T3 Wallonie

TI Nspire

Document de Formation

Version PC

TI-Nspire
Le tout en un des mathématiques

Suites numériques
La loi de Verhulst

Application « Calculs »

Application « Graphiques »

Application « Tableur et listes »

FR

Formations 2010
EE BX II

Objectifs	***Introduction d'une suite dans la calculatrice***
	Visualiser une suite
	Convergence d'une suite
	Calcul de la somme des termes d'une suite
	Applications :
	    La tour de Pise
	    La loi de Verhulst

Références :	***Science et vie junior : spécial math(01/1999)***

1. Comment entrer une suite dans la calculatrice?

Application « Calculs »

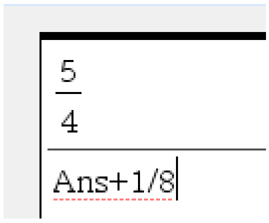
a) Suite arithmétique.

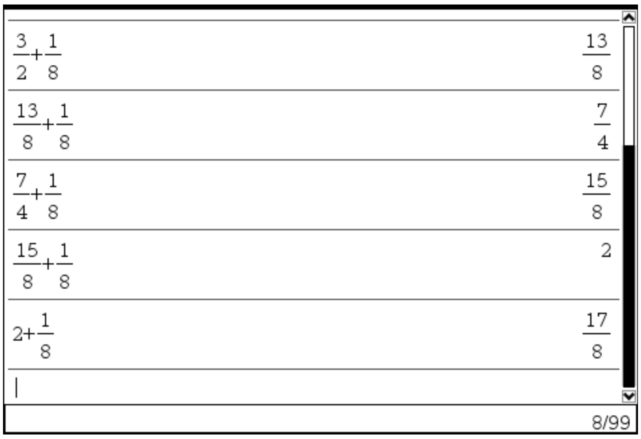
Soit une *s.a.* dont $u_1 = \dfrac{5}{4}$ *et* $r = \dfrac{1}{8}$

- Introduire 5/4 suivi de *« enter »* dans une fenêtre de calculs.

- Taper ensuite « $+1/8$ » (Ans signifie "answer") suivi de *« enter »*, *« enter »*, …

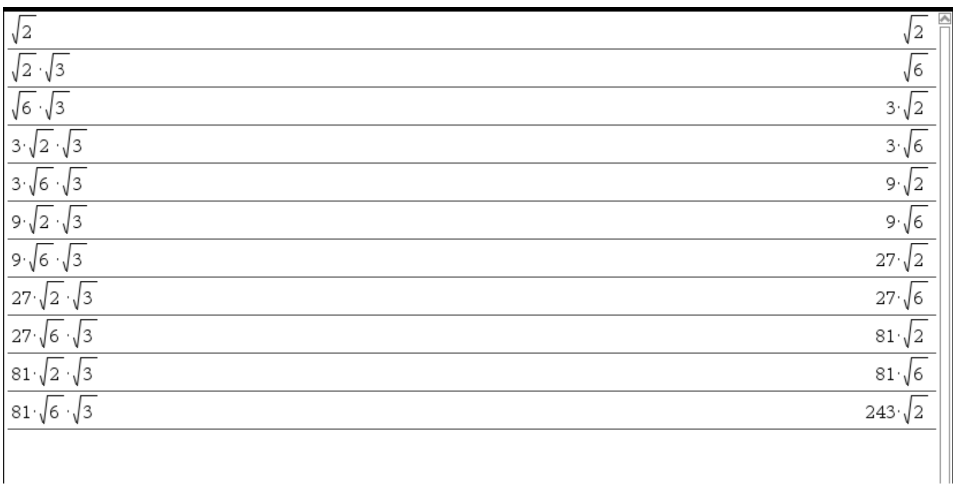
- Les termes de la suite s'affichent mais on ne sait pas à quel rang on se situe.
De plus, on ne sait pas utiliser les différents termes de la suite.





b) Suite géométrique.

Soit une s.g. dont $u_1 = \sqrt{2}$ *et* $q = \sqrt{3}$



c) Suite définie explicitement.

Soit la suite $(u_n) = \dfrac{3n}{n+1}; n \geq 1$

Pour introduire la suite

1) En utilisant « : = »

2) En utilisant la commande *« seq( ) »* que l'on trouve dans le CATALOG à la lettre S.
Cette commande permet d'afficher plusieurs termes de la suite.
On peut ensuite stocker ces termes dans une liste en utilisant le symbole « → » qui se trouve dans SYMBOLES.

©Introduire une suite définie explicitement

$u(n):=\dfrac{3\cdot n}{n+1}$	*Done*
$u(45)$	$\dfrac{135}{46}$

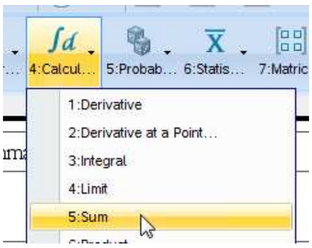
©En utilisant la commande "seq( )"

$\text{seq}(u(n),n,1,10)$	$\left\{\dfrac{3}{2},2,\dfrac{9}{4},\dfrac{12}{5},\dfrac{5}{2},\dfrac{18}{7},\dfrac{21}{8},\dfrac{8}{3},\dfrac{27}{10},\dfrac{30}{11}\right\}$

©Créer une liste de nombres

$\left\{\dfrac{3}{2},2,\dfrac{9}{4},\dfrac{12}{5},\dfrac{5}{2},\dfrac{18}{7},\dfrac{21}{8},\dfrac{8}{3},\dfrac{27}{10},\dfrac{30}{11}\right\}\rightarrow l1$	$\left\{\dfrac{3}{2},2,\dfrac{9}{4},\dfrac{12}{5},\dfrac{5}{2},\dfrac{18}{7},\dfrac{21}{8},\dfrac{8}{3},\dfrac{27}{10},\dfrac{30}{11}\right\}$
$l1^2$	$\left\{\dfrac{9}{4},4,\dfrac{81}{16},\dfrac{144}{25},\dfrac{25}{4},\dfrac{324}{49},\dfrac{441}{64},\dfrac{64}{9},\dfrac{729}{100},\dfrac{900}{121}\right\}$

Pour calculer la somme des termes



1) En utilisant la commande *« sum( ) »* que l'on trouve dans le CATALOG à la lettre S.
2) En utilisant le symbole *sigma*, que l'on trouve dans l'icône 4.
3) La commande *« cumulativeSum( ) »* se trouve dans le CATALOG.

