14u + 39v = 1\ 129$.

Donner la solution générale de cette équation c'est-à-dire l'ensemble des couples $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs qui la vérifient.

d. Déterminer, parmi les couples $(u\ ;\ v)$ précédents, celui pour lequel le nombre u est l'entier naturel le plus petit possible.

2. **a.** Décomposer 78 et 14 en facteurs premiers.

En déduire, dans $\mathbb{N}$, l'ensemble des diviseurs de 78 et l'ensemble des diviseurs de 14.

b. Soit $\dfrac{P}{Q}$ une solution rationnelle de l'équation (1) d'inconnue x :

$78x^3 + ux^2 + vx - 14 = 0$ où u et v sont des entiers relatifs.

Montrer que si P et Q sont des entiers relatifs premiers entre eux, alors P divise 14 et Q divise 78.

c. En déduire le nombre de rationnels, non entiers, pouvant être solutions de l'équation (1) et écrire, parmi ces rationnels, l'ensemble de ceux qui sont positifs.

41. France septembre 2003

On rappelle que 2003 est un nombre premier.

1. **a.** Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que :

$$123u + 2003v = 1.$$

b. En déduire un entier relatif k_0 tel que :

$$123k_0 \equiv 1 \quad [2003].$$

c. Montrer que, pour tout entier relatif x,

$$123x \equiv 456 \quad [2003] \text{si et seulement si } x \equiv 456k_0 \quad [2003].$$

d. Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que :

$$123x \equiv 456 \quad [2003].$$

e. Montrer qu'il existe un unique entier n tel que :

$$1 \leqslant n \leqslant 2002 \quad \text{et} \quad 123n \equiv 456 \quad [2003].$$

2. Soit a un entier tel que : $1 \leqslant a \leqslant 2002$.

a. Déterminer :

$$\text{PGCD}(a,\ 2003).$$

En déduire qu'il existe un entier m tel que :

$$am \equiv 1 \quad [2003].$$

b. Montrer que, pour tout entier b, il existe un unique entier x tel que :

$$0 \leqslant x \leqslant 2002 \quad \text{et} \quad ax \equiv b \quad [2003].$$

42. Polynésie septembre 2003

On désigne par p un nombre entier premier supérieur ou égal à 7.
Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel $n = p^4 - 1$ est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

1. Montrer que p est congru à -1 ou à 1 modulo 3. En déduire que n est divisible par 3.

2. En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que $p^2 - 1 = 4k(k+1)$, puis que n est divisible par 16.

3. En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n.

4. **a.** Soient a, b et c trois entiers naturels.
Démontrer que si a divise c et b divise c, avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c.

b. Déduire de ce qui précède que 240 divise n.

5. Existe-t-il quinze nombres premiers $p_1, p_2, \dots, p_{15}$ supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier $A = p_1^4 + p_2^4 + \dots + p_{15}^4$ soit un nombre premier ?

43. Amérique du Nord juin 2003

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm, on considère les points A_0, A_1, A_2 d'affixes respectives $z_0 = 5-4\text{i}$, $z_1 = -1-4\text{i}$, $z_2 = -4-\text{i}$.

1. **a.** Justifier l'existence d'une unique similitude directe S telle que $S(\text{A}_0) = \text{A}_1$ et $S(\text{A}_1) = \text{A}_2$.

b. Établir que l'écriture complexe de S est $z' = \dfrac{1-\text{i}}{2}z + \dfrac{-3+\text{i}}{2}$.

c. En déduire le rapport, l'angle et l'affixe ω du centre Ω de la similitude S.

d. On considère un point M, d'affixe z avec $z \neq 0$, et son image M', d'affixe z'.

Vérifier la relation : $\omega - z' = \text{i}(z - z')$; en déduire la nature du triangle $\Omega MM'$.

2. Pour tout entier naturel n, le point A_{n+1}, est défini par $\text{A}_{n+1} = S(\text{A}_n)$ et on pose $u_n = \text{A}_n\text{A}_{n+1}$.

a. Placer les points A_0, A_1, A_2 et construire géométriquement les points A_3, A_4, A_5, A_6.

b. Démontrer que la suite (u_n) est géométrique.

3. La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

a. Exprimer v_n en fonction de n.

b. La suite (v_n) est-elle convergente ?

4. **a.** Calculer en fonction de n le rayon r_n du cercle circonscrit au triangle $\Omega\text{A}_n\text{A}_{n+1}$.

b. Déterminer le plus petit entier naturel p tel que, pour tout entier naturel n :

si $n > p$ alors $r_n < 10^{-2}$.

44. Antilles juin 2003

1. **a.** Calculer : $\left(1+\sqrt{6}\right)^2$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^4$, $\left(1+\sqrt{6}\right)^6$.

   b. Appliquer l'algorithme d'Euclide 847 et 342. Que peut-on en déduire ?

2. Soit n un entier naturel non nul. On note a et b les entiers naturels tels que :

$$\left(1+\sqrt{6}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{6}.$$

   Que valent a_1 et b_1 ?

   D'après les calculs de la question **1. a.**, donner d'autres valeurs de a_n et b_n.

   a. Calculer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.

   b. Démontrer que, si 5 ne divise pas $a_n + b_n$, alors 5 ne divise pas non plus $a_{n+1} + b_{n+1}$.

   En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, 5 ne divise pas $a_n + b_n$.

   c. Démontrer que, si a_n et b_n sont premiers entre eux, alors a_{n+1} et b_{n+1} sont premiers entre eux.

   En déduire que, quel que soit n entier naturel non nul, a_n et b_n sont premiers entre eux.

45. Asie juin 2003

1. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2 - 11n + 48$ est divisible par $n+3$.

   b. Montrer que, pour tout entier naturel n, $3n^2 - 9n + 16$ est un entier naturel non nul.

2. Montrer que, pour tous les entiers naturels non nuls a, b et c, l'égalité suivante est vraie :

$$\text{PGCD}(a\,;\,b) = \text{PGCD}(bc - a\,;\,b).$$

3. Montrer que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 2, l'égalité suivante est vraie :

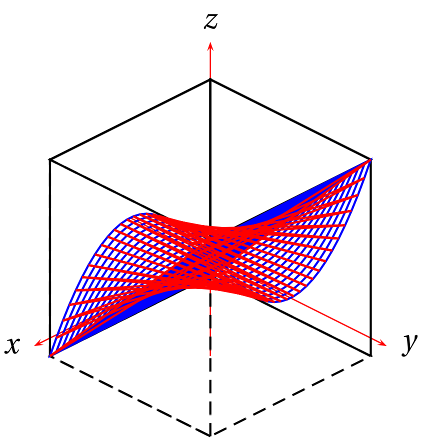
$$\text{PGCD}(3n^3 - 11n\,;\,n+3) = \text{PGCD}(48\,;\,n+3).$$

4. **a.** Déterminer l'ensemble des diviseurs entiers naturels de 48.

   b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que $\dfrac{3n^3 - 11n}{n+3}$ soit un entier naturel.

46. Centres étrangers juin 2003

L'espace (E) est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.
On considère la surface **T** d'équation : $x^2y = z$ avec $-1 \leqslant x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant y \leqslant 1$.
La figure ci-contre est une représentation de la surface **T**, dans le cube de centre O et de côté 2.



1. Éléments de symétrie de la surface **T**.

   a. Montrer que si le point $M(x, y, z)$ appartient à **T**, alors le point $M'(-x, y, z)$ appartient aussi à **T**. En déduire un plan de symétrie de **T**.

   b. Montrer que l'origine O du repère est centre de symétrie de **T**.

2. Intersections de la surface **T** avec des plans parallèles aux axes.

   a. Déterminer la nature des courbes d'intersection de **T** avec les plans parallèles au plan (xOz).

   b. Déterminer la nature des courbes d'intersection de **T** avec les plans parallèles au plan $(y\text{O}z)$.

3. Intersections de la surface **T** avec les plans parallèles au plan $(x\text{O}y)$ d'équations $z = k$, avec $k \in [0 ; 1]$.

   a. Déterminer l'intersection de la surface **T** et du plan d'équation $z = 0$.

   b. Pour $k > 0$ on note K le point de coordonnées $(0, 0, k)$. Déterminer, dans le repère $\left(K ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, l'équation de la courbe d'intersection de **T** et du plan d'équation $z = k$.

   c. Tracer l'allure de cette courbe dans le repère $\left(K ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$. On précisera en particulier les coordonnées des extrémités de l'arc.

4. On note (D) le domaine formé des points du cube unité situés sous la surface **T**.

$$(\text{D}) = M(x, y, z) \in (E) \quad \text{avec} \quad 0 \leqslant x \leqslant 1 ; 0 \leqslant y \leqslant 1 ; 0 \leqslant z \leqslant x^2y.$$

a. Pour $0 < k \leqslant 1$, le plan d'équation $z = k$ coupe le domaine (D) selon une surface qu'on peut visualiser sur le graphique de la **question 3. c.**. C'est l'ensemble des points M du cube unité, de coordonnées $(x,\ y,\ z)$ tels que $y \geqslant \dfrac{k}{x^2}$ et $z = k$.

Calculer en fonction de k l'aire $S(k)$ exprimée en unités d'aire, de cette surface.

b. On pose $S(0) = 1$; calculer en unités de volume, le volume V du domaine (D).

On rappelle que $V = \displaystyle\int_0^1 S(k)\,\mathrm{d}k$.

47. France juin 2003

Les questions **3.** *et* **4.** *sont indépendantes des questions* 1. *et* 2. *seule l'équation de* Γ *donnée en* **1. c.** *intervient à la question* **4.**.

1. L'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$.

a. Montrer que les plans P et Q d'équations respectives $x + y\sqrt{3} - 2z = 0$ et $2x - z = 0$ ne sont pas parallèles.

b. Donner un système d'équations paramétriques de la droite Δ intersection des plans P et Q.

c. On considère le cône de révolution Γ d'axe (Ox) contenant la droite Δ comme génératrice.
Montrer que Γ pour équation cartésienne $y^2 + z^2 = 7x^2$.

2. On a représenté sur les deux figures ci-dessous les intersections de l avec des plans parallèles aux axes de coordonnées.
Determiner dans chaque cas une équation des plans possibles, en justifiant avec soin votre réponse.

