

DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° 6

On se propose de déterminer les sinus et les cosinus de $\frac{\pi}{5}$ et $\frac{2\pi}{5}$.

1. Vérifier que pour tout nombre complexe, z , différent de 1 :

$$\frac{1-z^5}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+z^4.$$

2. on pose : $u = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$. Démontrer que u est solution de l'équation :

$$1+z+z^2+z^3+z^4=0 \quad (\text{E})$$

3. On pose : $a = u + u^4$ et $b = u^2 + u^3$.
Démontrer que : $a + b = -1$ et $ab = -1$.

4. En déduire que a et b sont les solutions de l'équation du second degré :

$$z^2 + z - 1 = 0 \quad (\text{E}')$$

5. Exprimer a et b en fonction des cosinus de $\frac{2\pi}{5}$ et $\frac{4\pi}{5}$.

6. Conclure

7. Question supplémentaire

a. a et b sont les nombres introduits en 3.. Développer, réduire, ordonner et simplifier le plus possible l'expression : $(z-1)(z^2-az+1)(z^2-bz+1)$.

En déduire une factorisation de $z^5 - 1$ en produit de trois facteurs à coefficient réels.

b. Factoriser $z^5 - 1$ en produit de cinq facteurs de degré 1 à coefficient complexes.