©Calculer la somme des termes d'une suite

$\text{sum}(l1)$	$\dfrac{221209}{9240}$
$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}(u(n))$	$\dfrac{221209}{9240}$

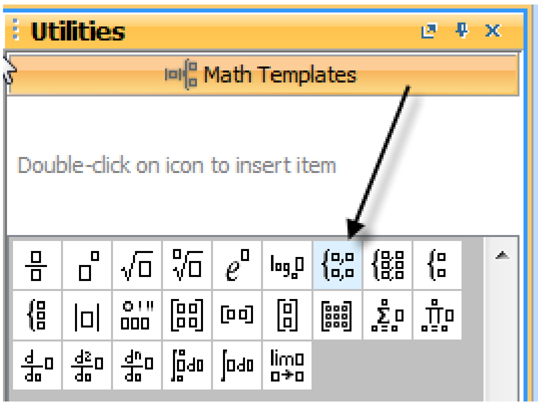
©Calculer les sommes cumulées

$\text{cumulativeSum}(l1)$	$\left\{\dfrac{3}{2},\dfrac{7}{2},\dfrac{23}{4},\dfrac{163}{20},\dfrac{213}{20},\dfrac{1851}{140},\dfrac{4437}{280},\dfrac{15551}{840},\dfrac{17819}{840},\dfrac{221209}{9240}\right\}$

d) Suite définie par récurrence.

Soit la suite $(u_n) = \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_n = 2.u_{n-1} + 5 \; ; \; n > 1 \end{cases}$

Il faut utiliser le modèle mathématique :



$u(n):=\begin{cases} 4, & n=1 \\ 2\cdot u(n-1)+5, & n>1 \end{cases}$	*Done*
$u(1)$	4
$u(2)$	13
$u(10)$	4603
$\text{seq}(u(n),n,1,10)$	$\{4,13,31,67,139,283,571,1147,2299,4603\}$
$\{4,13,31,67,139,283,571,1147,2299,4603\} \rightarrow l2$	$\{4,13,31,67,139,283,571,1147,2299,4603\}$
$\text{sum}(l2)$	9157

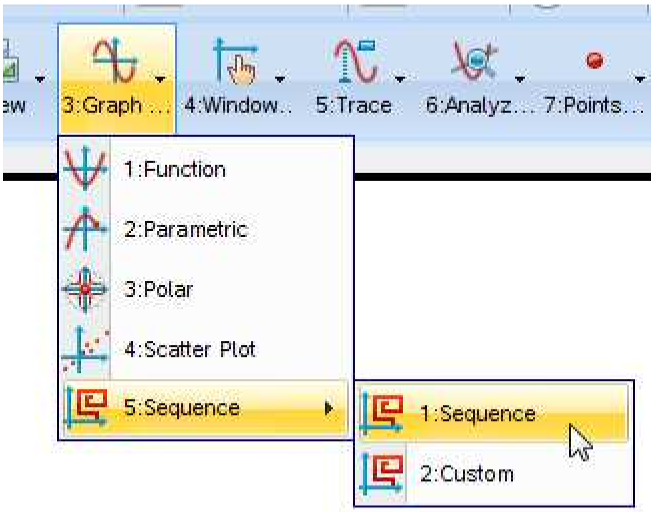
2. Comment représenter les termes d'une suite?

Application « Graphiques »

a) Dans un graphe (n;u(n)).

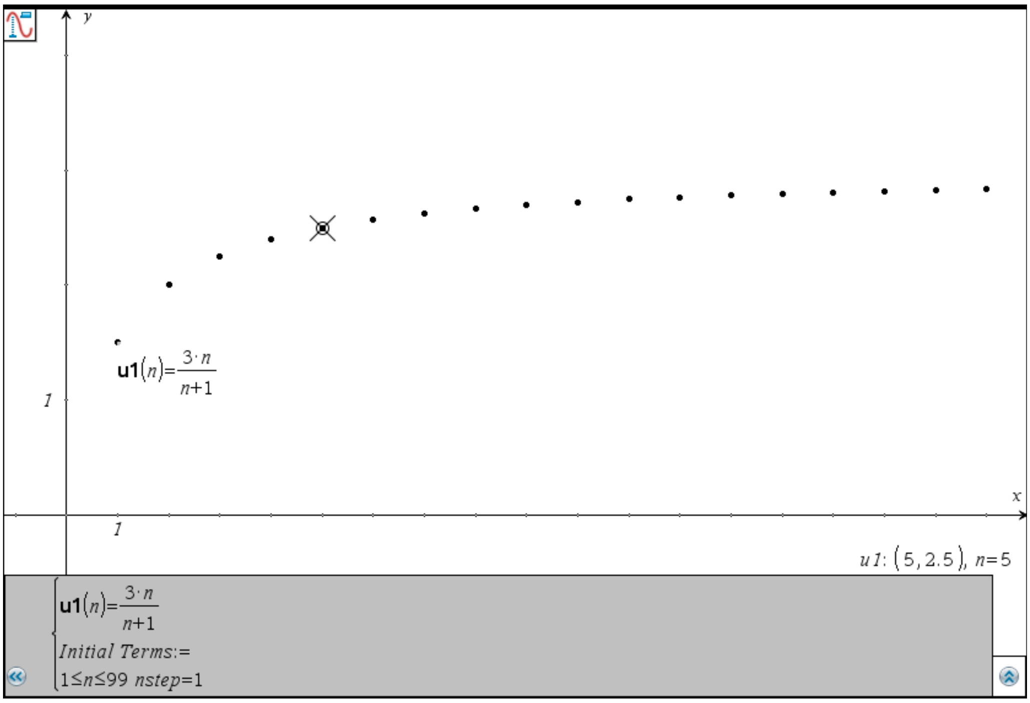
Le numéro du terme *n* sera mis en abscisse et la valeur du terme correspondant sera placée en ordonnée.