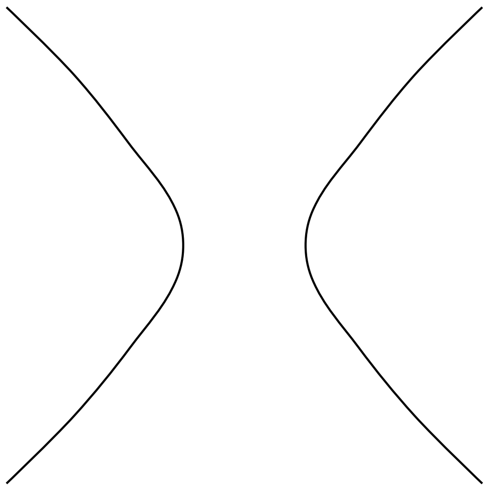


Figure 1

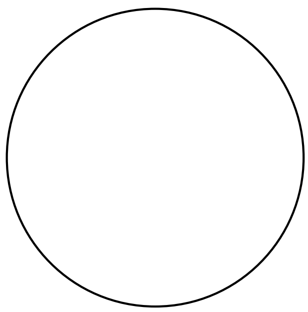


Figure 2

3. **a.** Montrer que l'équation $x^2 \equiv 3 \quad [7]$, dont l'inconnue x est un entier reIatif, n'a pas de solution,

b. Montrer la propriété suivante :
pour tous entiers relatifs a et b, si 7 divise $a^2 + b^2$ alors 7 divise a et 7 divise b.

4. **a.** Soient a, b et c des entiers relatifs non nuls. Montrer la propriété suivante :
si le point A de coordonnées (a, b, c) est un point du cône Γ alors a, b et c sont divisibles par 7.

b. En déduire que le seul point de Γ dont les coordonnées sont des entiers relatifs est le sommet de ce cône.

48. La Réunion juin 2003

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On prendra 1 cm, pour unité graphique.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = -\left(\sqrt{3}+\text{i}\right)z - 1 + \text{i}\left(1+\sqrt{3}\right).$$

1. Montrer que f est une similitude directe dont le centre Ω a pour affixe i. En déterminer le rapport et l'angle.

2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3}{4}\text{i}$.

Calculer ΩM_0 et donner une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\Omega\text{M}_0}\right)$.

3. On considère la suite de points $(M_n)_{n\geqslant 0}$, définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$. On note z_n l'affixe du poini M_n.

a. Placer les points Ω, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.

b. Monter par récurrence, pour tout entier naturel n, l'égalité :

$$z_n - \text{i} = 2^n \text{e}^{\text{i}\frac{7n\pi}{6}}\left(z_0 - \text{i}\right).$$

c. Pour tout entier naturel n, calculer ΩM_n, puis déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega M_n \geqslant 10^2$.

4. **a.** On considère l'équation (E) : $7x - 12y = 1$ où x et y sont deux entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(-5\ ;\ -3)$ est solution, résoudre l'équation (E).

b. Soit Δ l'ensemble des points M du plan d'affixe z telle que $\text{Im}(z) = 1$ et $\text{Re}(z) \geqslant 0$.

Caractériser géomtriquement Δ et le représenter.

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur $\overrightarrow{u}$. Préciser son plus petit élément.

49. Liban juin 2003

Les suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) sont définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{array}{lcl} x_0 = 3 & \text{et} & x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_0 = 1 & \text{et} & y_{n+1} = 2y_n + 3. \end{array}$$

1. Démontrer par recurrence que pour tout entier naturel n, $x_n = 2^{n+1} + 1$.

2. **a.** Calculer le pgcd de x_8 et x_9, puis celui de x_{2002} et x_{2003}. Que peut-on en déduire pour x_8 et x_9 d'une part, pour x_{2002} et x_{2003} d'autre part ?

b. x_n et x_{n+1} sont-ils premiers entre eux pour tout entier naturel n ?

3. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n, $2x_n - y_n = 5$.

b. Exprimer y_n en fonction de n.

c. En utilisant les congruences modulo 5, étudier suivant les valeurs de l'entier naturel p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5.

d. On note d_n le pgcd de x_n et y_n pour tout entier naturel n.

Démontrer que l'on a $d_n = 1$ ou $d_n = 5$; en déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que x_n et y_n soient premiers entre eux.

50. Polynésie juin 2003

Le plan complexe est rapporté un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, d'unité graphique 2 cm.

On donne les points A, C, D et Ω, d'affixes respectives $1 + \text{i}$, 1, 3 et $2 + \dfrac{1}{2}\text{i}$.

Partie A

1. Soit $\mathcal{C}$ le cercle de centre Ω passant par A.
   a. Montrer que $\mathcal{C}$ passe par C et D.
   b. Montrer que le segment [AD] est un diamètre de $\mathcal{C}$.
   c. Sur une feuille de papier millimétré, faire une figure en plaçant les points A, C, D, Ω et tracer $\mathcal{C}$. On note B la seconde intersection de $\mathcal{C}$ avec la droite (OA) .
   d. Montrer que le point O est extérieur au segment [AB].
2. Montrer par un raisonnement géométrique simple que les triangles OAD et OCB sont semblables mais non isométriques.
   Soit S la similitude qui transforme le triangle OCB en le triangle OAD.
   a. Montrer que S est une similitude indirecte différente d'une réflexion.
   b. Quel est le centre de S ?

Partie B

1. a. Déduire de la partie **A. 2.** que l'on a OA × OB = OC × OD.
   b. En déduire le module de l'affixe z_{B} du point B. Déterminer un argument de z_{B}.
2. Déterminer l'écriture complexe de S.
3. Déterminer la nature et les éélments caractéristiques de S ∘ S.

51. Pondichéry juin 2003

Les deux parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

Première partie

ABC est un triangle direct du plan orienté.

On désigne respectivement par I, J et K les milieux de [AB], [BC] et [CA].

Soit α un réel qui conduit la réalisation de la figure jointe sur laquelle on raisonnera. Cette figure sera jointe à la copie.

d_1 est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle α.

d_2 est l'image de la droite (BC) par la rotation de centre J et d'angle α.

d_3 est l'image de la droite (CA) par la rotation de centre K et d'angle α.

A_1 est le point d'intersection de d_1 et d_3, B_1 celui de d_1 et d_2 et C_1 celui de d_2 et d_3.

1. On appelle H le point d'intersection de (BC) et d_1. Montrer que les triangles HIB et HB_1J sont semblables.
2. En déduire que les triangles ABC et $A_1B_1C_1$ sont semblables.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni du repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

A - Construction de la figure

1. Placer les points $A(-4-6i)$, $B(14)$, $C(-4+6i)$, $A_1(3-7i)$, $B_1(9+5i)$ et $C_1(-3-i)$.
2. Calculer les affixes des milieux I, J et K des segments [AB], [BC] et [CA]. Placer ces points sur la figure.
3. Montrer que A_1, I, B_1 sont alignés.
   On admettra que B_1, J, C_1 *d'une part et* C_1, K, A_1 *d'autre part sont alignés.*
4. Déterminer une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{IB},\ \overrightarrow{IB_1}\right)$.

   On admettra que $\left(\overrightarrow{KA},\ \overrightarrow{KA_1}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ *et que* $\left(\overrightarrow{JC},\ \overrightarrow{JC_1}\right)=\dfrac{\pi}{4}$.
5. Quelle est l'image de la droite (AB) par la rotation de centre I et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$?

52. Amérique du Sud décembre 2002

On considère la suite d'entiers définie par $a_n = 111\dots11$ (l'écriture décimale de a_n est composée de n chiffres 1). On se propose de montrer que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

1. En écrivant a_n sous la forme d'une somme de puissances de 10, montrer que pour tout entier naturel n non nul, $a_n = \dfrac{10^n - 1}{9}$.
2. On considère la division euclidienne par 2001 : expliquer pourquoi parmi les 2 002 premiers termes de la suite, il en existe deux, au moins, ayant le même reste.
   Soit a_n et a_p deux termes de la suite admettant le même reste ($n < p$).
   Quel est le reste de la division euclidienne de $a_p - a_n$ par 2001 ?
3. Soit k et m deux entiers strictement positifs vérifiant $k < m$.
   Démontrer l'égalité $a_m - a_n = a_{m-n} \times 10^k$.
4. Calculer le PGCD de 2001 et de 10.
   Montrer que si 2001 divise $a_m - a_k$, alors 2001 divise a_{m-k}.
5. Démontrer alors que l'un, au moins, des termes de la suite est divisible par 2001.

53. Nouvelle–Calédonie novembre 2002

On considère deux entiers naturels, non nuls, x et y premiers entre eux.
On pose $S = x + y$ et $P = xy$.

1. **a.** Démontrer que x et S sont premiers entre eux, de même que y et S.
   b. En déduire que $S = x + y$ et $P = xy$ sont premiers entre eux.
   c. Démontrer que les nombres S et P sont de parités différentes (l'un pair, l'autre impair).
2. Déterminer les diviseurs positifs de 84 et les ranger par ordre croissant.
3. Trouver les nombres premiers entre eux x et y tels que : $SP = 84$.
4. Déterminer les deux entiers naturels a et b vérifiant les conditions suivantes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a+b & = & 84 \\ ab & = & d^3 \end{array}\right. \text{ avec } d = \text{pgcd}(a;b)$$

(On pourra poser $a = dx$ et $b = dy$ avec x et y premiers entre eux)

54. Antilles–Guyane septembre 2002

Dans le plan, on considère deux segments [AC] et [BD] tels que

$$\text{AC} = \text{BD} \qquad \text{et} \qquad \left(\widehat{\overrightarrow{\text{AC}}\,,\,\overrightarrow{\text{BD}}}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

On désigne par M le milieu de [AC] et par N celui de [BD]. On appelle $(\mathscr{C}_1)$, $(\mathscr{C}_2)$, $(\mathscr{C}_3)$ et $(\mathscr{C}_4)$ les cercles de diamètres respectifs [AB], [BC] , [CD] et [DA].
On pourra s'aider de la figure ci-jointe.

1. **a.** Soit r la rotation qui transforme A en B et C en D. Quel est l'angle de r ? Montrer que le centre I de r appartient aux cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$.

