À rendre le lundi 21 septembre 2009

DEVOIR EN TEMPS LIBRE N° 1

Partie A – Quelques moyennes

La moyenne arithmétique de deux nombres est leur demi-somme. La moyenne géométrique de deux nombres positifs est la racine carrée de leur produit. La moyenne harmonique de deux nombres non nuls de même signe est l'inverse de la moyenne arithmétique de leurs inverses.
Soit a et b deux nombres réels strictement positifs tels que : $a < b$. On désigne respectivement par m, g et h leurs moyennes arithmétique, géométrique et harmonique.

1. Exprimer le plus simplement possible, en fonction de a et b, les nombres m, g et h.

2. Démontrer que : $a < h < g < m < b$.

3. Démontrer que h et m ont la même moyenne géométrique que a et b.

Partie B – Étude d'une fonction

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$ (unité graphique : 5 cm).
On considère la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{2}\left(x+\frac{2}{x}\right)$ et on désigne par $\mathscr{C}_f$ sa représentation graphique.

1. Donner l'ensemble de définition, D_f, de la fonction f (*aucune justification n'est attendue*).

2. Étudier la parité de f.

3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

4. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations complet.

5. Déterminer les asymptotes à la courbe représentative de f.

6. Déterminer les points fixes de f, puis interpréter graphiquement le résultat.

7. Démontrer que pour tout nombre réel positif, h :

$$f(\sqrt{2}+h) = \sqrt{2}+\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}+h}\right)$$

8. Démontrer que pour tout nombre réel positif, h :

$$0 \leqslant f(\sqrt{2}+h)-\sqrt{2} \leqslant \frac{h^2}{2\sqrt{2}} \qquad (1)$$

Partie C – Deux suites adjacentes

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^\star}$ telles que $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et pour tout nombre entier naturel, n, u_{n+1} et v_{n+1} sont respectivement les moyennes harmonique et arithmétique de u_n et v_n.

1. Donner les trois premiers termes de chacune des suites (u_n) et (v_n), les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles puis sous forme décimale (trois chiffres après la virgule). Aucune justification n'est demandée.

2. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont monotones et strictement positives.

3. Démontrer que pour tout nombre entier naturel, $n : 0 \leqslant v_n - u_n \leqslant 2^{-n}$.

4. Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite.

5. Déterminer la limite commune des suites (u_n) et (v_n) (*on pourra introduire la suite* $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de terme général :* $t_n = u_n \times v_n$).

Partie D – Une suite de Héron

On désire estimer la vitesse à laquelle la suite (v_n) converge vers sa limite.

1. Démontrer que pour tout nombre entier naturel, $n : v_{n+1} = f(v_n)$.

2. Représenter graphiquement la suite (v_n).

3. On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $w_n = v_n - \sqrt{2}$.

a. Démontrer que pour tout nombre entier naturel, $n : 0 \leqslant w_{n+1} \leqslant \dfrac{w_n^2}{2\sqrt{2}}$.

b. Démontrer que pour tout nombre entier naturel non nul, $n : 0 \leqslant w_n \leqslant 2\sqrt{2}\left(\dfrac{3\sqrt{2}-4}{8}\right)^{(2^{n-1})}$.

4. Application
Cette question devra être traitée en utilisant le logiciel Maxima. Un fichier de calcul sera joint à la copie.

a. En utilisant l'étude précédente, avec quelle incertitude v_5 est-elle une valeur approchée de $\sqrt{2}$?

b. Régler la précision de calcul dans Maxima à 100 chiffres significatifs. Définir la fonction f et la suite (v_n). Donner la valeur exacte de v_5 sous forme d'une fraction irréductible. Donner une valeur approchée (avec trois chiffres significatifs) de l'erreur commise en approchant $\sqrt{2}$ par v_5.