Soit la suite $(u_n) = \dfrac{3n}{n+1}; n \geq 1$

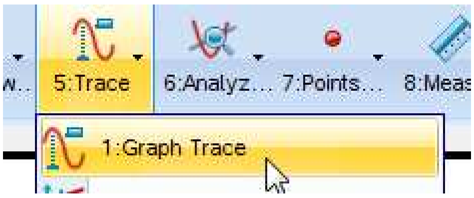


Choisir - 3 : Graphiques – 5 : Suite – 1 : Suite

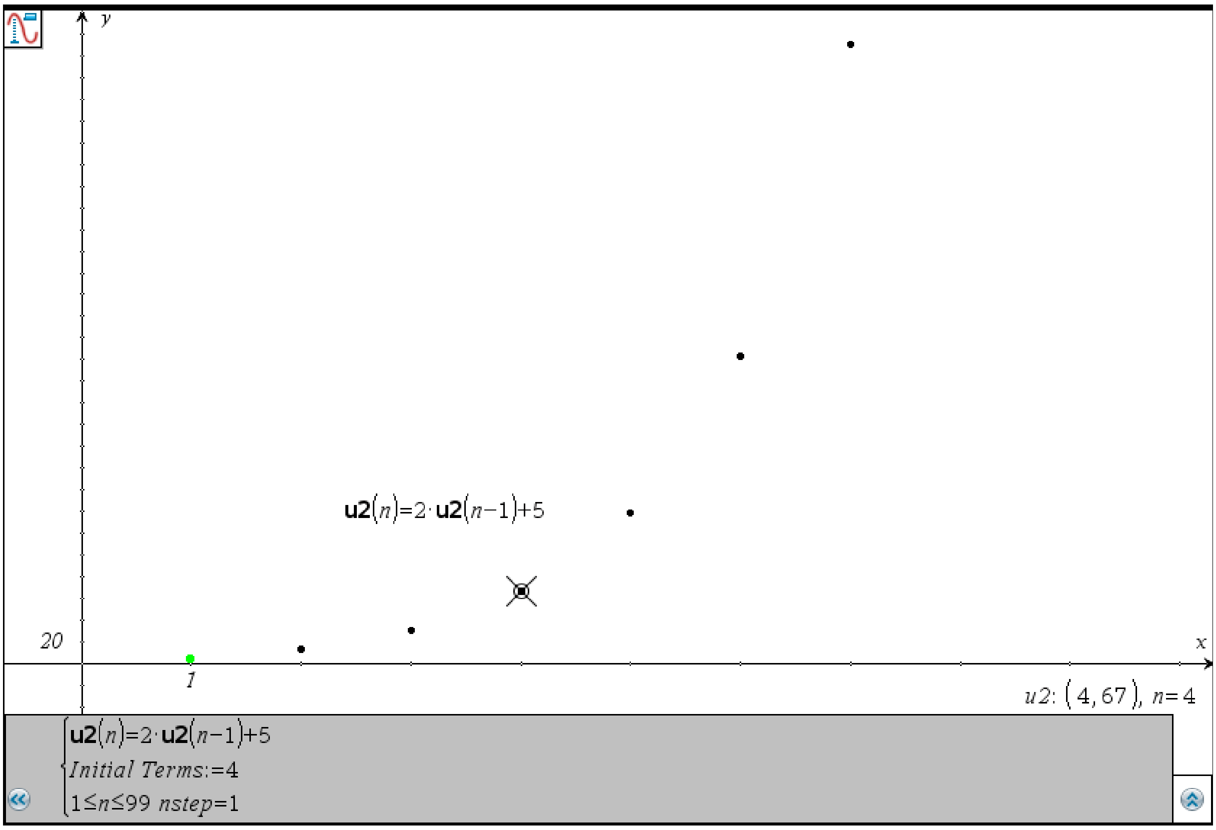
Compléter la ligne de saisie « u1(n) = »



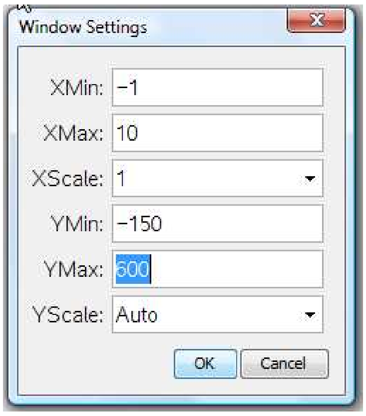
L'outil « *Trace* » permet de voir les coordonnées des points affichés.



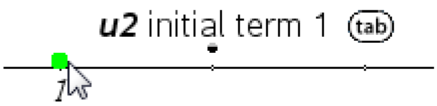
Soit la suite $(u_n) = \begin{cases} u_1 = 4 \\ u_n = 2.u_{n-1} + 5 \; ; \; n > 1 \end{cases}$



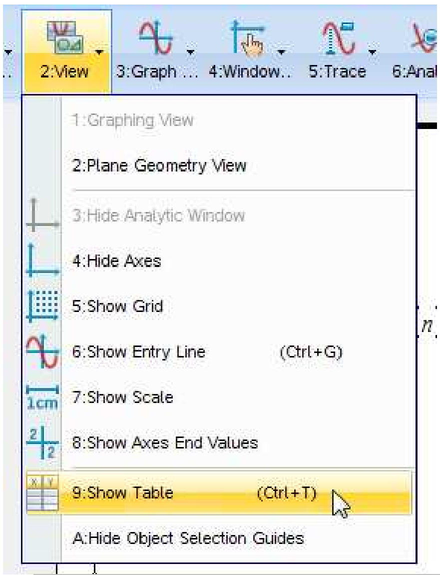
Pour visualiser le termes de la suite, il faut préalablement changer la fenêtre graphique :
Par exemple : $x \in [-1,10]$ *et* $y \in [-150,600]$

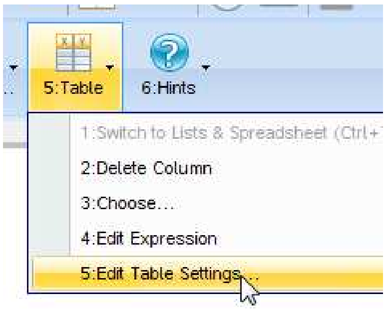


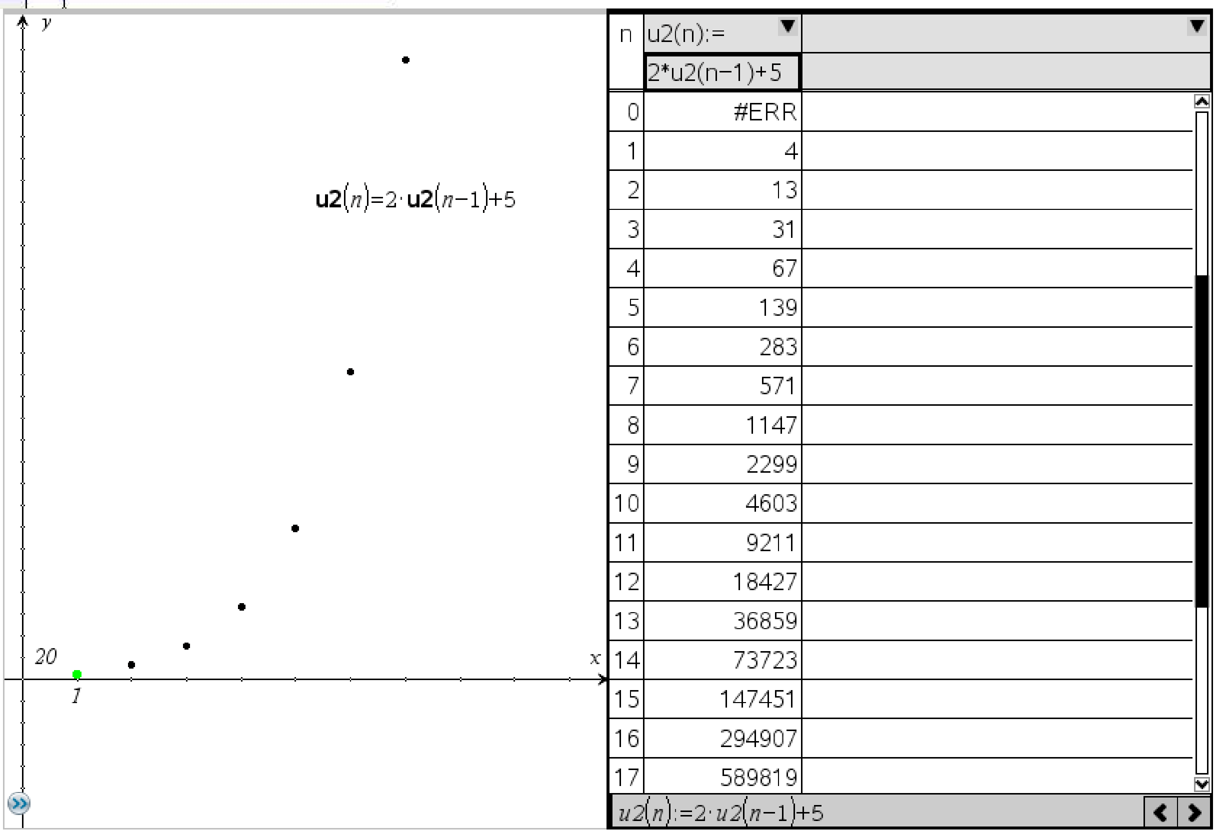
Remarque : le premier terme de la suite est représenté dans une autre couleur que les autres termes.
En fait, on peut lui donner une autre valeur, en le capturant dans la fenêtre graphique.