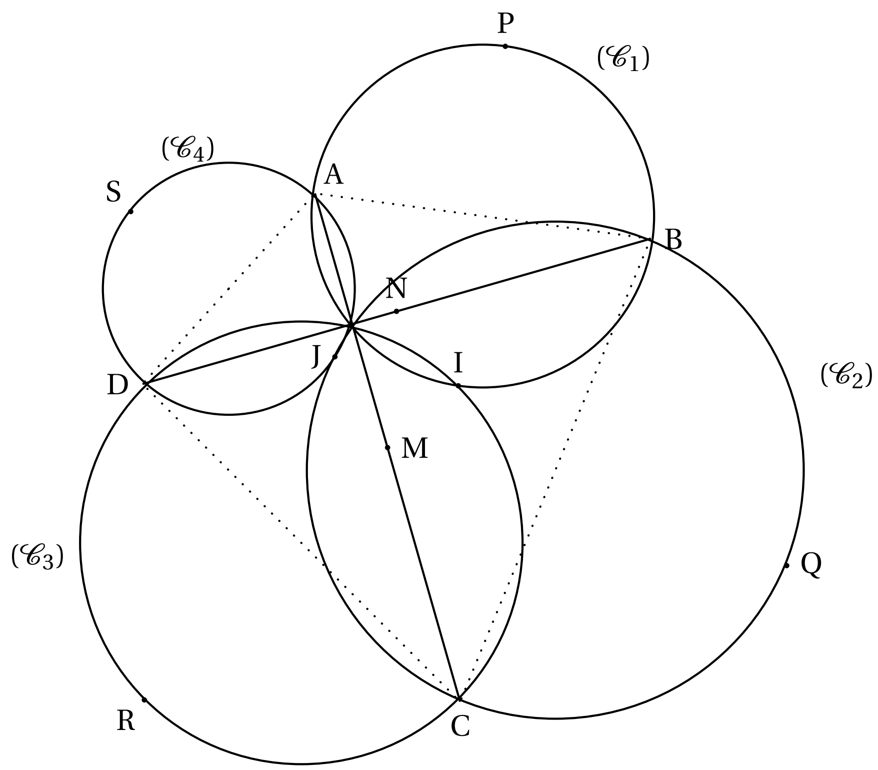
   b. Soit r' la rotation qui transforme A en D et C en B. Quel est l'angle de r' ? Montrer que le centre J de r' appartient aux cercles $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_4)$.

   c. Quelle est la nature du quadrilatère INJM ? On désigne par P et R les points diamètralement opposés à I sur, respectivement, $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_3)$ et par Q et S les points diamètralement opposés à J sur, respectivement, $(\mathscr{C}_2)$ et $(\mathscr{C}_4)$.

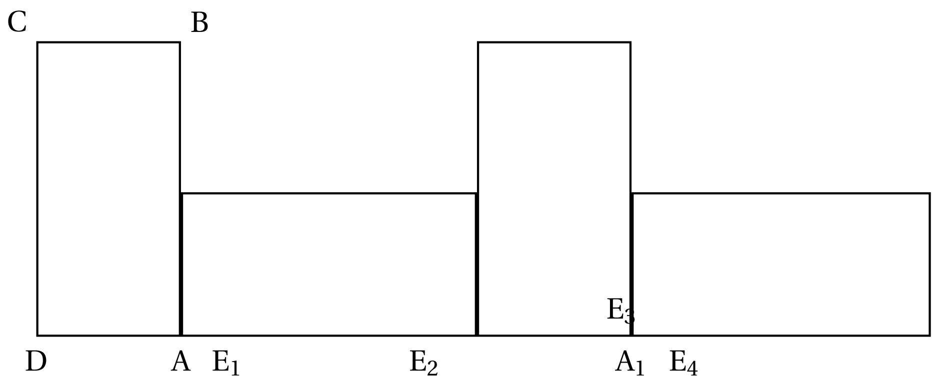
2. Soit s la similitude directe de centre I, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

   a. Quelles sont les images par s des points D, N, B ?

   b. En déduire que J est le milieu de [PR].



55. France septembre 2002



On considère un rectangle direct ABCD vérifiant : AB = 10 cm et AD = 5 cm.

1. Faire une figure : construire ABCD, puis les images respectives M, N et P de B, C et D par la rotation r de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

2. **a.** Construire le centre Ω de la rotation r' qui vérifie $r'(\text{A}) = \text{N}$ et $r'(\text{B}) = \text{P}$. Déterminer l'angle de r'.

b. Montrer que l'image de ABCD par r' est AMNP.

c. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r^{-1} \circ r'$.

3. On considère les images successives des rectangles ABCD et AMNP par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{DM}}$. Sur la demi-droite [DA), on définit ainsi la suite de points $(A_k)_{k \geqslant 1}$ vérifiant, en cm, $\text{D}A_k = 5 + 15k$. Sur la même demi-droite, on considère la suite de points $(E_n)_{n \geqslant 1}$ vérifiant, en cm, $\text{D}E_n = 6,55n$.

a. Déterminer l'entier k tel que E_{120} appartienne à $[A_k, A_{k+1}]$. Que vaut la longueur A_kE_{120} en cm ?

b. On cherche dans cette question pour quelle valeur minimale n_0 le point E_{n_0} est confondu avec un point A_k.

Montrer que si un point E_n est confondu avec un point A_k alors
$131n - 300k = 100$.

Vérifier que les nombres $n = 7\,100$ et $k = 3\,100$ forment une solution de cette équation.

Déterminer la valeur minimale n_0 recherchée.

56. Amérique du Nord juin 2002

Soit (E) l'ensemble des entiers naturels écrits, en base 10, sous la forme $\overline{abba}$ où a est un chiffre supérieur ou égal à 2 et b est un chiffre quelconque.

Exemples d'éléments de (E) : 2002 ; 3773 ; 9119.

Les parties A et B peuvent être traitées séparément.

Partie A : Nombre d'éléments de (E) ayant 11 comme plus petit facteur premier.

1. **a.** Décomposer 1001 en produit de facteurs premiers.
   b. Montrer que tout élément de (E) est divisible par 11.
2. **a.** Quel est le nombre d'éléments de (E) ?
   b. Quel est le nombre d'éléments de (E) qui ne sont ni divisibles par 2 ni par 5 ?
3. Soit n un élément de (E) s'écrivant sous la forme $\overline{abba}$.
   a. Montrer que : « n est divisible par 3 » équivaut à « $a+b$ est divisible par 3 ».
   b. Montrer que : « n est divisible par 7 » équivaut à « b est divisible par 7 ».
4. Déduire des questions précédentes le nombre d'éléments de (E) qui admettent 11 comme plus petit facteur premier.

Partie B : Étude des éléments de (E) correspondant à une année bissextile.

Soit (F) l'ensemble des éléments de (E) qui correspondent à une année bissextile.

On admet que pour tout élément n de (F), il existe des entiers naturels p et q tels que :

$$n = 2000 + 4p \quad \text{et} \quad n = 2002 + 11q.$$

1. On considère l'équation (e) : $4p - 11q = 2$ où p et q sont des entiers relatifs.
   Vérifier que le couple (6, 2) est solution de l'équation (e) puis résoudre l'équation (e).
2. En déduire que tout entier n de (F) peut s'écrire sous la forme $2024 + 44\,k$ où k est un entier relatif.
3. À l'aide de la calculatrice déterminer les six plus petits éléments de (F).
   N.B. : Liste des nombres premiers inférieurs à 40 :
   2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37.

57. Antilles–Guyane juin 2002

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{\text{OI}}, \overrightarrow{\text{OJ}}\right)$ (unité graphique 4 cm)

1. On considère les points A, B , C , D et E d'affixes respectives :

$$Z_{\text{A}} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}},\ Z_{\text{B}} = \text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}},\ Z_{\text{C}} = -1,\ Z_{\text{D}} = -\text{i} \text{ et } Z_{\text{E}} = \text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{6}}.$$

   a. Faire la figure

   b. Montrer que EA = ED et que EB = EC. Montrer que (OE) est la médiatrice du segment [AD] et du segment [BC]

   c. Déterminer les points K et L images respectives de A et de B par la translation t de vecteur $\overrightarrow{\text{OI}}$. Placer les points K et L sur la figure.

2. On considère l'application F qui à tout point M d'affixe Z associe le point M' d'affixe $Z' = \left(\frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{Z}$ où $\overline{Z}$ désigne le conjugué de Z.

   a. Justifier l'égalité $F = R \circ S$ où S est la réflexion ou symétrie axiale d'axe (OI) et R une rotation dont on précisera le centre et l'angle.

   b. Montrer que F est une réflexion dont on précisera l'axe.

3. Soit G l'application qui, à tout point M d'affixe Z associe le point M'' dont l'affixe Z'' définie par la formule $Z'' = \left(\frac{1}{2} - \text{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{Z} + 1.$

   Déterminer une application T telle que $G = T \circ F$. En déduire que G est un antidéplacement.

58. Asie juin 2002

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par $x_0 = 1,\ y_0 = 8$ et

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & \dfrac{7}{3}x_n + \dfrac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} & = & \dfrac{20}{3}x_n + \dfrac{8}{3}y_n + 5 \end{array}\right. ,\ n \in \mathbb{N}$$

1. Montrer, par récurrence, que les points M_n de coordonnées $\left(x_n,\ y_n\right)$ sont sur la droite (Δ) dont une équation est $5x - y + 3 = 0$. En déduire que $x_{n+1} = 4x_n + 2$.

2. Montrer, par récurrence, que tous les x_n sont des entiers naturels. En déduire que tous les y_n sont aussi des entiers naturels.

3. Montrer que :

a. x_n est divisible par 3 si et seulement si y_n est divisible par 3.

b. Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.

4. a. Montrer, par récurrence, que $x_n = \dfrac{1}{3}\left(4^n \times 5 - 2\right)$.

b. En déduire que $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3, pour tout entier naturel n.

59. Centres étrangers juin 2002

Soit p un nombre premier donné. On se propose d'étudier l'existence de couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers naturels strictement positifs vérifiant l'équation :

$$\mathbf{E}\ : x^2 + y^2 = p^2$$

1. On pose $p = 2$. Montrer que l'équation **E** est sans solution.

On suppose désormais $p \geqslant 2$ et que le couple $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation **E**.

2. Le but de cette question est de prouver que x et y sont premiers entre eux.

- **a.** Montrer que x et y sont de parités différentes.
- **b.** Montrer que x et y ne sont pas divisibles par p.
- **c.** En déduire que x et y sont premiers entre eux.

