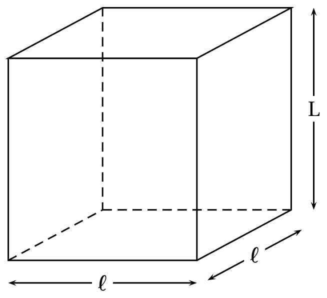
À rendre le mercredi 17 janvier 2007

EXERCICE I

Réservé aux élèves suivant l'enseignement de spécialité

1. Soit B une boîte en forme de pavé droit de hauteur L, à base carrée de côté ℓ, où ℓ et L sont des entiers naturels non nuls tels que $\ell < \mathrm{L}$.



On veut remplir la boîte B avec des cubes tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul (*les cubes devant remplir complètement la boîte B sans laisser d'espace vide*).

a. Dans cette question, $\ell = 882$ et $\mathrm{L} = 945$.
Quelle est la plus grande valeur possible pour a ?
Quelles sont les valeurs possibles pour a ?

b. Dans cette question, le volume de la boîte B est $v = 77\,760$. On sait que, pour remplir la boîte B, la plus grande valeur possible de a est 12.
Montrer qu'il y a exactement deux boîtes B possibles, dont on donnera les dimensions.

2. On veut remplir une caisse cubique C, dont l'arête c est un entier naturel non nul, avec des boîtes B toutes identiques telles que décrites dans la question **1.** (*Les boîtes B, empilées verticalement, doivent remplir complètement la caisse C sans laisser d'espace vide*).

a. Dans cette question, $\ell = 882$ et $\mathrm{L} = 945$.
Quelle est la plus petite arête c possible pour la caisse C ?
Quel est l'ensemble de toutes les valeurs possibles pour l'arête c ?

b. Dans cette question, le volume de la boîte B est $15\,435$.
On sait que la plus petite arête possible pour la caisse C est 105.
Quelles sont les dimensions ℓ et L de la boîte B ?

EXERCICE II

1. On considère l'équation

$$8x + 5y = 1 \qquad \text{(E)}$$

où $(x\,;\,y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

a. Donner une solution particulière de l'équation (E).

b. Résoudre l'équation (E).

2. Soit N un nombre naturel tel qu'il existe un couple $(a\,;\,b)$ de nombres entiers vérifiant : $\begin{cases} \mathrm{N} = 8a+1 \\ \mathrm{N} = 5b+2 \end{cases}$.

a. Montrer que le couple $(a\,;-b)$ est solution de (E).

b. Quel est le reste, dans la division de N par 40 ?

3. **a.** Résoudre l'équation $8x + 5y = 100$, où $(x\,;\,y)$ est un couple de nombres entiers relatifs.

b. Au VIII$^{\text{e}}$ siècle, un groupe composé d'hommes et de femmes a dépensé 100 pièces de monnaie dans une auberge. Les hommes ont dépensé 8 pièces chacun et les femmes 5 pièces chacune. Combien pouvait-il y avoir d'hommes et de femmes dans le groupe ?

4. *Question indépendante :* Déterminer, en utilisant l'algorithme d'Euclide le plus grand diviseur commun de 323 et 799. En déduire le plus petit multiple commun de 323 et 799.