Pour afficher la table des valeurs et changer les réglages:





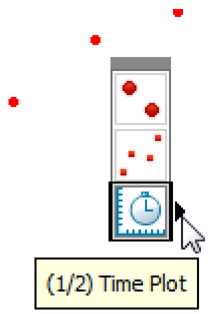


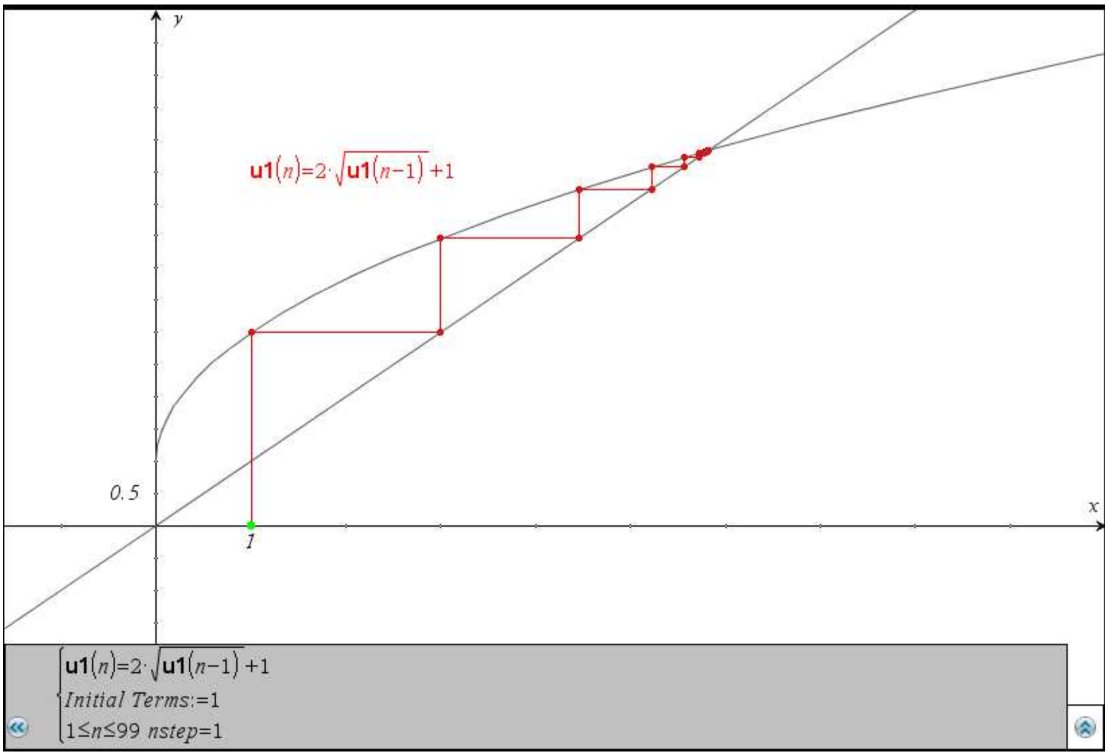
n	u2(n):=
	2*u2(n−1)+5
0	#ERR
1	4
2	13
3	31
4	67
5	139
6	283
7	571
8	1147
9	2299
10	4603
11	9211
12	18427
13	36859
14	73723
15	147451
16	294907
17	589819

b) Dans un graphe en toile d'araignée-en escargot-en escaliers.

Soit la suite $(u_n)=\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_n = 2\sqrt{u_{n-1}}+1 \end{cases}$

Représenter la suite dans une fenêtre de graphiques.
Ensuite faire un click droit sur un point du nuage
et choisir - 3 : Attributs
3ème icône, choisir Web Plot





$u_1 = 1$

$u_2 = 2\sqrt{u_1}+1$

$u_3 = 2\sqrt{u_2}+1$

$u_4 = 2\sqrt{u_3}+1$

…………

La calculatrice représente les graphes des fonctions $y = 2\sqrt{x}+1$ *et* $y = x$.

3. Application : la tour de Pise

« On laisse tomber du haut de la tour de Pise (63 mètres) une balle en caoutchouc. A chaque rebond, celle-ci rebondit d'un cinquième de sa hauteur. On demande
a) la hauteur atteinte après 1 rebond, 2 rebonds, 3 rebonds,…
b) la « distance » totale parcourue par la balle. »

Résolution :

a) Soit $u_0 = 63$ la hauteur initiale avant la chute.

Notons u_1 la hauteur atteint par la balle après le premier rebond $\Rightarrow u_1 = 63.\frac{1}{5}$

$\Rightarrow u_2 = 63.\frac{1}{5}.\frac{1}{5} = 63.\left(\frac{1}{5}\right)^2$; … ; $u_n = 63.\left(\frac{1}{5}\right)^n$

C'est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$.

$u(n):=63\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^n$	*Done*
seq(u(n),n,0,8)	{63.,12.6,2.52,0.504,0.1008,0.02016,0.004032,8.064E-4,1.6128E-4}

b) Distance totale parcourue par la balle.

On note d_i la distance parcourue après i rebonds. On fabrique une nouvelle suite.

Distance parcourue

après 1 rebond : $d_1 = 63 + u_1 + u_1 = 63 + 2.u_1 = 2.(63 + u_1) - 63$
après 2 rebonds : $d_2 = 63 + 2.u_1 + 2.u_2 = 2.(63 + u_1 + u_2) - 63$
………………..
après n rebonds : $d_n = 2.(63 + u_1 + u_2 + ... + u_n) - 63$

En fait, on voit apparaître dans les parenthèses les *sommes cumulées* des termes de la suite u(n).

Utilisons le tableur pour calculer d_i

Ouvrir une fenêtre du tableur.
Nous pouvons travailler comme avec Excel.
On introduit 63 dans la première cellule.
Dans la deuxième cellule : « $=a1\cdot\frac{1}{5}$ ». Ensuite, on tire le coin inférieur droit de la cellule.
Pour obtenir la colonne des d_i, se placer dans la cellule B2 et introduire 63.
Dans la cellule B2 : « $=b1+a2$ ». Et tirer le coin inférieur droit.

Pour obtenir la distance parcourue par la balle après *n* rebonds, placer le curseur sur la cellule grisée de la troisième colonne, et taper « $2*b-63$ ».
Puisque *b* peut être une variable ou une colonne, le logiciel la note dans ce cas-ci : *b* [ ]

On peut aussi utiliser la commande *CumulativeSum( )*.