3. On suppose maintenant que p est une somme de deux carrés non nuls, c'est-à-dire : $p = u^2 + v^2$ où u et v sont deux entiers naturels strictement positifs.

- **a.** Vérifier qu'alors le couple $\left(\left|u^2 - v^2\right|\ ;\ 2uv\right)$ est solution de l'équation **E**.
- **b.** Donner une solution de l'équation **E**, lorsque $p = 5$ puis lorsque $p = 13$.

4. On se propose enfin de vérifier sur deux exemples, que l'équation **E** est impossible lorsque p n'est pas somme de deux carrés.

- **a.** $p = 3$ et $p = 7$ sont-ils somme de deux carrés ?
- **b.** Démontrer que les équations $x^2 + y^2 = 9$ et $x^2 + y^2 = 49$ n'admettent pas de solution en entiers naturels strictement positifs.

60. France juin 2002

1. On considère l'équation

$$(\text{E})\ :\ 6x+7y=57$$

où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(u,\ v)$ tel que $6u+7v=1$; en déduire une solution particulière $(x_0,\ y_0)$ de l'équation (E).

b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2. Soit $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.

On considère le plan (P) d'équation : $6x+7y+8z=57$.

On considère les points du plan P qui appartiennent aussi au plan $\left(\text{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath}\right)$. Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels ; déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point M du plan P dont les coordonnées $x,\ y$ et z sont des entiers naturels.

a. Montrer que l'entier y est impair.

b. On pose $y=2p+1$ où p est un entier naturel.

Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p+z$ par 3 est égal à 1.

c. On pose $p+z=3q+1$ où q est un entier naturel. Montrer que les entiers naturels $x,\ p$ et q vérifient la relation : $x+p+4q=7$. En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d. En déduire les coordonnées de tous les points de (P) dont les coordonnées sont des entiers naturels.

61. La Réunion juin 2002

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

On fera une figure que l'on complétera avec les différents éléments intervenant dans l'exercice.

1. Dans cette question on considère l'application s du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -\text{i}\overline{z}$.

   a. Montrer que s est une réflexion d'axe noté D et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$ d'affixe 1 - i.

   b. Soit D$'$ la droite d'équation $y = -1$, on appelle s' la réflexion d'axe D$'$.
   Calculer une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{w},\ \overrightarrow{u}\right)$. Déterminer géométriquement la composée $r = s' \circ s$.

   c. Déterminer l'écriture complexe de r.

2. Dans cette question un considére l'application p du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z_1 = \dfrac{1}{2}z - \dfrac{1}{2}\text{i}\overline{z} = \dfrac{z + z'}{2}$.

   a. Soit le point A d'affixe $z = 2 + \text{i}$, déterminer l'affixe du point A$_1$ image de A par p.

   b. Montrer que tout point M a son image M_1 située sur la droite d'équation $y = -x$.

   c. Définir géométriquement, en utilisant les questions précédentes, l'application p.

3. On considère l'application f définie par $f = s' \circ p$.
Construire l'image A$'$ du point A par f.
Montrer que $s \circ p = p$ et en déduire que $f = r \circ p$. Montrer que, tout point M du plan a son image par f sur une droite Δ, que l'on déterminera.

62. Polynésie juin 2002

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

1. Montrer que n et $2n+1$ sont premiers entre eux.
2. On pose $\alpha = n+3$ et $\beta = 2n+1$ et on note δ le PGCD de α et β.

   a. Calculer $2\alpha - \beta$ et en déduire les valeurs possibles de δ.

   b. Démontrer que α et β sont multiples de 5 si et seulement si $(n-2)$ est multiple de 5.

3. On considère les nombres a et b définis par :

$$\begin{array}{rcl} a & = & n^3+2n^2-3n \\ b & = & 2n^2-n-1 \end{array}$$

   Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $(n-1)$.

4. a. On note d le PGCD de $n(n+3)$ et de $(2n+1)$. Montrer que δ divise d, puis que $\delta = d$.

   b. En déduire le PGCD, Δ, de a et b en fonction de n.

   c. Application :
   Déterminer Δ pour $n = 2\,001$;
   Déterminer Δ pour $n = 2\,002$.

63. Pondichéry juin 2002

1. Calculer le P.G.C.D. de $4^5 - 1$ et de $4^6 - 1$.

Soit u la suite numérique définie par :
$u_0 = 0,\ u_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n.$$

2. Calculer les termes $u_2,\ u_3$ et u_4 de la suite u.

3. **a.** Montrer que la suite u vérifie, pour tout entier naturel $n,\ u_{n+1} = 4u_n + 1$.

b. Montrer que, pour tout entier naturel $n,\ u_n$ est un entier naturel.

c. En déduire, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de u_n et u_{n+1}.

4. Soit v la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + \dfrac{1}{3}$.

a. Montrer que v est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme v_0.

b. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

c. Déterminer, pour tout entier naturel n, le P.G.C.D. de $4^{n+1} - 1$ et de $4^n - 1$.

64. Nouvelle–Calédonie décembre 2001

Partie I

Soit x un nombre réel.

1. Montrer que $x^4+4=\left(x^2+2\right)^2-4x^2$.
2. En déduire que x^4+4 peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients réels.

Partie II

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.
On considère les entiers $A=n^2-2n+2$ et $B=n^2+2n+2$ et d leur PGCD.

1. Montrer que n^4+4 n'est pas premier.
2. Montrer que, tout diviseur de A qui divise n, divise 2.
3. Montrer que, tout diviseur commun de A et B, divise $4n$.
4. Dans cette question on suppose que n est impair.
   a. Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.
   b. Montrer que d divise n.
   c. En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.
5. On suppose maintenant que n est pair.
   a. Montrer que 4 ne divise pas n^2-2n+2.
   b. Montrer que d est de la forme $d=2p$, où p est impair.
   c. Montrer que p divise n. En déduire que $d=2$. (On pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question **4.**)

65. Amérique du Sud décembre 2001

Soit n un entier naturel non nul.
On considère les nombres a et b tels que :

$$a = 2n^3 + 5n^2 + 4n + 1 \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 + n.$$

1. Montrer que $2n + 1$ divise a et b.
2. Un élève affirme que le PGCD de a et b est $2n + 1$.
   Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée.*)

66. Antilles–Guyane septembre 2001

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que $\text{PGCD}(a+b\,;\,ab) = p$, où p est un nombre premier.

a. Démontrer que p divise a^2. (On remarquera que $a^2 = a(a+b) - ab$.)

b. En déduire que p divise a.

On constate donc, de même, que p divise b.

c. Démontrer que $\text{PGCD}(a\,;b) = p$.

2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leqslant b$.

a. Résoudre le système

$$\begin{cases} \text{PGCD}(a,\ b) & = & 5 \\ \text{PPCM}(a,\ b) & = & 170 \end{cases}$$

b. En déduire les solutions du système :

$$\begin{cases} \text{PGCD}(a+b,\ ab) & = & 5 \\ \text{PPCM}(a,\ b) & = & 170 \end{cases}$$

67. France septembre 2001

1. **a.** Déterminer le PGCD des nombres 168 et 20.

   b. Soit l'équation $168x + 20y = 6$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a t-elle des solutions ?

   c. Soit l'équation $168x + 20y = 4$ dont les inconnues x et y sont des entiers relatifs. Cette équation a t-elle des solutions ?

2. **a.** Déterminer, en utilisant l'algorithme d'Euclide, et en détaillant les calculs effectués, deux entiers relatifs m et p tels que $42m + 5p = 1$.

   b. En déduire deux entiers relatifs u et v tels que $42u + 5p = 12$.

   c. Démontrer que le couple d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ est solution de l'équation $42x + 5y = 2$ si, et seulement si $42(x + 4) = 5(34 - y)$.

   d. Déterminer tous les couples d'entiers $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation $42x + 5y = 2$.

3. Déduire du **2.** les couples $(x\ ;\ y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation
   $(42x + 5y - 3)(42x + 5y + 3) = 0$.

68. Polynésie septembre 2001

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{A}\,;\,\vec{u},\,\vec{v}\right)$, unité graphique 1 cm, on considère les points B, D définis par : $\overrightarrow{\text{AB}} = 2\vec{u}$, $\overrightarrow{\text{AD}} = 3\vec{v}$ et C tel que ABCD soit un rectangle.

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit E l'image de B par la translation de vecteur Déterminer l'affixe ZE $\overrightarrow{\text{DB}}$. Déterminer l'affixe z_{E} de E.

2. Déterminer les nombres réels a, b tels que le point F d'affixe $z_{\text{F}} = 6 - \text{i}$ soit le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients a, b et 1.

3. On considère la similitude s qui transforme A en E et B en F. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z', image de M par s.

   a. Exprimer z' en fonction de z.

   b. Déterminer le centre I, l'angle et le rapport de la similitude s.

   c. Déterminer les images de C et de D par s.

   d. Calculer l'aire de l'image par s du rectangle ABCD.

4. **a.** Déterminer l'ensemble Ω des points M du plan tels que :

$$\|6\overrightarrow{M\text{A}} - 10\overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{M\text{C}}\| = 9.$$

   b. Déterminer, en précisant ses éléments caractéristiques, l'image de Ω par s.

69. Amérique du Nord juin 2001

1. Montrer que, pour tout entier relatif n, les entiers $14n+3$ et $5n+1$ sont premiers entre eux.

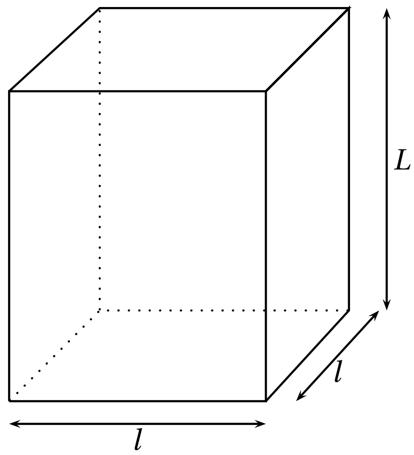
2. On considère l'équation (E) : $87x+31y=2$ où x et y sont des entiers relatifs.

   a. Vérifier, en utilisant par exemple la question **1)**, que 87 et 31 sont premiers entre eux. En déduire un couple $(u\ ;\ v)$ d'entiers relatifs tel que $87u+31v=1$ puis une solution $(x_0\ ;\ y_0)$ de (E).

   b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E) dans $\mathbb{Z}^2$.

   c. *Application* : Déterminer les points de la droite d'équation $87x-31y-2=0$ dont les coordonnées sont des entiers naturels et dont l'abscisse est comprise entre 0 et 100.
   Indication : On remarquera que le point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$ appartient à la droite (D) si, et seulement si, le couple $(x\ ;\ y)$ vérifie l'équation (E).