	A un	B dn	C	D	E	F	G
◆			=2*b[]−63	=cumulativesum(a[])*2−63			
1	63.	63.	63.	63.			
2	12.6	75.6	88.2	88.2			
3	2.52	78.12	93.24	93.24			
4	0.504	78.624	94.248	94.248			
5	0.1008	78.7248	94.4496	94.4496			
6	0.02016	78.74496	94.48992	94.48992			
7	0.004032	78.748992	94.497984	94.497984			
8	8.064E-4	78.7497984	94.4995968	94.4995968			
9	1.6128E-4	78.74995968	94.49991936	94.49991936			
10	3.2256E-5	78.749991936	94.499983872	94.499983872			
11	6.4512E-6	78.7499983872	94.4999967744	94.4999967744			
12	1.29024E-6	78.7499996774	94.4999993549	94.4999993549			
13	2.58048E-7	78.7499999355	94.499999871	94.499999871			
14	5.16096E-8	78.7499999871	94.4999999742	94.4999999742			
15	1.032192E-8	78.7499999974	94.4999999948	94.4999999948			
16							
17							

B2 =b1+a2

4. Application : la loi de Verhulst

Proies et prédateurs.

« Pourquoi, telle année, les sauterelles, les méduses, les souris et autres pucerons se mettent à pulluler ? Et pourquoi l'année d'après, tout redevient paisible ?
C'est au siècle dernier que le mathématicien belge, Pierre-François Verhulst, a levé une partie du secret des populations animales. »

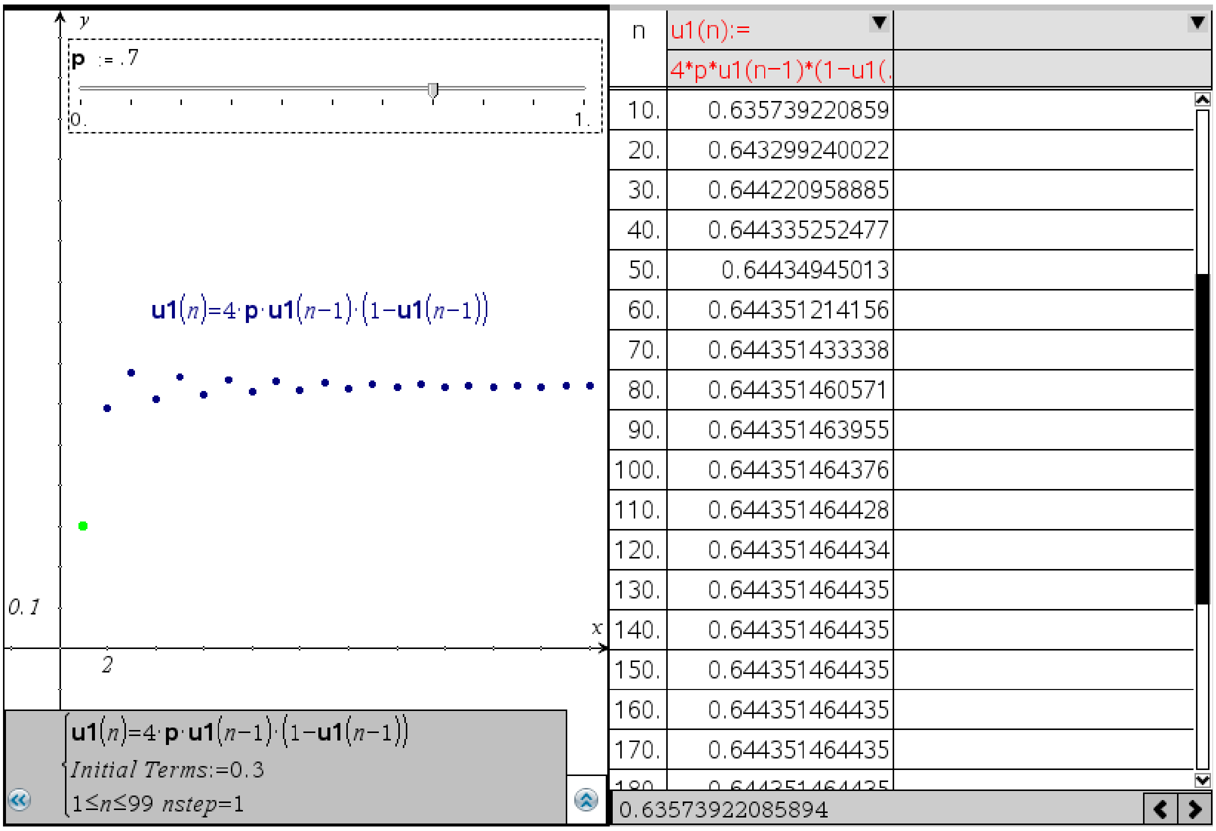
Nous allons nous intéresser à un cas simple : dans un grand jardin peuplé de pucerons, lâchons des coccinelles.

La loi de Verhulst est la suivante : $u_n = 4\,p.u_{n-1}.(1-u_{n-1})$ où u_{n-1} est la densité de population de coccinelles une certaine année et u_n la densité de population l'année suivante. Cette densité est le rapport du nombre de coccinelles par rapport à la taille maximale de la population. C'est donc un nombre compris entre 0 et 1.
Le paramètre p dépendra de certaines circonstances, par exemple la vitesse de reproduction des prédateurs relativement aux proies.

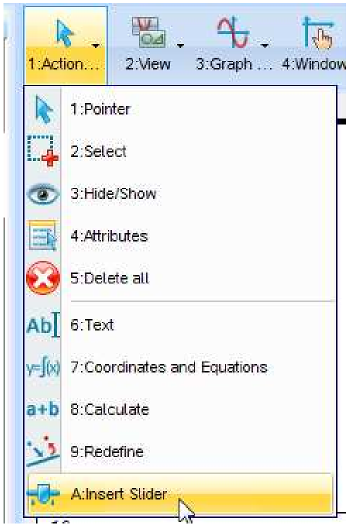
Nous allons étudier cette loi pour différentes valeurs du paramètre p.

- **1^er cas : p = 0,7**

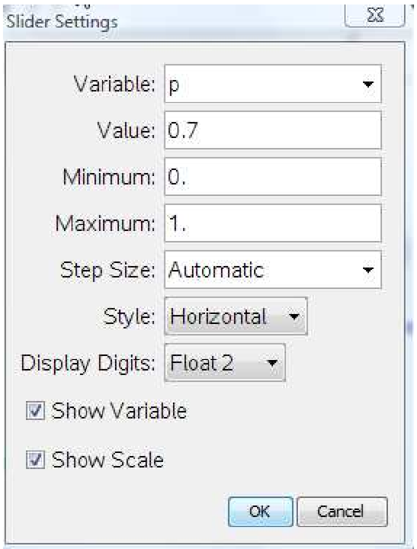
La suite est $u_n = 2{,}8.u_{n-1}.(1-u_{n-1})$ et nous supposons une population actuelle de 0,3 c'est-à-dire 300 coccinelles pour une population maximale de 1000.
Utilisons la calculatrice pour observer l'évolution du nombre des bêtes à bon Dieu.



Ouvrir une fenêtre graphique.
Introduire la suite comme indiqué.
Pour créer le curseur : -1 : Action – A : Insérer un curseur

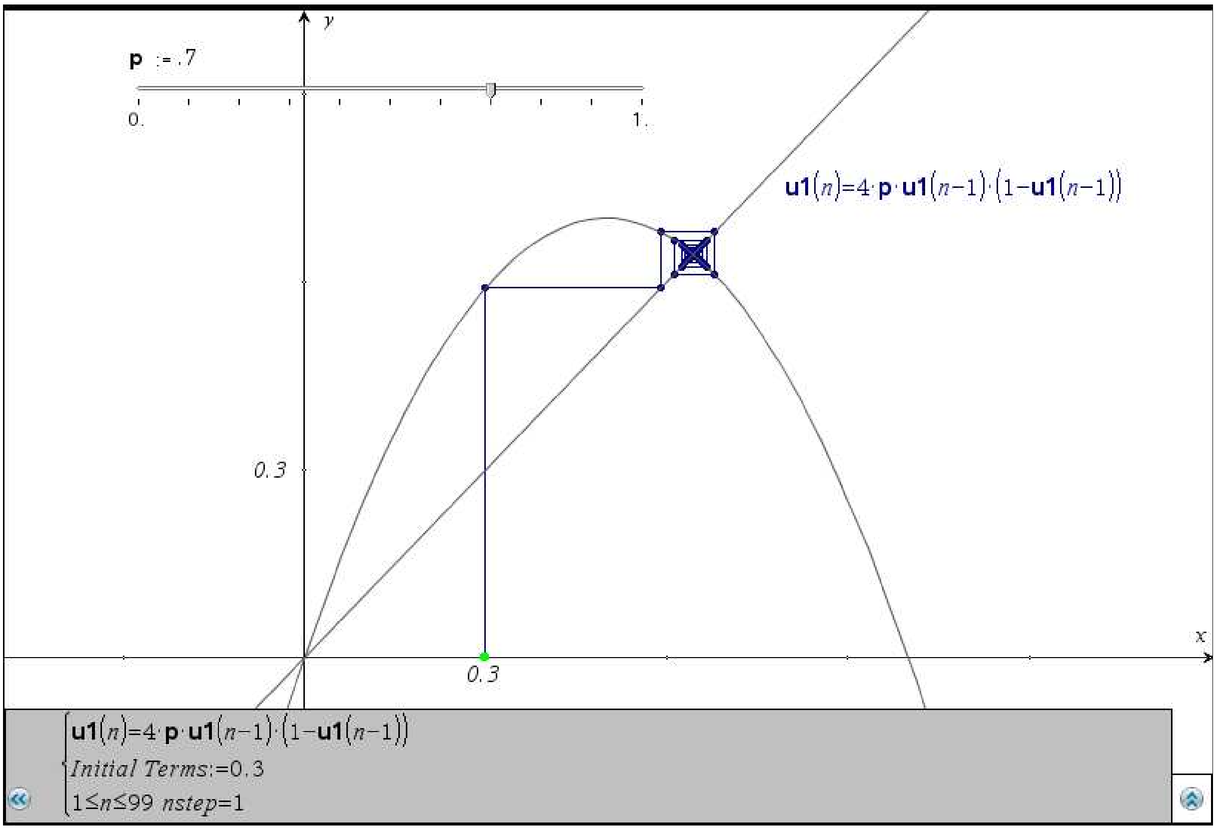


Remplacer la variable par ***p***.
A l'aide d'un click droit sur le curseur, changer les paramètres.



Il faut aussi adapter la fenêtre graphique : par exemple : $x \in [0,50]$ *et* $y \in [-0,3;1]$

Pour mieux se rendre compte du comportement de la suite (elle semble converger vers 0,645), transformer le graphe en un graphe en escargot.
Il faut aussi adapter la fenêtre graphique : par exemple : $x \in [-0,5;1,5]$ *et* $y \in [-0,3;1]$

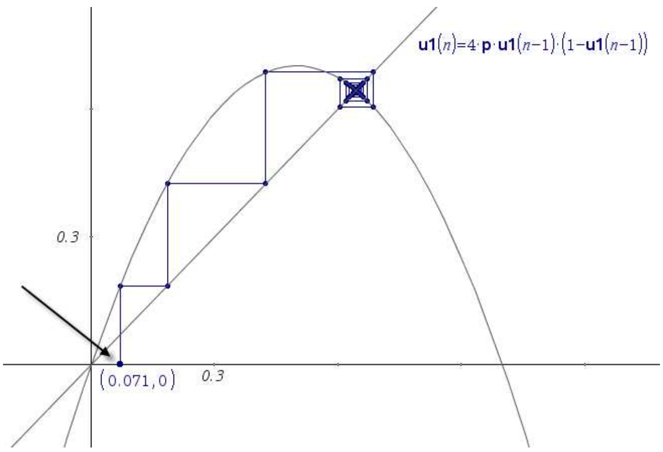


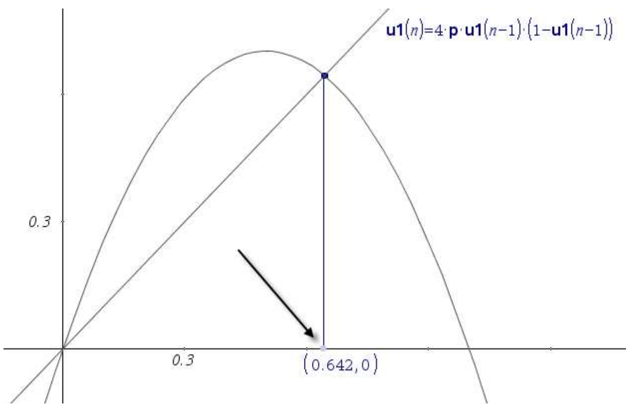
Intéressons-nous aux points d'intersection de la droite et de la parabole ?
Ils sont solutions de l'équation : $2,8x(1-x)=x$

$$-2,8x^2+1,8x=0$$
$$-0,2x.(14x-9)=0$$
$$x=0 \ ou \ x=\frac{9}{14}$$
$$x=0 \ ou \ x\approx 0,643$$