70. Antilles–Guyane juin 2001



1. Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté l, où l et L sont des entiers naturels non nuls tels que $l < L$. On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide).

   a. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus grande valeur possible pour a ?
   Quelles sont les valeurs possibles pour a ?

   b. Dans cette question, le volume de la boîte B est $v = 77\,760$. On sait que, pour remplir la boîte B, la plus grande valeur possible de a est 12. Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.

2. On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question **1** (Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide).

   a. Dans cette question, $l = 882$ et $L = 945$. Quelle est la plus petite arête c pour la caisse C ?
   Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête c ?

   b. Dans cette question, le volume de la boîte B est $15\,435$. On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105.
   Quelles sont les dimensions l et L de la boîte B ?

71. Asie juin 2001

On se place dans le plan, rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. On considère l'application f qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}.$$

a. Exprimer $(f \circ f)(z)$ en fonction de z.

b. Montrer que $f = \mathrm{R} \circ \mathrm{S}$, où R est une rotation et S une symétrie axiale (on déterminera les éléments caractéristiques de ces deux applications R et S).

c. Décomposer R à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que f est une réflexion, dont on donnera l'axe (D_1).
Réaliser une figure, en y représentant l'axe (D_1) (unité graphique 2 cm).

2. On considère l'application g qui, à tout point M d'affixe z associe le point M'' d'affixe z'' telle que :

$$z'' = \left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} - \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

a. Déterminer une équation de l'ensemble des points invariants de g.

b. Montrer que $g = \mathrm{T} \circ f$ où T est une translation (on précisera l'affixe du vecteur de la translation T).

c. Décomposer la translation T à l'aide de deux symétries axiales et en déduire que g est une réflexion, d'axe noté (D_2)

d. Quelle est l'image par g du point A d'affixe $\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.
En déduire une construction de la droite (D_2), qui n'utilise pas son équation, et l'illustrer en complétant la figure précédente.

72. Centres étrangers juin 2001

Un astronome a observé au jour J_0 le corps céleste A, qui apparaît périodiquement tous les 105 jours. Six jours plus tard ($J_0 + 6$), il observe le corps B, dont la période d'apparition est de 81 jours. On appelle J_1 le jour de la prochaine apparition simultanée des deux objets aux yeux de l'astronome.
Le but de cet exercice est de déterminer la date de ce jour J_1 .

1. Soient u et v le nombre de périodes effectuées respectivement par A et B entre J_0 et J_1. Montrer que le couple $(u\ ;\ v)$ est solution de l'équation (E_1) : $35x - 27y = 2$.

2. a. Déterminer un couple d'entiers relatifs $(x_0\ ;\ y_0)$ solution particulière de l'équation (E_2) :

$$35x - 27y = 1.$$

b. En déduire une solution particulière $(u_0\ ;\ v_0)$ de (E_1).

c. Déterminer toutes les solutions de l'équation (E_1).

d. Déterminer la solution $(u\ ;\ v)$ permettant de déterminer J_1.

3. a. Combien de jours s'écouleront entre J_0 et J_1 ?

b. Le jour J_0 était le mardi 7 décembre 1999, quelle est la date exacte du jour J_1 ? (L'année 2000 était bissextile.)

c. Si l'astronome manque ce futur rendez-vous, combien de jours devrat-il attendre jusqu'à la prochaine conjonction des deux astres ?

73. France juin 2001

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ [unité graphique : 6 cm].
On considère la transformation f du plan qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = z\mathrm{e}^{\frac{5\mathrm{i}\pi}{6}}$ et on définit une suite de points (M_n) de la manière suivante :
M_0 a pour afflxe $z_0 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$ et, pour tout entier naturel n, $M_{n+1} = f(M_n)$.
On appelle z_n l'affixe de M_n.

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.
Placer les points M_0, M_1, M_2.

2. Montrer que pour tout entier naturel n, on a l'égalité

$$z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}\right)}$$

(on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

3. Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p. Montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si, et seulement si, $(n-p)$ est multiple de 12.

4. **a.** On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs. Après avoir vérifié que le couple $(4 ; 9)$ est solution, résoudre l'équation (E).

b. En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite $[\mathrm{O}x)$.

74. Liban juin 2001

On suppose le plan rapporté au repère orthonormal direct $\left(\Omega ; \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique 3 cm.

Partie A

Soit trois droites D_1, D_2 et D_3, sécantes en Ω et de vecteurs directeurs respectifs $\overrightarrow{d_1} = \vec{u}$, et $\overrightarrow{d_2}$ et $\overrightarrow{d_3}$ supposés unitaires et tels que $\left(\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_2}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $\left(\overrightarrow{d_1}, \overrightarrow{d_3}\right) = -\frac{2\pi}{3}$.

On note S_1, S_2 et S_3 les réflexions d'axes respectifs D_1, D_2 et D_3, et f la composée $S_3 \circ S_2 \circ S_1$, de ces trois réflexions.

1. Tracer ces trois droites.

2. a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $r = S_2 \circ S_1$.

   b. Caractériser la réflexion S telle que $r = S_3 \circ S$. On notera D l'axe de S et on en déterminera un point et un vecteur directeur $\vec{d}$. Tracer la droite D.

   c. En déduire la nature de f et ses éléments caractéristiques.

3. Justifier que le point E d'affixe $z_E = e^{\frac{i\pi}{12}}$ est un point de la droite D. Déterminer les nombres complexes a et b tels que la forme complexe de f soit l'application f_1 définie sur $\mathbb{C}$ par $f_1(z) = a\overline{z} + b$.

Partie B

1. Choisir un point A sur D. On note B l'image de A par S_1 et C l'image de B par S_2. Placer les points B et C.

2. Démontrer que A est l'image de C par S_3.

3. Que peut-on dire du point Ω pour le triangle ABC ?

75. Polynésie juin 2001

1. On considère x et y des entiers relatifs et l'équation (E) $91x+10y=1$.

   a. Énoncer un théorème permettant de justifier l'existence d'une solution à l'équation (E).

   b. Déterminer une solution particulière de (E) et en déduire une solution particulière de l'équation (E') : $91x+10y=412$.

   c. Résoudre (E').

2. Montrer que les nombres entiers $A_n = 3^{2n} - 1$, où n est un entier naturel non nul, sont divisibles par 8. (Une des méthodes possibles est un raisonnement par récurrence).

3. On considère l'équation (E″) $A_3x + A_2y = 3\,296$.

   a. Déterminer les couples d'entiers relatifs $(x,\ y)$ solutions de l'équation (E″).

   b. Montrer que (E″) admet pour solution un couple unique d'entiers naturels.
   Le déterminer.

76. Pondichéry juin 2001

1. On considère l'équation (1) d'inconnue $(n,\ m)$ élément de $\mathbb{Z}^2$:

$$11n - 24m = 1.$$

a. Justifier, à l'aide de l'énoncé d'un théorème, que cette équation admet au moins une solution.

b. En utilisant l'algorithme d'Euclide, déterminer une solution particulière de l'équation (1).

c. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation (1).

2. recherche du P.G.C.D. de $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

a. Justifier que 9 divise $10^{11} - 1$ et $10^{24} - 1$.

b. $(n,\ m)$ désignant un couple quelconque d'entiers naturels solutions de (1), montrer que l'on peut écrire

$$\left(10^{11n} - 1\right) - 10\left(10^{24m} - 1\right) = 9.$$

c. Montrer que $10^{11} - 1$ divise $10^{11n} - 1$.
(on rappelle l'égalité $a^n - 1 = (a-1)\left(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^0\right)$, valable pour tout entier naturel n non nul).
Déduire de la question précédente l'existence de deux entiers N et M tels que :

$$\left(10^{11} - 1\right)N - \left(10^{24} - 1\right)M = 9.$$

d. Montrer que tout diviseur commun à $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$ divise 9.

e. Déduire des questions précédentes le P.G.C.D. de $10^{24} - 1$ et $10^{11} - 1$.

77. Nouvelle–Calédonie décembre 2000

Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$.
S est l'ensemble des couples (x, y) tels que PGCD$(x,\ y) = y - x$.

1. **a.** Calculer le PGCD$(363,\ 484)$.

   b. Le couple (363, 484) appartient-il à S ?

2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple $(n,\ n+1)$ appartient-il à S ?

   Justifier votre réponse.

3. **a.** Montrer que $(x,\ y)$ appartient à S si et seulement si il existe un entier naturel k non nul tel que $x = k(y-x)$ et $y = (k+1)(y-x)$.

   b. En déduire que pour tout couple $(x,\ y)$ de S on a :
   PPCM $(x,\ y) = k(k+1)(y-x)$.

4. **a.** Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

   b. En déduire l'ensemble des couples $(x,\ y)$ de S tels que PPCM $(x,\ y) = 228$.

78. Amérique du Sud novembre 2000

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$(unité graphique : 2cm). On désigne par m un nombre réel. On considère la transformation T_m du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = (m+\text{i})z + m - 1 - \text{i}$$

Partie A

1. Peut-on choisir m de telle sorte que T_m soit une translation ?
2. Déterminer le réel m de telle sorte que T_m soit une rotation. Préciser alors le centre et l'angle de cette rotation.

Partie B

Dans la suite de l'exercice on pose $m = 1$.

1. **a.** Calculer l'affixe du point Ω invariant par T_m.

   b. Pour tout nombre complexe z différent de 1, calculer $\dfrac{z'-1}{z-1}$.
   En interprétant géométriquement le module et un argument de $\dfrac{z'-1}{z-1}$, démontrer que T_1 est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

   c. Démontrer que, pour tout nombre z on a : $z' - z = \text{i}(z-1)$. En déduire que si M est distinct de Ω , alors le triangle $\Omega MM'$ est rectangle isocèle en M.
2. On définit dans le plan une suite (M_n) de points en posant :

   $M_0 = \text{O},\ M_1 = \text{T}_1(M_0)$, pour tout entier naturel n non nul : $M_n = \text{T}_1(M_{n-1})$.

   a. Placer les points $M_1,\ M_2,\ M_3$ et M_4 dans le plan muni du repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

   b. Pour tout entier naturel n, on pose $d_n = \Omega M_n$. Démontrer que la suite (d_n) est une suite géométrique. Converge-t-elle ?