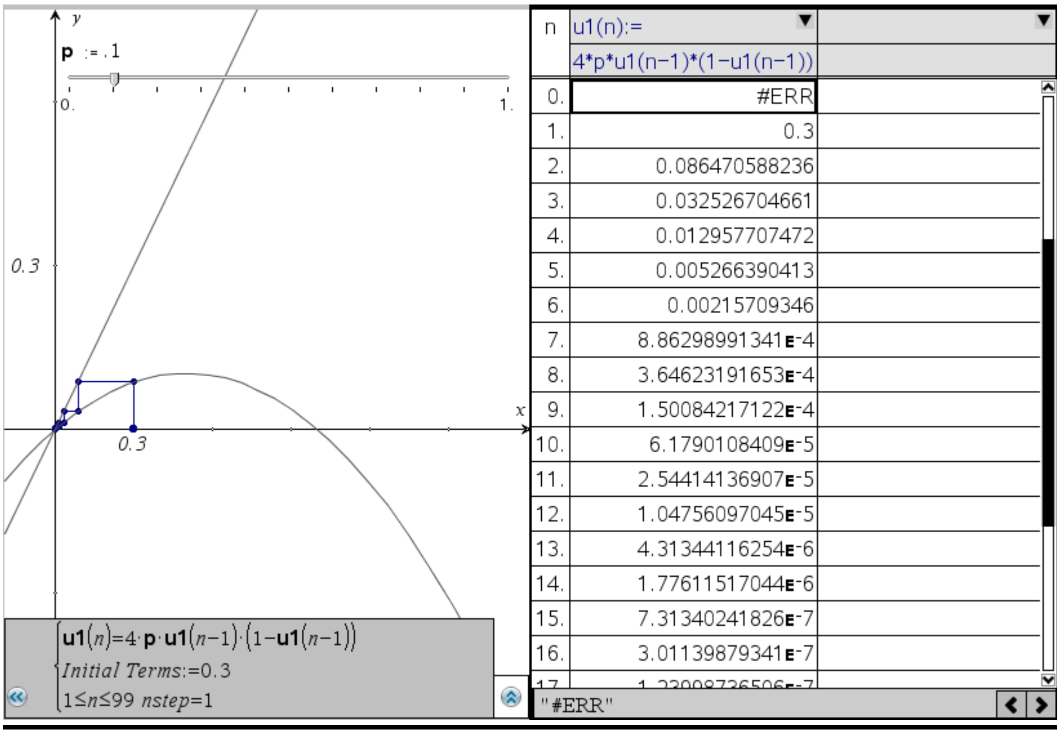
Pour u_0 = 0 ou $\frac{9}{14}$, l'itération tourne court (puisque Y = X), plus rien ne bouge : coccinelles et pucerons ont des effectifs constants d'une année à l'autre.

Il y a plus étrange. En partant de n'importe quelle valeur initiale de u_0 (comprise entre 0 et 1), on est irrésistiblement attiré par $\frac{9}{14}$.
Pucerons et coccinelles sont en phase stable au bout d'un certain temps.
C'est un point fixe ATTRACTIF.
Le point X = 0 est lui un point fixe REPULSIF.
Pour se rendre compte de cette conclusion, on peut faire varier la valeur initiale de la suite.