79. France septembre 2000

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. L'unité graphique est 4 cm. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$$a = 1, \quad b = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}, \quad c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}, \quad d = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}.$$

1. **a.** Donner la forme exponentielle de c et la forme algébrique de d.

b. Représenter les points A, B, C et D.

c. Montrer que le quadrilatère OACB est un losange.

2. Montrer que les points D, A et C sont alignés.

3. Déterminer l'angle θ et le rapport k de la similitude directe s de centre O qui transforme A en C.

4. On note F et G les images par la similitude directe s des points D et C respectivement. Montrer que les points F, C et G sont alignés.

5. Déterminer l'affixe f du point F.

6. On considère la transformation φ qui à tout point M, d'affixe Z, associe le point M' d'affixe Z' telle que :

$$Z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}\overline{Z} + \frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Pour toute droite δ du plan, on notera σ_δ la symétrie orthogonale d'axe δ.

a. Soit r la transformation qui à tout point M_1 d'affixe Z_1, associe le point M_1' d'affixe Z_1', telle que :

$$Z_1' = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} Z_1 + \frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Déterminer la nature de r et donner ses éléments caractéristiques.

b. En utilisant les nombres complexes, donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\mathrm{AO}}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$, puis déterminer la droite Δ telle que :

$$r = \sigma_\Delta \circ \sigma_{(\mathrm{AO})}.$$

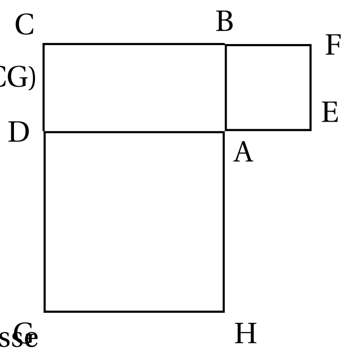
c. Montrer que $\varphi = r \circ \sigma_{(\mathrm{AO})}$. En déduire la nature de φ.

80. Polynésie septembre 2000

Sur la figure ci-dessous, ABCD est un rectangle de sens direct, AEFB et ADGH sont des carrés de sens direct.

1. Le but de cette première question est de démontrer que les droites (AC), (EG) et (FH) sont concourantes. Pour cela on note I le point d'intersection des droites (EG) et (FH) et on introduit :
• l'homothétie h_1 de centre I qui transforme G en E.
• l'homothétie h_2 de centre I qui transforme F en H.

a. Déterminer l'image de la droite (CG) par l'homothétie h_1 puis par la composée $h_2 \circ h_1$.



b. Déterminer l'image de la droite (CG) par la composée $h_1 \circ h_2$.

c. Justifier l'égalité :

$$h_2 \circ h_1 = h_1 \circ h_2.$$

En déduire que la droite (AC) passe aussi par le point I.

2. On se propose ici de démontrer que la médiane issue du sommet A du triangle AEH est une hauteur du triangle ABD. On note O le milieu du segment [EH].

a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AO}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AH}$.

b. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{BD}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.

c. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{BD}$ et conclure.

3. Dans cette question, on étudie la similitude directe S qui transforme A en B et D en A.
On pose AB = 1 et AD = k $\quad (k > 0)$.

a. Déterminer l'angle et le rapport de la similitude S.

b. Déterminer l'image de la droite (BD), puis l'image de la droite (AO) , par cette similitude S.

c. En déduire que le point d'intersection Ω des droites (BD) et (AO) est le centre de la similitude S.

81. Amérique du Nord juin 2000

Dans le plan orienté, on considère un triangle direct OAB, rectangle et isocèle en O.
On a donc $(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On note R_{A} et R_{B} les rotations de centres respectifs A et B et de même angle $\dfrac{\pi}{2}$ et S_{O} la symétrie de centre O.
On place un point C, non situé sur la droite (AB), on trace les carrés BEDC et ACFG directs. On a donc $(\overrightarrow{\text{B}E}, \overrightarrow{\text{BC}}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ et $(\overrightarrow{\text{AC}}, \overrightarrow{\text{A}G}) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

1. **a.** Déterminer $\text{S}_{(\text{AO})} \circ S_{(\text{AB})}$ composée des réflexions d'axes (AB) et (AO).

   b. En écrivant R_{B} sous la forme d'une composée de deux réflexions, démontrer que $R_{\text{A}} \circ R_{\text{B}} = S_{\text{O}}$.

2. **a.** Déterminer l'image de E par $R_{\text{A}} \circ R_{\text{B}}$.

   b. En déduire que O est le milieu du segment [EG].

   c. On note R_F et R_D les rotations de centres respectifs F et D et de même angle.
   Étudier l'image de C par la transformation $R_F \circ S_{\text{O}} \circ R_D$. Déterminer la transformation $\text{R}_{\text{F}} \circ S_{\text{O}} \circ R_D$.

   d. Placer H le symétrique de D par rapport à O.
   Démontrer que $R_F(H) = D$. Démontrer que le triangle $F\text{O}D$ est rectangle et isocèle en O.

82. Antilles–Guyane juin 2000

Les points $A_0 = \text{O}$; A_1 ; … ; A_{20} sont les sommets d'un polygone régulier de centre A, à 21 côtés, de sens direct.
Les points $B_0 = \text{O}$; B_1 ; B_{14} sont les sommets d'un polygone régulier de centre B, à 15 côtés, de sens direct.
Soit r_A la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{21}$ et r_B la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{2\pi}{15}$.
On définit la suite (M_n) de points par :
- M_0 est l'un des points $A_0,\ A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_{20}$;
- pour tout entier naturel $n,\ M_{n+1} = r_\text{A}(M_n)$.
On définit la suite (P_n) de points par :
- P_0 est l'un des points $B_0,\ B_1,\ B_2,\ \ldots,\ B_{14}$ - pour tout entier naturel $n,\ P_{n+1} = r_\text{B}(P_n)$.
Le but de l'exercice est de déterminer, pour deux cas particuliers, l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant :

$$M_n = P_n = \text{O}.$$

1. Dans cette question, $M_0 = P_0 = \text{O}$.

a. Indiquer la position du point M_{2000} et celle du point P_{2000}.

b. Déterminer le plus petit entier naturel n non nul tel que $M_n = P_n = \text{O}$.
En déduire l'ensemble S.

2. Dans cette question, $M_0 = A_{19}$ et $P_0 = B_{10}$.
On considère l'équation $(E) : 7x - 5y = 1$ avec $x \in \mathbb{Z}$ et $y \in \mathbb{Z}$.

a. Déterminer une solution particulière $(a\ ;\ b)$ de (E).

b. Déterminer l'ensemble des solutions de (E).

c. En déduire l'ensemble S des entiers naturels n vérifiant $M_n = P_n = O$.

83. Asie juin 2000

1. Déterminer PGCD(2 688 ; 3 024).

2. Dans cette question, x et y sont deux entiers relatifs.

   a. Montrer que les équations (1) et (2) sont équivalentes
   (1) $2\,688x + 3\,024y = -\,3\,360$;
   (2) $8x + 9y = -\,10$.

   b. Vérifier que $(1\,;\,-\,2)$ est une solution particulière de l'équation (2).

   c. Déduire de ce qui précède les solutions de (2).

3. Soit $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace.
   On considère les plans (P) et (Q) d'équations respectives

$$x + 2y - z = -2 \quad \text{et} \quad 3x - y + 5z = 0.$$

   a. Montrer que (P) et (Q) se coupent suivant une droite (D).

   b. Montrer que les coordonnées des points de (D) vérifient l'équation (2).

   c. En déduire l'ensemble E des points de (D) dont les coordonnées sont des entiers relatifs.

84. Centres étrangers juin 2000

Dans le plan orienté, on considère un losange ABCD tel que

AB = BC = CD = DA = 5 et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{3}$.
On désigne par I, J, K, L et O les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA] et [BD].
On note (Δ) la médiatrice de [AB] et (Δ') la médiatrice de [CD].

1. Soit f l'isométrie du plan définie par $f(A) = B$, $f(B) = O$, $f(D) = C$.

a. Prouver que f est un antidéplacement.

b. Démontrer que s'il existe un point M invariant par f, alors M est équidistant des points A, B, C, D.

c. L'isométrie f admet-elle un point invariant ?

2. Soit σ la symétrie orthogonale d'axe (Δ) et r la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

a. Démontrer que $f = r \circ \sigma$.

b. A-t-on $f = \sigma \circ r$?

3. Soit s_1, la symétrie orthogonale d'axe (BC).

a. Déterminer l'axe de la symétrie orthogonale s_2, telle que $r = s_2 \circ s_1$.

b. En déduire que f peut s'écrire sous la forme $f = s_1 \circ t_1$, , où t_1 est une translation que l'on précisera.

4. Soit t_2 la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$; on note t_2^{-1} sa réciproque et on pose $g = t_2^{-1} \circ f$.

a. Déterminer $g(D)$, $g(I)$, $g(O)$. En déduire la nature précise de la transformation g.

b. Démontrer que $f = t_2 \circ g$. A-t-on $f = g \circ t_2$?

85. France juin 2000

Dans le plan orienté, on considère deux points A et B et le point E tel que $\overrightarrow{\text{AE}} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{\text{AB}}$.
Pour la figure, on prendra comme unité de longueur le centimètre et AB = 16.
Cette figure sera complétée au fur et à mesure.

Soit un point C, distinct de A, tel que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}C}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
La droite parallèle à (BC) passant par E coupe la droite (AC) en F.
On appelle I le milieu de [BC], J le milieu de [EF] et D le point d'intersection des droites (EC) et (BF).
On note h_{A} l'homothétie de centre A qui transforme B en E et h_D l'homothétie de centre D qui transforme E en C.

1. Déterminer $h_{\text{A}}(C)$ puis $h_D(F)$.

2. En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $h_D \circ h_{\text{A}}$ puis de $h_{\text{A}} \circ h_D$.

3. On appelle E' l'image de E par h_{A} et E'' l'image de E' par h_D Représenter E', puis construire E'' en justifiant la construction.

4. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $h_D \circ h_{\text{A}} \circ h_{\text{A}} \circ h_D$.

5. Montrer que le quadrilatère BECE'' est un parallélogramme.

6. On appelle (Δ) l'ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{\text{AB}}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}M}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.
   (Δ) est donc une demi-droite ouverte d'origine A.
   Pour la suite, les points A, B, E sont fixes et le point C décrit (Δ).
   Déterminer et construire le lieu géométrique $(\Delta)''$ du point E''.

86. La Réunion juin 2000

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 5, on considère les nombres

$$a = n^3 - n^2 - 12n \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 - 7n - 4.$$

1. Montrer, après factorisation, que a et b sont des entiers naturels divisibles par $n - 4$.

2. On pose $\alpha = 2n + 1$ et $\beta = n + 3$. On note d le PGCD de α et β.

   a. Établir une relation entre α et β indépendante de n.

   b. Démontrer que d est un diviseur de 5.

   c. Démontrer que les nombres α et β sont multiples de 5 si et seulement si $n - 2$ est multiple de 5.

3. Montrer que $2n + 1$ et n sont premiers entre eux.

4. **a.** Déterminer, suivant les valeurs de n et en fonction de n, le PGCD de a et b.

   b. Vérifier les résultats obtenus dans les cas particuliers $n = 11$ et $n = 12$.

87. Liban juin 2000

1. Le plan $(\mathscr{P})$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
Soit A et B dans ce plan d'affixes respectives $a = 1 + \text{i}$; $b = -4 - \text{i}$. Soit f la transformation du plan $(\mathscr{P})$ qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $\overrightarrow{\text{O}M'} = 2\overrightarrow{\text{A}M} + \overrightarrow{\text{B}M}$.

a. Exprimer z' en fonction de z.

b. Montrer que f admet un seul point invariant Ω dont on donnera l'affixe. En déduire que f est une homothétie dont on précisera le centre et le rapport.

2. On se place dans le cas où les coordonnées x et y de M sont des entiers naturels avec $1 \leqslant x \leqslant 8$ et $1 \leqslant y \leqslant 8$.
Les coordonnées $(x'\ ;\ y')$ de M' sont alors : $x' = 3x + 2$ et $y' = 3y - 1$.

a. On appelle G et H les ensembles des valeurs prises respectivement par x' et y'. Écrire la liste des éléments de G et H.

b. Montrer que $x' - y'$ est un multiple de 3.

c. Montrer que la somme et la différence de deux entiers quelconques ont même parité. On se propose de déterminer tous les couples $(x'\ ;\ y')$ de $G \times H$ tels que $m = x'^2 - y'^2$ soit un multiple non nul de 60.

d. Montrer que dans ces conditions, le nombre $x' - y'$ est un multiple de 6. Le nombre $x' - y'$ peut-il être un multiple de 30 ?

e. En déduire que, si $x'^2 - y'^2$ est un multiple non nul de 60, $x' + y'$ est multiple de 10 et utiliser cette condition pour trouver tous les couples $(x'\ ;\ y')$ qui conviennent.
En déduire les couples $(x\ ;\ y)$ correspondant aux couples $(x'\ ;\ y')$ trouvés.

88. Polynésie juin 2000

1. On cherche deux entiers relatifs x et y solutions de l'équation (1) $ax + by = 60$ (a et b entiers naturels donnés tels que $ab \neq 0$). On notera d le plus grand commun diviseur de a et b.

   a. On suppose que l'équation (1) a au moins une solution $(x_0\,;\ y_0)$. Montrer que d divise 60.

   b. On suppose que d divise 60. Prouver qu'il existe alors au moins une solution $(x_0\,;\ y_0)$ à l'équation (1).

2. On considère l'équation : (2) $\quad 24x + 36y = 60$. $\quad$ (x et y entiers relatifs).

   a. Donner le PGCD de 24 et 36 en justifiant brièvement. Simplifier l'équation (2).

   b. Trouver une solution évidente pour l'équation (2) et résoudre cette équation. On appellera S l'ensemble des couples $(x\,;\ y)$ solutions.

   c. Énumérer tous les couples $(x\,;\ y)$ solutions de (2) et tels que :

   $$-10 \leqslant x \leqslant 10.$$

   Donner parmi eux, ceux pour lesquels x et y sont multiples de 5.

   d. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique : 1 cm), représenter l'ensemble E des points M de coordonnées $(x\,;\ y)$ telles que :

   $$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+3t \\ y & = & 1-2t \end{array}\right. \quad t \in \mathbb{R}.$$

   e. Montrer que les points ayant pour coordonnées les solutions $(x; y)$ de l'équation (2) appartiennent à E.
   Comment peut-on caractériser S ?

89. Pondichéry juin 2000

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. **a.** Pour $1 \leqslant n \leqslant 6$, calculer les restes de la division euclidienne de $3n$ par 7.

   b. Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
   En déduire que 3^n et 3^{n+6} ont le même reste dans la division par 7.

   c. À l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de $3^{1\,000}$ par 7.

   d. De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n par 7, pour n quelconque ?

   e. En déduire que, pour tout entier naturel $n, 3^n$ est premier avec 7.

2. Soit $U_n = 3 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \sum_{i=0}^{i=n-1} 3^i$, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

   a. Montrer que si U^n est divisible par 7, alors $3^n - 1$ est divisible par 7.

   b. Réciproquement, montrer que si $3^n - 1$ est divisible par 7, alors U_n est divisible par 7.
   En déduire les valeurs de n telles que U_n soit divisible par 7.

90. Nouvelle–Calédonie décembre 1999

Soit n un entier naturel non nul, on considère les entiers suivants : $N = 9n + 1$ et $M = 9n - 1$.

1. On suppose que n est un entier pair. On pose $n = 2p$, avec p entier naturel non nul.

  a. Montrer que M et N sont des entiers impairs.

  b. En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N.

2. On suppose que n est un entier impair. On pose $n = 2p + 1$, avec p entier naturel.

  a. Montrer que M et N sont des entiers pairs.

  b. En remarquant que $N = M + 2$, déterminer le PGCD de M et N.

3. Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'entier $81n^2 - 1$.

  a. Exprimer l'entier $81n^2 - 1$ en fonction des entiers M et N.

  b. Démontrer que si n est pair alors $81n - 1$ est impair.

  c. Démontrer que $81n^2 - 1$ est divisible par 4 si et seulement si n est impair.

91. Amérique du Sud novembre 1999

On considère l'équation

$$(1) \quad : \quad 20b - 9c = 2.$$

où les inconnues b et c appartiennent à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.

1. a. Montrer que si le couple (b_0 ; c_0 d'entiers relatifs est une solution de l'équation (1), alors c_0 est un multiple de 2.

   b. On désigne par d le p.g.c.d. de $|b_0|$ et $|c_0|$. Quelles sont les valeurs possibles de d ?

2. Déterminer une solution particulière de l'équation (1), puis déterminer l'ensemble des solutions de cette équation.

3. Déterminer l'ensemble des solutions $(b\,;\,c)$ de (1) telles que p.g.c.d.$(b\,;\,c) = 2$.

4. Soit r un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. Le nombre entier naturel P, déterminé par $P = \alpha_n r^n + \alpha_{n-1} r^{n-1} + ... + \alpha_1 r + \alpha_0$, où $\alpha_n,\ \alpha_{n-1},\ ...,\alpha_1,\ \alpha_0$ sont des nombres entiers naturels vérifiant $0 < \alpha_n < r,\ 0 \leqslant \alpha_{n-1} < r, ...,\ 0 \leqslant,\ \alpha_0 < r$ est noté $\overline{\alpha_n\alpha_{n-1}\ldots\alpha_1\alpha_0}^{(r)}$; cette écriture est dite « écriture de P en base r ». Soit P un nombre entier naturel s'écrivant $\overline{ca5}^{(6)}$ et $\overline{bbaa}^{(4)}$ (en base six et en base quatre respectivement).
   Montrer que $a + 5$ est un multiple de 4 et en déduire les valeurs de a, puis de b et de c.
   Donner l'écriture de P dans le système décimal.

92. Antilles–Guyane septembre 1999

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$.
On donne le point A(6 ; 0) et le point A$'$(0 ; 2).
À tout point M de l'axe des abscisses différent de A on associe le point M' tel que :

$$\mathrm{A}M = \mathrm{A}'M' \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\mathrm{A}M},\ \overrightarrow{\mathrm{A}'M'}\right) = \frac{\pi}{2} \mod 2\pi.$$

On admet l'existence et l'unicité de M'.
On réalisera une figure avec, pour unité graphique 0,5 cm et pour cette figure, on prendra -4 pour abscisse de M.

1. Soit M un point de l'axe des abscisses différent de A.

   a. Placer le point M' sur la figure.

   b. Pour cette question on pourra donner une démonstration purement géométrique ou utiliser les nombres complexes.
   Démontrer qu'il existe une unique rotation, dont on précisera le centre, noté I et l'angle, qui transforme A en A$'$ et M en M'.
   Placer I sur la figure.

   c. Démontrer que la médiatrice de $[MM']$ passe par I.

2. On veut déterminer et construire les couples de points $(M,\ M')$ vérifiant la condition supplémentaire $MM' = 20$.

   a. Calculer IM et démontrer qu'il existe deux couples solutions : $(M_1,\ M'_1)$ et $(M_2,\ M'_2)$.

   b. Placer ces quatre points sur la figure.

93. France septembre 1999

Soit le repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ du plan complexe. Les points A, B et C sont définis par leurs affixes respectives :

$$z_{\mathrm{A}} = 3 - \mathrm{i}\sqrt{3}\ ;\ z_{\mathrm{B}} = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}\ ;\ z_{\mathrm{C}} = 2 + \sqrt{3} + 3\mathrm{i}.$$

1. Faire la figure en choisissant pour unité graphique 2 cm. (On placera l'origine sur la gauche de la feuille).

2. Prouver que OAB est un triangle équilatéral direct. Soit G le centre de gravité du triangle OAB. Déterminer l'affixe z_{G} de G.
Dans la suite de l'exercice, on étudie deux isométries transformant [OA] en [GC].

3. Soit a et b deux nombres complexes et R l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = az + b$.

  a. Déterminer a et b pour que R(O) = G et R(A) = C.

  b. Prouver que R est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

  c. Prouver que les droites (OA) et (GC) sont perpendiculaires. Que peut-on dire des points G, B et C ?

  d. Construire, en justifiant la construction, l'image du triangle OAB par R.