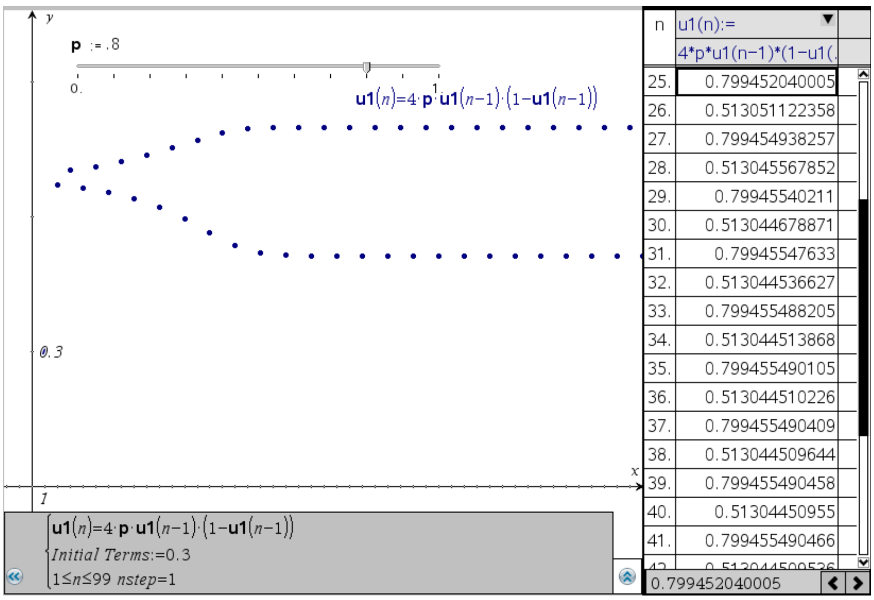
- **2ème cas : p = 0,1**



Les termes deviennent de plus en plus petits. *La suite converge vers zéro.*

Le point X = 0 est ici un point ATTRACTIF : les coccinelles disparaissent…

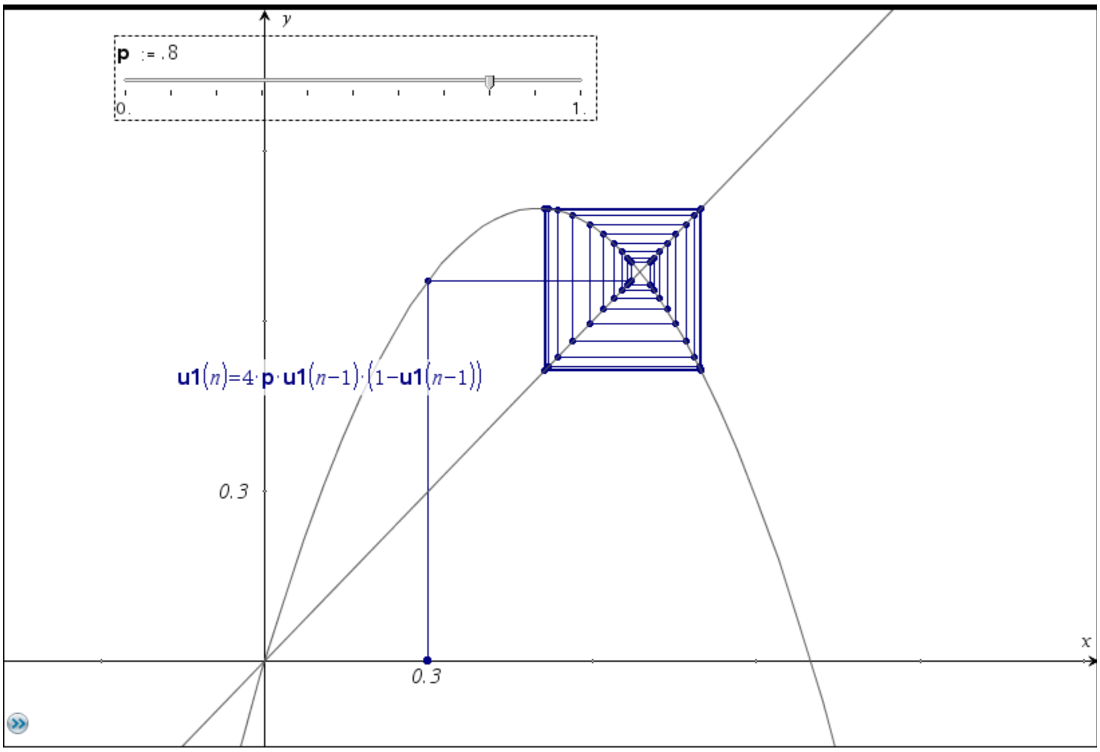
- **3ème cas : p = 0,8**

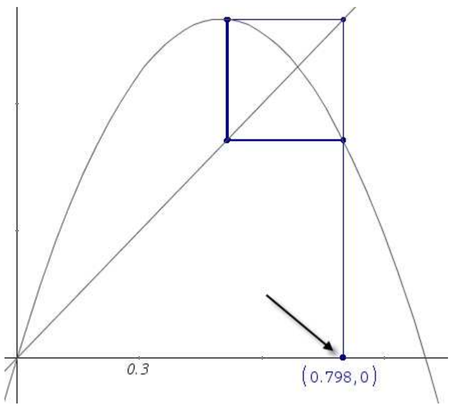


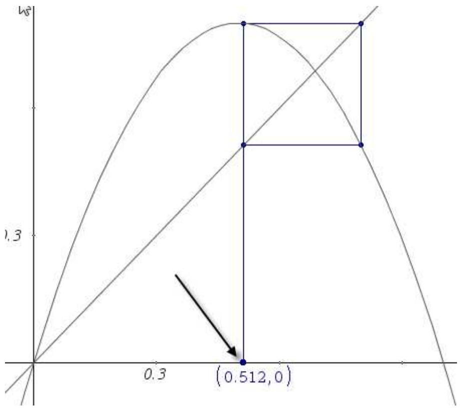
On obtient deux valeurs qui s’alternent sans presque bouger : 0,799 et 0,513.

L'effectif des petites bêtes oscillent entre deux valeurs fixes, quelle que soit la valeur initiale, à deux exceptions près(voir plus loin). C'est ce que l'on appelle un 2-cycle attractif. Cela pourrait signifier que , les années paires, il y aurait « beaucoup » de coccinelles et que, les années impaires, il y en aurait « peu ».

Observons le diagramme en escargot pour comprendre le pourquoi de ces 2 valeurs.



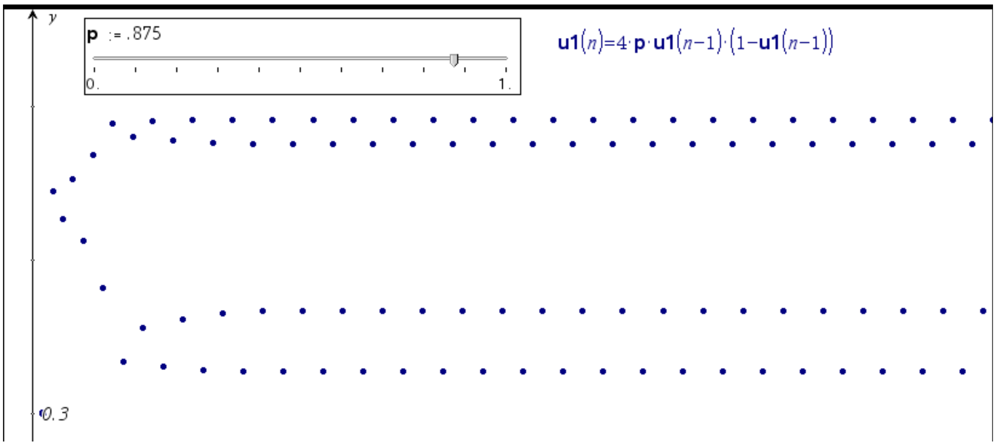




On a beau regarder le graphe de la parabole, 0,513 et 0,799 n'occupent pas de position particulière.
En revanche, comme ce graphe coupe toujours y = x en deux points, on peut être certain que si on donne à u_0 l'une de ces 2 valeurs, rien ne bougera d'une année à l'autre. Ce sont les deux exceptions vues plus haut. Seulement, cette fois-ci, ces points ne sont pas attractifs. Si vous prenez une valeur ne serait-ce qu'un chouia différente, les valeurs s'éloigneront, et tomberont dans le 2-cycle. Il y a bien sur une explication mathématique qui sort du cadre de ce cours.

- **<u>4ème cas : p = 0,875</u>**

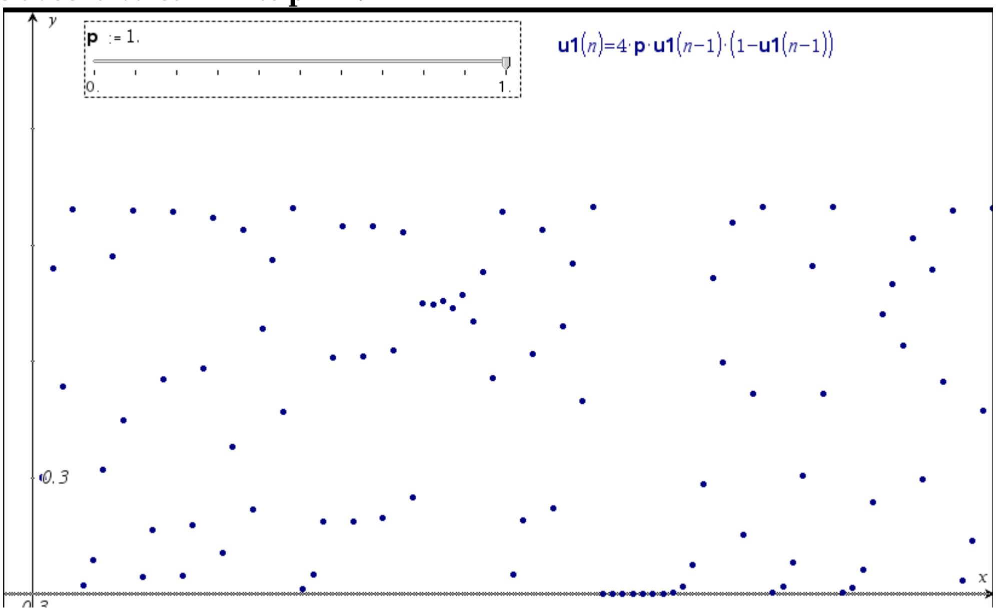
Ce cas est fort semblable au précédent. Toutefois, au bout d'un certain temps, on observe non plus deux valeurs mais bien 4 valeurs qui reviennent chacune à leur tour. C'est un 4-cycle attractif.
Tous les 4 ans, coccinelles et pucerons repasseraient donc par un même niveau de population.



<u>En résumé.</u>

Au fond, le destin des petites bêtes de jardin dépend du paramètre p. Lequel possède des valeurs très spéciales(entre 0 et 1), dites « valeurs frontières ».
Entre ces valeurs, la suite des itérées se comporte de façon très diverses. Ne parlons que des points ou cycles « attractifs ».
Nous avons d'abord rencontré un point attracteur, puis un 2-cycle avec 2 points attracteurs, un 4-cycles avec 4 points attracteurs, etc.
Plus étrange, au delà d'une certaine valeur de p, la suite des itérées semble devenir foldingue, anarchique, chaotique. On ne peut plus rien prévoir du tout.

Essayons avec la valeur limite **p = 1.**



C'est le CHAOS !!!!