4. Soit a' et b' deux nombres complexes et f l'application qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = a'\overline{z} + b'$.

  a. Déterminer a' et b' pour que $f(\mathrm{O}) = \mathrm{G}$ et $f(\mathrm{A}) = \mathrm{C}$.

  b. Soit I le milieu du segment [OG]. Déterminer le point $f(\mathrm{I})$. f est-elle une réflexion ?

  c. Construire en justifiant la construction, l'image du triangle OAB par f.

94. Sportifs de haut–niveau septembre 1999

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. (unité graphique : 1 cm) .

1. On note A, B et C les points d'affixes respectives 2i, -1 + 4i et 5 + 2i.
On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{BC}$, la symétrie S d'axe (AB) et la transformation $f = t \circ$ S.
On désigne par A′ et B′ les images respectives de A et B par f. Calculer les affixes de A′ et B′ et placer les points A, B, C, A′ et B′ sur une figure.

2. On rappelle que l'écriture complexe d'un antidéplacement est de la forme $z' = a\overline{z} + b$ où a et b sont deux nombres complexes et $|a| = 1$.
À tout point M d'affixe z, f associe le point M' d'affixe z'.
Justifier que f est un antidéplacement et démontrer que :

$$z' = \frac{-3-4i}{5}\overline{z} + \frac{38-6i}{5}.$$

3. Déterminer l'ensemble des points invariants par f. La transformation f est-elle une symétrie ?

4. On appelle D le point d'affixe 3 + 6i, Δ la médiatrice de [BD] et S′ la symétrie d'axe Δ.

a. Montrer que les droites Δ et (AB) sont parallèles. Déterminer S $\circ$ S′.

b. Montrer que $f \circ S'$ est la translation, notée t', de vecteur $\overrightarrow{DC}$.
En déduire que $f = t' \circ S'$.

95. Amérique du Nord juin 1999

Les trois parties I, II, III peuvent être traitées indépendamment les unes des autres.

Partie I

Soit $E = \{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10\}$.

Déterminer les paires $\{a ; b\}$ d'entiers distincts de E tels que le reste de la division euclidienne de ab par 11 soit 1.

Partie II

1. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
2. L'entier $(n-1)!+1$ est-il pair ?
3. L'entier $(n-1)!+1$ est-il divisible par un entier naturel pair ?
4. Prouver que l'entier $(15-1)!+1$ n'est pas divisible par 15.
5. L'entier $(11-1)!+1$ est-il divisible par 11 ?

Partie III

Soit p un entier naturel non premier ($p \geqslant 2$).

1. Prouver que p admet un diviseur q ($1 < q < p$) qui divise $(p-1)$.
2. L'entier q divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?
3. L'entier p divise-t-il l'entier $(p-1)!+1$?

96. Antilles–Guyane juin 1999

Dans le plan muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on donne le point A(12 ; 18).
On désigne par B un point de l'axe $\left(O ; \vec{\imath}\right)$ et par C un point de l'axe $\left(0 ; \vec{\jmath}\right)$ tels que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.
On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1. Démontrer que le couple $(x ; y)$ est solution de l'équation :

$$\text{(E)}\ \ 2x+3y=78.$$

2. On se propose de trouver tous les couples (B, C) de points ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs.

a. Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble $\mathbb{Z}$ des nombres entiers relatifs.

b. À partir de la définition de B et C, trouver une solution particulière $(x_0 ; y_0)$ de (E) avec x_0 et y_0 appartenant à $\mathbb{Z}$.

c. Démontrer qu'un couple $(x ; y)$ d'entiers relatifs est solution de l'équation (E) si, et seulement si, il est de la forme $(12+3k ; 18-2k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.

d. Combien y a-t-il de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs, tels que :

$$-6 \leqslant x \leqslant 21 \text{ et } -5 \leqslant y \leqslant 14\ ?$$

97. Asie juin 1999

1. On considère l'équation $(E)\ :\ 8x+5y=1$, où $(x\ ;\ y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

    a. Donner une solution particulière de l'équation (E).

    b. Résoudre l'équation (E).

2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a\,;\ b)$ de nombres entiers vérifiant : $\left\{\begin{array}{rcl} N & = & 8a+1 \\ N & = & 5b+2. \end{array}\right.$

    a. Montrer que le couple $(a\ ;\ b)$ est solution de (E).

    b. Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3. a. Résoudre l'équation $8x+5y=100$, où $(x\ ;\ y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

    b. Au VIII$^{\text{e}}$ siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

98. Centres étrangers juin 1999

Le but de cet exercice est d'utiliser les solutions d'une équation à deux inconnues entières pour résoudre un problème dans l'espace.

1. **a.** Déterminer un couple $(x_0\ ;\ y_0)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation :

$$48x+35y=1.$$

   (On pourra utiliser l'algorithme d'Euclide pour la recherche du PGCD de deux nombres).

   b. Déduire de **a.** tous les couples d'entiers relatifs $(x\ ;\ y)$ solutions de cette équation.

2. L'espace étant rapporté à un repère orthonormal, on donne le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées (48 ; 35 ; 24) et le point A de coordonnées $(-11\ ;\ 35\ ;\ -13)$.

   a. Préciser la nature et donner une équation cartésienne de l' ensemble (Π) des points M de l'espace, de coordonnées $(x\ ;\ y\ ;\ z)$ tels que $\vec{u}.\overrightarrow{\text{AM}}=0$.

   b. Soit (D) la droite intersection de (Π) avec le plan d'équation $z=16$.

   Déterminer tous les points de (D) dont les coordonnées sont entières et appartiennent à l'intervalle [- 100 ; 100].

   En déduire les coordonnées du point de (D), coordonnées entières, situé le plus près de l'origine.

99. France juin 1999

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres

$$a_n = 4 \times 10^n - 1,\ b_n = 2 \times 10^n - 1 \text{ et} c_n = 2 \times 10^n + 1.$$

1. **a.** Calculer $a_1,\ b_1,\ c_1,\ a_2,\ b_2,\ c_2,\ a_3,\ b_3$ et c_3.

   b. Combien les écritures décimales des nombres a_n et c_n ont-elles de chiffres ? Montrer que a_n et c_n sont divisibles par 3.

   c. Montrer, en utilisant la liste des nombres premiers inférieurs à 100 donnée ci-dessous, que b_3 est premier.

   d. Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n,\ b_n \times c_n = a_{2n}$.
   En déduire la décomposition en produit de facteurs premiers de a_6.

   e. Montrer que PGCD $(b_n,\ c_n)$ = PGCD $(c_n,\ 2)$.
   En déduire que b_n et c_n sont premiers entre eux.

2. On considère l'équation :

$$(1) \qquad b_3 x + c_3 y = 1$$

   d'inconnues les entiers relatifs x et y.

   a. Justifier le fait que (1) possède au moins une solution.

   b. Appliquer l'algorithme d'Euclide aux nombres c_3 et b_3 ; en déduire une solution particulière de (1).

   c. Résoudre l'équation (1).

Liste des nombres premiers inférieurs à 100 :
2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; 29 ; 31 ; 37 ; 41 ; 43 ; 47 ; 53 ; 59 ; 61 ; 67 ; 71 ; 73 ; 79 ; 83 ; 89 ; 97.

100. Liban juin 1999

Le nombre n est un entier naturel non nul. On pose : $a = 4n + 3,\ b = 5n + 2$ et on note d le PGCD de a et b.

1. Donner la valeur de d dans les trois cas suivants : $n = 1,\ n = 11,\ n = 15$.
2. Calculer $5a - 4b$ et en déduire les valeurs possibles de d.
3. **a.** Déterminer les entiers naturels n et k tels que $4n + 3 = 7k$.

   b. Déterminer les entiers naturels n et k tels que $5n + 2 = 7k$.

4. Soit r le reste de la division euclidienne de n par 7.
   Déduire des questions précédentes la valeur de r pour laquelle d vaut 7.
   Pour quelles valeurs de $r,\ d$ est-il égal à 1 ?

101. Pondichéry juin1999

Partie A

On admet que 1999 est un nombre premier. Déterminer l'ensemble des couples $(a~;~b)$ d'entiers naturels admettant pour somme 11 994 et pour PGCD 1 999.

Partie B

On considère l'équation (E) d'inconnue n appartenant à $\mathbb{N}$:

$$(E) : n^2 - Sn + 11\,994 = 0 \text{ où } S \text{ est un entier naturel.}$$

On s'intéresse à des valeurs de S telles que (E) admette deux solutions dans $\mathbb{N}$.

1. Peut-on déterminer un entier S tel que 3 soit solution de (E) ?
   Si oui, préciser la deuxième solution.
2. Peut-on déterminer un entier S tel que 5 soit solution de (E) ?
3. Montrer que tout entier n solution de (E) est un diviseur de 11 994.
   En déduire toutes les valeurs possibles de S telles que (E) admette deux solutions entières.

Partie C

Comment montrerait-on que 1999 est un nombre premier ?
Préciser le raisonnement employé.
La liste de tous les entiers premiers inférieurs à 100 est précisée ci-dessous :
2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97.

102. Antilles–Guyane septembre 1998

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure les points introduits dans le texte (unité graphique : 2 cm.)

1. **a.** Résoudre l'équation (E) : $z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0$.

   b. On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + \text{i}$ et $z_2 = \sqrt{3}$ - i et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Déterminer le module et l'argument de z_1 et de z_2 ; placer M et N sur la figure.

   c. Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{u}$. Placer P et Q sur la figure. Montrer que MNPQ est un carré.

2. Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.

   Placer ces points sur la figure.

   Calculer les affixes de R et de S. Montrer que S appartient au segment [MN].

3. On pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$.

   a. Montrer que $1 + \alpha^2 = 4\alpha$ et $1 - \alpha^2 = 2\alpha\sqrt{3}$.

   b. Exprimer les affixes Z de $\overrightarrow{\text{PR}}$ et Z' de $\overrightarrow{\text{PS}}$ en fonction de α.

   c. Montrer que $|Z| = |Z'|$ et $\dfrac{Z}{Z'} = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$.

   d. Déduire des questions précédentes la nature du triangle PRS.

Livret réalisé grâce à Cocoa booklet. Merci à son auteur Fabien Cornus.
http ://www.iconus.ch/fabien/cocoabooklet/